ISSN 2079–1836
2014, вип. 22

УДК 539.3

Ю. Н. Шевченко, академік НАНУ, д-р техн. наук,
П. А. Стеблянко, д-р физ.-мат. наук, А. Д. Петров

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

В геометрически линейной постановке записаны основные уравнения для решения пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности. Это уравнения теплопроводности, уравнения движения, геометрические соотношения и определяющие уравнения, описывающие неизотермические процессы нагружения как по прямолинейным траекториям деформирования, так и по траекториям деформирования малой кривизны с учетом истории нагружения. В общем виде сформулированы граничные и начальные условия. Рассмотрены основные численные методы решения нестационарных задач теории термоупругопластичности для пространственных тел.

Ключевые слова: *численные методы, термопластичность, неизотермические процессы нагружения.*

Введение. В работах [3–5, 10, 11] решен ряд нестационарных задач теории термоупругопластичности, где применялись физические соотношения, описывающие простые и близкие к ним процессы деформирования. При этом использовались соотношения теории процессов малой кривизны, справедливые для неизотермических процессов деформирования элемента тела, которые разработаны и получили экспериментальное обоснование [6–8].

Одним из наиболее эффективных приемов при численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности является подход, основанный на использовании для определения неизвестных величин метода дробных шагов или метода покомпонентного расщепления [2, 9] в сочетании с представлением искомых величин в виде сплайн-функций [1, 3, 4, 10, 11]. Преимущество данного подхода обусловлено тем, что он не сложнее в реализации, чем конечно-разностный метод. При этом решение находится в виде сплайн-функций во всей области определения, в то время как разностное решение ищется только на сетке [1, 2]. Кроме этого, данный метод дает более высокий порядок аппроксимации, что позволяет выбирать более крупную сетку по координатам по сравнению с конечно-разностным методом при условии достижения одинаковой точности вычислений [4]. Двухмерные сплайны применялись в рамках метода дробных шагов в работах [10, 11] для аппроксимации неизвестных величин и их частных производных по координатам. В случае же плоского деформированного состояния их можно использовать непосредственно в процессе решения задачи, не прибегая к методу расщепления по геометрическим параметрам.

Постановка задачи термоупругопластичности. Основной задачей нестационарной теории термопластичности является определение скоростей перемещений (перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в трехмерном теле в процессе его нагружения и нагрева, когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения будем рассматривать изменяющимся во времени, что может вызвать движение отдельных частей тела.

Первоначально изотропное и однородное трехмерное тело V, ограниченное поверхностью S , в начальный момент времени $t = 0$ находится в естественном ненапряженном состоянии при температуре $T_0(\theta_i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Затем тело подвергается нагреву и нагружению внешними силами. Это могут быть объемные силы, действующие на каждый элемент тела; поверхностные силы, приложенные к одной части поверхности тела. На другой части поверхности тела, которая может быть определенным образом закреплена, задаются скорости перемещений как функции координат и времени.

Предположим, что нагрев и нагружение тела протекают так, что возникающие деформации несущественно влияют на изменение температуры этого элемента. Будем рассматривать такие процессы нагружения и уровни температур, при которых реологические свойства материала не проявляются. Конфигурация тела задается уравнением поверхности, которая ограничивает его. Кроме этого, нужно задать теплофизические и механические характеристики материала тела и условия его теплообмена с окружающей средой.

Теплофизические свойства материала характеризуются коэффициентами теплопроводности λ и температуропроводности α, которые могут зависеть от температуры. Условия теплообмена задаются в виде соответствующих граничных условий, а механические характеристики материала при исследовании процессов деформирования по прямолинейным траекториям и траектория малой кривизны задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов, полученных при различных фиксированных температурах. Кроме этого, задаются значения коэффициентов Пуассона ν и линейного теплового расширения $\alpha_{\text{Т}}$.

Исходя из перечисленных данных, необходимо определить температуру T, три составляющие вектора скорости перемещений V, шесть компонент тензора напряжений S и шесть компонент тензора деформаций E. Следовательно, подлежат определению 16 неизвестных функций времени и трех координат. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями движения, геометрическими и физическими уравнениями, а также уравнением теплопроводности. Температурное поле для изотропного тела при отсутствии в нем источников тепла и в случае пренебрежения теплом, выделенным в процессе его деформирования, определяется путем решения уравнения теплопроводности [4]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{a}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{H_2H_1}{H_3}\frac{\partial T}{\partial\theta_3}\right)\right\} \quad (1)$$

при определенных начальных и граничных условиях, где H_i – параметры Ламе (i = 1, 2, 3).

Начальное распределение температуры в теле, соответствующее естественному ненапряженному состоянию тела, задаётся так

$$T=T_0(\theta_1,\theta_2,\theta_3). \quad (2)$$

Граничные условия, которые отражают влияние окружающей среды на температуру тела, задаются следующим образом [4]

$$\lambda\cdot\partial t/\partial n=-\alpha\,\theta-q\,, \quad (3)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности тела; α – коэффициент теплообмена.

В общем случае величины α, θ, q могут зависеть от времени и положения точки на поверхности трехмерного тела. Условие (3) при различных значениях коэффициента α содержит три вида граничных условий. Граничные условия первого рода заключаются в том, что на поверхности тела в каждый момент времени задан закон распределения температуры ($\alpha\to\infty;\ q=0$). Граничные условия второго рода задают тепловой поток q через поверхность тела ($\alpha=0;\ q\neq0$). Граничные условия третьего рода формулируют закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой при заданной величине θ $(\alpha\neq0;\ q=0)$.

После определения поля температур для различных моментов времени разыскиваются составляющие вектора скорости перемещений и компоненты тензоров напряжений и деформаций, удовлетворяющие трем дифференциальным уравнениям движения, шести геометрическим уравнениям и шести физическим уравнениям. Эти 15 уравнений решаются при определенных начальных и граничных условиях. Начальные условия задаются для всех 15 неизвестных при t = 0

$$V=V_0(\theta_j);\ S=S_0\left(\theta_i\right);\ E=E_0\left(\theta_i\right). \quad (4)$$

На части поверхности тела, где заданы поверхностные силы $b(x_i,t)$, компоненты тензора напряжений должны удовлетворять трем граничным условиям

$$\sigma_{in}(x_k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3\ , \tag{5}$$

где n_i – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в соответствующей точке.

На другой части поверхности, где заданы составляющие вектора скорости перемещений, скорости перемещения должны принимать заданные значения

$$v_i = V_i(x_j, t). \tag{6}$$

Возможна и иная формулировка граничных условий, когда на поверхности тела задаются три условия, взятые определенным образом из (5) и (6).

Определение 15 неизвестных будем вести следующим образом. За основные неизвестные принимаются три составляющие вектора скорости перемещений и шесть компонент тензора напряжений, для которых непосредственно формулируются граничные условия. При этом из шести физических уравнений посредством геометрических соотношений Коши исключаются все компоненты тензора деформаций, которые затем определяются на основании уже известных составляющих вектора скорости перемещений.

При решении нестационарной задачи термопластичности будем пользоваться определяющими уравнениями, описывающими неизотермические процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизны. После решения задачи по геометрии траектории деформирования можно судить о достоверности используемых определяющих соотношений.

Уравнения движения и геометрические соотношения для трехмерных тел в ортогональной системе координат. Уравнения движения бесконечно малого объемного элемента сплошной среды, подверженной деформации, в ортогональной системе координат в геометрически линейном случае представим в виде [3]

$$\dot{v}_i = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta_j} + B_i\ . \tag{7}$$

При записи формул (7) использовались уравнения движения, в которых вместо вторых производных по времени от компонент вектора перемещений записаны первые производные по времени от скоростей перемещений

$$v_i = \dot{u}_i\ , \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

В общем случае ортогональной системы координат тензор деформаций и составляющие вектора перемещений связаны выражением

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,\,i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3\ \ldots, \tag{9}$$

где $u_{i,j}$ – производные по координате вида [3].

$$u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial \theta_j}-u_k\cdot\Gamma^k_{ji},\quad i,j,k=1,2,3.$$

С учетом этого в геометрически линейном случае для скоростей деформаций можно записать

$$\dot{e}_{ij}=0{,}5\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right). \tag{10}$$

Система уравнений (7), (10) замыкается физическими соотношениями, связывающими напряжения и деформации.

Определяющие соотношения теории термопластичности. Одним из аспектов общей проблемы решения нестационарных задач для неупругих тел является выбор определяющих соотношений связи между напряжениями и деформациями. Этот выбор обосновывается согласованностью с экспериментом и тесно связан с исследуемыми процессами деформирования. В общем случае значения деформаций представляют собой функции процесса изменения напряжений и температуры, которые определяются характеристиками всего предшествующего процесса изменения физических факторов, а не только текущими значениями. Подробные сведения по этому вопросу можно найти в [6–8].

Рассмотрим простые или близкие к ним процессы деформирования и процессы деформирования по траекториям малой кривизны. Траекториями деформирования, близкими к прямолинейным, называют те траектории, которые отклоняются от прямых линий, проходящих через начало координат и точку на траектории, соответствующую начальному пределу текучести, не более чем на след запаздывания векторных свойств материала (5–15 пределов текучести по деформациям). В этом случае наименьший радиус кривизны траектории деформирования больше следа запаздывания. Если же отклонение от прямой линии больше следа запаздывания, а радиус кривизны траектории деформирования меньше его, то деформирование происходит по траектории малой кривизны [6–8]. При этом вектор напряжений направлен по касательной к траектории необратимых деформаций.

Запишем физические соотношения, пригодные для исследования обоих процессов. Для этого разобьем процесс нагружения тела по времени на отдельные, достаточно малые этапы. На каждом из них при помощи постулата изотропии А. А. Ильюшина [7] и закона упругого изменения объема записывается связь между напряжениями и деформациями вида

$$\sigma_{ij}=2G^*(e_{ij}+e^{(n)}_{ij})+(3\lambda^* e_0-K\,e_T)\,\delta_{ij}\,, \tag{11}$$

где $K = \{2G(1+\upsilon)\}/(1-2\upsilon)$; $\lambda^* = \left\{2G(1+\nu) - 2G^*(1-2\nu)\right\} \Big/ 3(1-2\nu)$; $e_0 = (e_{11}+e_{22}+e_{33})/3$; $e_T = \alpha_T(T-T_0)$; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$. Величины G, ν, α_T в общем случае предполагаются зависящими от температуры; G^*, $e_{ij}^{(n)}$ имеют различный вид в зависимости от используемых соотношений пластичности – соотношения теории простых процессов нагружения или соотношения процессов малой кривизны.

Теория малых упругопластических деформаций используется при нагружении элемента тела по прямолинейным траекториям деформирования или траекториям, близким к ним. Параметр G^* связан с интенсивностями касательных напряжений и дополнительных деформаций сдвига. Предполагается, что эта функция не зависит от вида напряженного состояния. Поэтому она определяется из опыта на растяжение образцов при различных температурах [6].

После определения зависимости из эксперимента на простое растяжение цилиндрического образца при различных фиксированных температурах строится функция

$$\sigma = F(e, T). \tag{12}$$

Это уравнение определяет так называемую мгновенную термомеханическую поверхность, существование которой с достаточной степенью точности экспериментально подтверждено в работе [8].

В [6] экспериментально подтверждена независимость с определенной степенью точности функции типа (12) от вида напряженного состояния для некоторых классов первоначально изотропных материалов. Ее можно определять при помощи экспериментов на растяжение цилиндрических образцов. При этом неупругая составляющая относительного удлинения образца при его растяжении задается так

$$\varepsilon^{(n)} = \varepsilon - \frac{\sigma}{2G(1+\nu)}. \tag{13}$$

Таким образом, и в этом случае конкретизация определяющих уравнений сводится к заданию мгновенной термомеханической поверхности. Для проведения расчетов эта функция каким-либо образом аппроксимируется. При численном решении уравнение мгновенной термомеханической поверхности вида (12) можно задавать в виде таблицы экспериментальных данных $(\sigma)_j$, $(\varepsilon)_j$, $j = 0,1,..., N$ при фиксированных T.

Заметим, что при решении нестационарных задач физические соотношения (11) приводятся к виду

$$\dot{\sigma}_{ij} = a_{ijkl}\,\dot{e}_{ij} + b_{ij}, \tag{14}$$

где $b_{ij} = \delta_{ij} b_*$; $b_* = -[K\alpha_T + \theta \dfrac{\partial\left(K\alpha_T\right)}{\partial T}]\dot{T}$; a_{ijkl} – const для упругого случая и функционалы процесса деформирования в случае пластических деформаций [3].

Таким образом, формулы (11) или (14) замыкают систему уравнений, которая используется при построении решения как стационарных, так и нестационарных трехмерных задач термопластичности. После построения решения задачи с использованием тех или иных определяющих уравнений в пространстве А. А. Ильюшина строится траектория деформирования для отдельных элементов тела, деформируемых за пределом упругости материала. Компоненты векторов деформации $Э_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ в этом пространстве имеют вид [6]:

$$Э_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_{11} - e_{22} - e_{33}); \;\; Э_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{3}e_{11} + \frac{4-\sqrt{2}}{6}e_{22} - \frac{2+\sqrt{2}}{6}e_{33};$$

$$Э_3 = \sqrt{2}\,e_{12}; \;\; Э_4 = \sqrt{2}\,e_{23}; \;\; Э_5 = \sqrt{2}\,e_{13},$$

и получены из условия совпадения модуля девиатора деформаций и модуля вектора деформаций. Как было указано выше, по виду траектории деформирования в этом пространстве можно сделать вывод о соответствии используемых определяющих уравнений рассматриваемому процессу деформирования.

При активном нагружении выполняется условие

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right) \cdot \Delta e_{ij}^{(n)} \geq 0 .$$

В противном случае имеет место разгрузка по упругому закону.

Методы решения нестационарных задач. Следуя работам [1–5, 10] основными методами решения нестационарных задач теории термоупругопластичности являются:

- разностный метод решения в теории простых процессов деформирования;
- метод конечных элементов в теории простых процессов деформирования и теории процессов малой кривизны;
- метод расщепления по геометрическим свойствам в теории простых процессов деформирования и теории процессов малой кривизны.

В рамках разностного метода и метода конечных элементов решение нестационарной задачи теории термоупругопластичности сводится к решению систем алгебраических уравнений, построенных по классической схеме [1, 2], когда производится замена дифференциальных операторов, входящих в состав полной системы уравнений (7), (10), (11), на их разностные аналоги.

В зависимости от вида физических соотношений, связывающих напряжения, деформации и температуру, возможны различные варианты этих методов. Это может быть разностный метод в теории простых процессов деформирования, разностный метод в теории процессов деформирования малой кривизны, метод конечных элементов в теории простых процессов деформирования и метод конечных элементов в теории процессов малой кривизны.

В [3] предложен новый вариант метода покомпонентного расщепления повышенной точности, разработанный для решения нестационарных задач теории термоупругости и термопластичности. Основными неизвестными являются скорости перемещений (перемещения определяются путем непосредственного интегрирования соответствующих скоростей по времени), напряжения, деформации и температура. Все неизвестные являются функциями времени и координат. При этом система (7), (10), (14) приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + \vec{B}\,, \tag{15}$$

где $\vec{W}$ – вектор, компонентами которого будут скорости перемещений v_i, составляющие тензоров напряжений и деформаций $\sigma_{ij},\ e_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3)$.

В дальнейшем, в рамках метода покомпонентного расщепления, система (15) и уравнение теплопроводности (1) заменяются эквивалентной системой уравнений. Для этого вводится в рассмотрение сетка по времени с учетом дробного шага. Тогда схема расщепления уравнения (1) может быть представлена так [4]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \right) \right\},\ t \in \left[t_p;\, t_{p+1/3} \right];\\
\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right) \right\},\ t \in \left[t_{p+1/3};\, t_{p+2/3} \right];\\
\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\frac{H_2 H_1}{H_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta_3} \right) \right\},\ t \in \left[t_{p+2/3};\, t_{p+1} \right].
\end{gathered} \tag{16}$$

Алгоритм определения температурного поля пространственного тела, организованный на основании формул (16), может сочетать в себе преимущества явной разностной схемы и достоинства неявной схемы [2–4]. Здесь последовательно на каждом шаге по времени решаются три одномерных уравнения. Решение предыдущего уравнения служит начальным условием для последующего уравнения.

Согласно [2, 9], исходная нестационарная пространственная задача вида (15) может быть сведена к эквивалентной ей системе трех последовательно решаемых одномерных задач на дробных шагах по времени:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_1} + \gamma_1 \vec{B}^{p}, \quad t \in [t^{p};\ t^{p+1/3}];\\
&\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_2} + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, \ t \in [t^{p+1/3};\ t^{p+2/3}];\\
&\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta_3} + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, \ t \in [t^{p+2/3};\ t^{p+1}];\\
&\tau = t^{p+1} - t^{p};\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Решение предыдущего векторного уравнения служит начальным условием для последующего уравнения.

Численные результаты. Рассмотрим задачу о нестационарном плоском деформировании трехслойного тела, составленного из различных материалов. Система координат и геометрические размеры показаны на рис. 1. Предполагается, что слой 1 (сталь Ст20) при начальной температуре $T = T_0$, одинаковой для всех точек тела, имеет плоские границы $y = -H/2$, $y = H/2$ и растягивается в направлении оси x. Закон изменения напряжений σ_x во времени на краях $x = L,\ x = -L$ и температуры считается заданным.

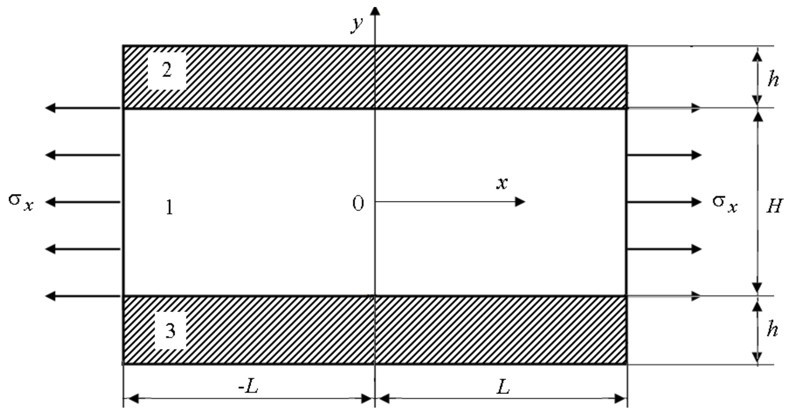


Рис. 1 – **Система координат и геометрические размеры тела**

Тепломеханические свойства слоёв 2 и 3 одинаковы (сталь 30ХГСА), зависят от температуры и отличаются от свойств материала слоя 1. Предполагается, что в процессе деформирования здесь могут возникать необратимые деформации ($\sigma_i/\sigma_s \geq 1$).

В общем случае начальное напряженно-деформированное состояние трехслойного тела считается нулевым, а граничные условия формулируются следующим образом:

- края $y=-H/2-h$, $y=H/2+h$, $x\in[-L, L]$ свободны от напряжений ($\sigma_y=\sigma_{yx}=0$);

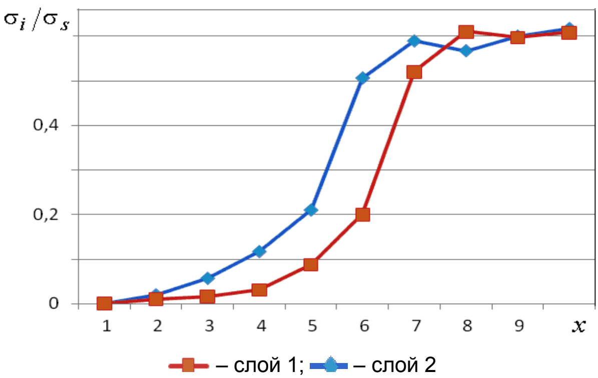
- края $x=L,\ x=-L$ слоев 2 и 3 свободны от напряжений ($\sigma_x=\sigma_{xy}=0$);

- на краях $x=-L,\ x=L$ слоя 1 выполняются условия $\sigma_x=F(t),\ \sigma_{xy}=0$.

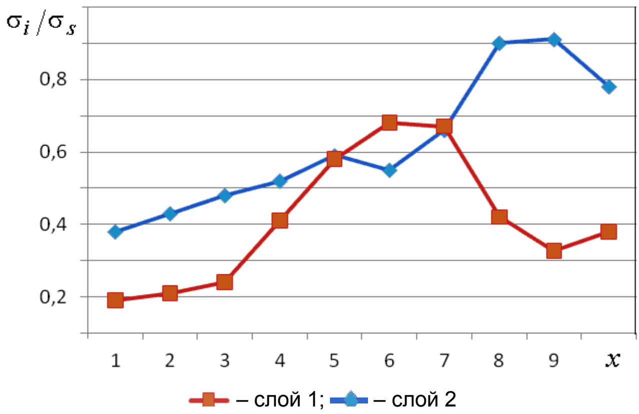
Предполагается, что на границе стыковки слоев 2 и 3 со слоем 1 ($y=H/2$, $y=-H/2$, $x\in[-L, L]$) перемещения и скорости перемещений не претерпевают разрывов.

Функция $T(x, y, t)$ определяется численно на основании варианта метода покомпонентного расщепления. После этого отыскиваются составляющие вектора скорости перемещений $V_x(x, y, t)$, $V_y(x, y, t)$ и компоненты тензоров напряжений и деформаций. Все эти величины определяются на основании варианта метода покомпонентного расщепления повышенной точности, основанного на представлении искомых величин в виде сплайн-функций [3]. При этом предполагается, что при переходе через границу стыковки слоев искомые величины не претерпевают разрывов. Перемещения U_x, U_y верхней границы слоя 2 определяются путем численного интегрирования по времени соответствующих скоростей перемещений.

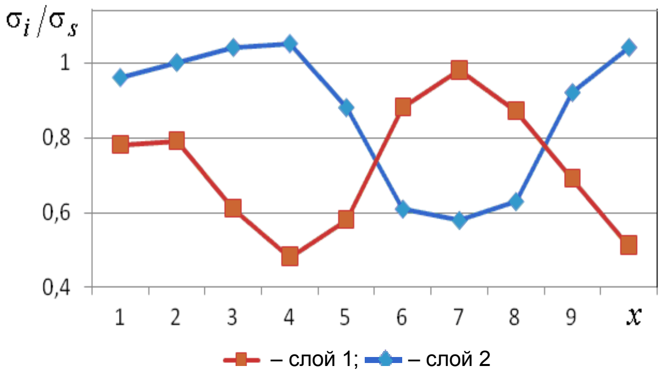
Результаты численного решения данной задачи представлены на рис. 2, 3, где для различных моментов времени показано распределение безразмерной интенсивности напряжений σ_i/σ_s соответственно для границы первого и второго слоев пакета [3]. При этом предполагалось, что пакет работает в условиях постоянной температуры; задача решалась в режиме установления решения во времени.



а)



б)



в)

Рис. 2 – **Распределение** σ_i / σ_s **на границе слоев при:**
а) $t = 90\tau$ **; б)** $t = 140\tau$ **; в)** $t = 190\tau$

На наш взгляд, представляет большой практический интерес построение решения данной задачи при больших значениях температур, когда термомеханические свойства материала существенно зависят от температуры.

Выводы. Для построения решения повышенной точности уравнения теплопроводности (1) и системы (15) можно воспользоваться сплайнами [2, 3]. Все неизвестные величины представляются в виде сплайн-функций (использовались как кубические B-сплайны, так и напряженные сплайны). Применение аппарата сплайн-функций дает возможность записать более точные разностные выражения для дифференциальных операторов, входящих в состав схем расщепления (16), (17). Это позволяет в целом повысить как минимум на порядок точность вычислений по координатам.

При условии соблюдения одинаковой с классическим конечно-разностным методом точности вычислений данный метод позволяет быстрее получать результаты в силу выбора более крупных шагов интегрирования по координатам, что приводит к существенному уменьшению количества используемых узлов пространственной сетки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Завьялов Ю. С.*** Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
2. ***Марчук Г. И.*** Методы расщепления / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1988. – 263 с.
3. ***Стеблянко П. А.*** Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности / П. А. Стеблянко. – К. : ИМ НАН Украины, 1997. – 273 с.
4. ***Стеблянко П. А.*** Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – К. : Наук. думка, 1998. – 304 с.
5. ***Стеблянко П. А.*** Методы решения нестационарных задач теории пластичности / П. А. Стеблянко. – Тверь: Приз, 1999. – 424 с.
6. ***Шевченко Ю. Н.*** Физические уравнения термовязкопластичности / Ю. Н. Шевченко, Р. Г. Терехов. – К. : Наук. думка, 1982. – 238 с.
7. ***Шевченко Ю. Н.*** Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 2. Термовязкопластичность / Ю. Н. Шевченко, В. Г. Савченко. – К. : Наук. думка,1987. – 264 с.
8. ***Шевченко Ю. Н.*** Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю. Н. Шевченко, М. Е. Бабешко, Р. Г. Терехов. – К. : Наук. думка, 1992. – 328 с.
9. ***Яненко Н. Н.*** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.
10. ***Steblyanko P. A.*** Calculation of temperature nonstationary stress-strained state of composite shall on the basis of combined 2D model with 3D elements / P. A. Steblyanko, Yu. N. Shevchenko // TS2005-7th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, June 4-9, 2007. Taipei, Taiwan. – P. 647–650.
11. ***Shevchenko Yu. N.*** The non-stationary 2D and 3D coupled problems of thermal-elastic-plasticity / Yu. N. Shevchenko, P. A. Steblyanko // TS2005-6th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, May 26-29, 2005. Vienna, Austria. – P. 231–234.

Ю. М. Шевченко, академік НАНУ, д-р техн. наук,
П. О. Стеблянко, д-р фіз. - мат. наук, А. Д. Петров

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ У НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ

Дана геометрично лінійна постановка просторових нестаціонарних задач теорії термопружнопластичності, записано основні рівняння. Це рівняння теплопровідності, рівняння руху, геометричні співвідношення і визначальні рівняння, що описують неізотермічні процеси навантаження як по прямолінійних траєкторіях деформування, так і по траєкторіях деформування малої кривизни з урахуванням історії навантаження. У загальному вигляді сформульовано граничні та початкові умови. Розглянуто основні чисельні методи розв'язання нестаціонарних задач теорії термопружнопластичності для просторових тіл.

***Ключові слова*:** *числові методи, термопластичність, неізотермічні процеси навантаження.*

Yu. N. Shevchenko, Acad. of NASU, Dr. Sci. (Tech.),
P. A. Steblyanko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), A. D. Petrov

COMPUTING METHODS IN NON-STATIONARY PROBLEMS OF THEORY THERMAL-PLASTICITY

The basic equations of spatial non-stationary problems of the thermal-elastic-plasticity theory (TEPT) in geometrically linear statement were formulated. There are the equations of heat conductivity, the equations of movement, geometrical ratios and the determining equations describing non-isothermal processes loading both on rectilinear trajectories of deformation and on trajectories of deformation of small curvature taking into account the loading processes. The boundary and initial conditions were formulated in general view. The basic numerical methods of the decision of non-stationary problems of the thermal-elastic-plasticity theory for spatial bodies were considered.

***Keywords*: *numerical methods, thermal-plasticity, non-isothermal loading processes*.**

In [3–5, 10, 11] the solutions a number of nonstationary TEPT problems have been given. The physical relationship describing simple and almost simple processes of deformation were employed. Processes of deformation on trajectories of small curvature were also considered for nonisothermal deformation processes in an element of a solid. The fundamental relationships for describing of such processes were derived and substantiated experimentally [6–8].

An approach, based upon application of the fractional-step method or component-wise splintering method [1, 2, 9] along with interpolation of the searched functions by spline-functions [3–5], appears to be efficient for numerical analysis of the spatial nonstationary TEPT problems. This approach exhibits the following advantages:

- its application is simple as in the case of finite-differences methods;
- the solution can be found in the form of a spline for the entire domain of definition, while the finite-differences method provides a solution only on a grid;
- the accuracy rate is much better, which allows using a larger grid in comparison to the finite-differences method to achieve the same accuracy of calculations [4].

Note that two-dimensional splines were used when employing the fractional-step method [3, 4] to approximate the unknown functions and their partial derivatives on the coordinates. In the case of plane strain the splines can be used directly, and, thus, the geometrical parameter splintering method needs not to be involved.

The main methods for solution of nonstationary TEPT problems are following [1–5]:

- the finite differences method (in the theory of simple deformation processes);
- the finite elements method (in the theory of simple deformation processes and the theory of small curvature processes);

- the method of splitting on geometrical properties (in the theory of simple deformation processes and the theory of small curvature processes).

Within the framework of the finite-differences method and the of finite elements method, the solution of nonstationary TEPT problems can be reduced to the systems of a large number of algebraic equations constructed by the classical scheme [1–4]. The essence of this scheme lies in the substitution of the differential operators in the complete system of equations by their difference analogues. According to the form of the physical relations, different variants of these methods can be employed.

In [3] a new high-precision variant of the method of component-wise splintering has been suggested for solution of nonstationary thermo-elasticity and thermo-plasticity problems. The rates of displacements (the latter ones are determined by means of integration of the corresponding rates by time) as well as stresses, strains, and temperature are chosen to be basic unknowns. All the unknown functions appear to be functions of the time and coordinates. Then the full system of yield equations [3] is

$$\dot{W} = A_1 W,_1 + A_2 W,_2 + A_3 W,_3 , \tag{1}$$

where W is a vector, which components can be the velocities of displacements v_i, the stress tensor σ_{ij} or the strain tensor e_{ij} components. For writing of the vector equation (1), the equations of motion, geometrical relations and the physical relations were used. When using the component-wise splintering method, system (1) and heat conduction equation are to be replaced with an equivalent system of equations.

As mentioned in [1, 3], the original nonstationary spatial problem (1) can be reduced to the system of three successively solved one-dimensional problems equivalent on fraction steps on time:

$$\begin{gathered} \dot{W} = A_1 W,_1 , \;\; t \in [t^p ; t^{p+1/3}] \;; \\ \dot{W} = A_2 W,_2 , \;\; t \in [t^{p+1/3} ; t^{p+2/3}] \;; \\ \dot{W} = A_3 W,_3 , \;\; t \in [t^{p+2/3} ; t^{p+1}] \,. \end{gathered} \tag{2}$$

The solution of the previous vector equation serves as the initial condition for the subsequent equation.

The algorithm for determination of the temperature field in a body, constructed on the basis of heat conduction equation, can combine the advantages of the explicit difference scheme and the implicit scheme [3, 4]. At each of the consecutive steps on time, three one-dimensional equations are to be solved.

As the initial condition for the subsequent equation the solution of the previously solved equation is used.

In given article are taken up questions connected with development and application of the basic numerical methods of the decision of nonstationary problems of the theory TEPT for spatial bodies at simple and complex deformation.

REFERENCES

1. ***Zavialov Yu. S.*** The methods of spline-function / Yu. S. Zavialov, B. I. Kvasov, V. L. Miroshnitchenko. – M. : Nauka, 1980. – 352 p. (in Russian).

2. ***Marchuk G. I.*** The method of decomposition / G. I. Marchuk. – M. : Nauka, 1988. – 263 p. (in Russian).

3. ***Steblyanko P. A.*** Spatial non-stationary problems of the theory thermoelastic-plasticity / P. A. Steblyanko. – K. : Institute of Mechanics NAS of Ukraine, 1997. – 273 p. (in Russian).

4. ***Steblyanko P. A.*** Methods of decomposition in space problems of the theory of plasticity / P. A. Steblyanko. – K. : Nauk. dumka, 1998. – 304 p. (in Russian).

5. ***Steblyanko P. A.*** Method of the decision of non-stationary problems of the theory of plasticity / P. A. Steblyanko. – Tver: Prize, 1999. – 424 p. (in Russian).

6. ***Shevchenko Yu. N.*** The physical equations thermoviscous plasticity / Yu. N. Shevchenko, R. G. Terekhov. – K. : Nauk. dumka, 1982. – 238 p. (in Russian).

7. ***Shevchenko Yu. N.*** The mechanics of coupled fields in elements of constructions. Vol. 2. / Yu. N. Shevchenko, V. G. Savchenko. – K. : Nauk. dumka, 1987. – 264 p. (in Russian).

8. ***Shevchenko Yu. N.*** Thermoviscoelastoplastic Processes of the Combined Deformation of Structural Elements / Yu. N. Shevchenko, M. E. Babeshko, R. G. Terehov. – K. : Nauk. dumka, 1992. – 328 p. (in Russian).

9. ***Yanenko N. N.*** Method of fractional-step for solving many dimensional problems in the mathematical physics / N. N. Yanenko. – Novosibirsk: Nauka, 1967. – 195 p. (in Russian).

10. ***Shevchenko Yu. N.*** The non-stationary 2D and 3D coupled problems of thermal-elastic-plasticity / Yu. N. Shevchenko, P. A. Steblyanko // TS2005-6th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, Vienna, Austria, 2005. – P. 231–234.

11. ***Steblyanko P. A.*** Calculation of temperature non-stationary stress-strained state of composite shall on the basis of combined 2D model with 3D elements / P. A. Steblyanko, Yu. N. Shevchenko // TS2005-7th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, Taipei, Taiwan, 2007. – P. 647–650.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев;

Днепродзержинский государственный
технический университет,
Днепродзержинск;

Днепропетровский национальный
университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, Украина

Поступила в редколегію 10.05.2013