

УДК 539.3

*Р. М. Мартиняк, д-р фіз.-мат. наук,
Х. І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук*

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВА ІТЕРАЦІЙНА ПРОЦЕДУРА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачу термопружності для біматеріальної площини з міжфазною тріщиною, заповненою теплопровідним середовищем, термоопір якої залежить від її розкриття, зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття тріщини і стрибка температури між її берегами. На основі методу послідовних наближень побудовано окремі алгоритми розв'язування цієї системи для двох напрямів заданого теплового потоку – до матеріалу з більшою і з меншою термічною дистортивністю. Проаналізовано залежність розкриття тріщини від теплового потоку і коефіцієнта теплопровідності її заповнювача.

Ключові слова: міжфазна тріщина, теплопровідний заповнювач, нелінійна система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, ітераційна процедура.

Вступ. Передача тепла між берегами тріщини істотно впливає на розподіл температури і напружень в матеріалі поблизу тріщини. Я.С. Підстригач та Г.С. Кіт [3] запропонували концептуальний підхід для дослідження температурних полів і напружень у тілах з тріщинами, між берегами яких відбувається тепловий контакт через заповнювач тріщин, використовуючи умови теплового контакту тіл через тонкий прошарок [4]. Якщо, зважаючи на малу висоту тріщин, знехтувати поздовжньою провідністю їх заповнювача, то приходимо до моделі тріщини, що проводить тепло лише в поперечному напрямі. У [6] такі тріщини називають теплопроникними, а у [12, 13, 16] – частково проникними або частково ізольованими. Вплив заповнювача теплопроникної тріщини на теплообмін між її берегами враховується термічним опором, пропорційним висоті тріщини і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача. Задачі термопружності для тіл з тріщинами із заданим наперед термоопором, що не змінюється при навантаженні, розв'язано у [5 – 7, 12, 13, 16]. Досліджено термічні напруження у біматеріалі з міжфазною тріщиною із заданим термоопором [15].

У [9] вперше змодельовано температурні поля і напруження у біматеріалі з міжфазною тріщиною, що містить теплопровідний заповнювач, термоопір якої залежить від її розкриття і змінюється зі зміною теплового і механічного навантаження. Відповідна задача термопружності була зведена до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних

рівнянь відносно розкриття тріщини та стрибка температури між її берегами, для розв'язування якої розроблена методика [9], на основі якої досліджено якісні закономірності впливу заповнювача тріщини на термомеханічну поведінку біматеріалу для конкретного діапазону зміни інтенсивності термічного навантаження (прикладеного теплового потоку) і коефіцієнта теплопровідності заповнювача. Проте подальші дослідження виявили, що ця методика приводить до фізично некоректних результатів при великих теплових потоках і низьких коефіцієнтах теплопровідності заповнювача. Тому у цій статті запропоновано ітераційні алгоритми розв'язування нелінійної задачі термопружності для біматеріалу з міжфазною теплопроникною тріщиною, термоопір якої залежить від її розкриття, що дають змогу досліджувати термонапружений стан такого тіла для широкого діапазону зміни теплового й механічного навантажень та коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини.

Постановка задачі та її зведення до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Розглядаємо біматеріал, складений з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких характеризуються різними термомеханічними властивостями. Вважаємо, що параметр Дандерса [13] біматеріалу дорівнює нулю, тобто його пружні сталі зв'язані залежністю $G_1(1-\nu_2) = G_2(1-\nu_1)$ (G_i , ν_i – модулі зсуву і коефіцієнти Пуассона матеріалу півплощин D_i , $i = 1, 2$). На межі з'єднання півплощин розташована міжфазна тріщина (рис. 1) завдовжки $2a$, порожнина якої заповнена теплопровідною речовиною (рідиною чи газом).

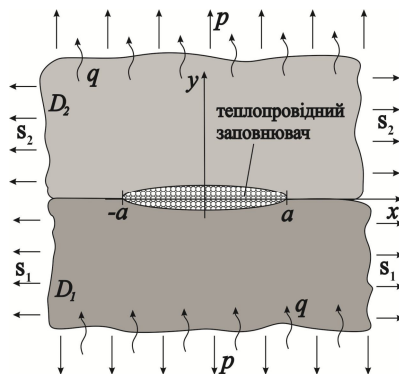


Рис. 1 – Схема біматеріалу з міжфазною заповненою тріщиною

На нескінченності до тіла прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний тепловий потік q . Окрім того, до півплощин D_1 і D_2 прикладено лінійно розподілені по координаті y напруження S_1 і S_2 , які усувають глобальне видовження і викривлення півплощин під дією розтягувального навантаження і теплово-

го потоку відповідно. В біматеріалі реалізується двовимірне стаціонарне температурне поле і стан плоскої деформації. Вважаємо, що береги тріщини вільні від навантажень, а заповнювач тріщини не чинить опору деформуванню тіла. Вплив заповнювача тріщини на теплообмін між її поверхнями моделюємо термоопором, що пропорційний розкриттю тріщини $h(x)$ і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності заповнювача тріщини λ_c . Поза тріщиною на ділянці з'єднання півплощин виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту.

Використовуючи відому методику [8], температурне поле і напружено-деформований стан в біматеріалі подано через розкриття тріщини $h(x)$ та стрибок температури між її берегами $\gamma(x)$, для визначення яких отримано систему нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{Kp}{2} - \frac{\lambda\eta^-}{2} \gamma(x), \quad |x| < a; \quad (1)$$

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad (2)$$

де шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a) = 0$, $\gamma(\pm a) = 0$; $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1 (1 - \kappa_2))$, $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$; $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; $\eta_i = \alpha_i (1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічні дистортивності, α_i – коефіцієнти лінійного теплового розширення, λ_i – коефіцієнти теплопровідності компонент біматеріалу D_i ($i = 1, 2$).

Вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, стрибок температури $\bar{\gamma} = \gamma \lambda \eta^-$, коефіцієнт теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = \lambda_c / \lambda$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = Kp$, тепловий потік $\bar{q} = q a \eta^-$. Вважаємо, що термічні дистортивності (ТД) матеріалів різні ($\eta_1 \neq \eta_2$, $\eta^- \neq 0$).

Безрозмірний тепловий потік \bar{q} може набувати як додатних, так і від'ємних значень: $\bar{q} > 0$, якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, та $\bar{q} < 0$, якщо до матеріалу з меншою ТД.

Використовуючи безрозмірні величини, запишемо СІДР у безрозмірному вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{h}'(t) dt}{t - \bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}(\bar{x}) = -\frac{\bar{p}}{2}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (3)$$

$$\bar{\lambda}_c \frac{\bar{\gamma}(\bar{x})}{\bar{h}(\bar{x})} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}'(t) dt}{t - \bar{x}} = \bar{q}, \quad |\bar{x}| < 1. \quad (4)$$

де $\bar{h}(\pm 1) = 0$, $\bar{\gamma}(\pm 1) = 0$.

Систему СІДР (3), (4) розв'язуватимемо методом послідовних наближень. Для двох протилежних напрямів теплового потоку запропоновано окремі аналітично-числові процедури його реалізації. Зокрема, для теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, на кожному кроці ітераційного процесу розв'язуємо лінійну систему СІДР:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{h}^{(i)}(t) dt}{t - \bar{x}} = -\frac{1}{2} \bar{\gamma}^{(i-1)}(\bar{x}) - \frac{1}{2} \bar{p}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (5)$$

$$\bar{\lambda}_c \frac{\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})}{\bar{h}^{(i)}(\bar{x})} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}^{(i)}(t) dt}{t - \bar{x}} = \bar{q}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (6)$$

де $\bar{h}^{(i)}(\pm 1) = 0$, $\bar{\gamma}^{(i)}(\pm 1) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\bar{\gamma}^{(0)}(\bar{x}) = 0$.

Тут за початкове наближення вибирали випадок, коли термічні деформації не впливають на розкриття тріщини. В цьому разі розкриття тріщини і стрибок температури на першій ітерації визначаються аналітично:

$$\bar{h}^{(1)}(\bar{x}) = \frac{\bar{p}}{2} \sqrt{1 - \bar{x}^2}, \quad \bar{\gamma}^{(1)}(\bar{x}) = \frac{2\bar{p}\bar{q}}{\bar{p} + 4\bar{\lambda}_c} \sqrt{1 - \bar{x}^2}.$$

На наступних ітераціях функції $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$ та $\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})$ ($i \geq 2$) визначаємо за допомогою методу колокацій [1], згідно з яким розв'язки рівнянь (3), (4) подаємо у вигляді скінченних сум рівномірно збіжних рядів за поліномами Чебишева 2-го роду і отримуємо на кожному кроці ітераційного процесу системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів при цих поліномах, які розв'язуємо числово.

Числовий експеримент виявив, що така ітераційна схема ефективна за теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, проте призводить до некоректних результатів для відносно великих значень густини теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, зокрема, до від'ємного розкриття тріщини на другому і подальших кроках ітераційного процесу. Тому, якщо тепловий потік скерований до матеріалу з меншою ТД, пропонуємо таку ітераційну процедуру:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{h}^{(i)}(t)}{t-\bar{x}} dt + \left[\frac{\bar{q}}{2\bar{\lambda}_c} + \frac{1}{4\pi\bar{\lambda}_c} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}^{(i-1)}(t)}{t-\bar{x}} dt \right] \bar{h}^{(i)}(\bar{x}) = -\frac{1}{2} \bar{p}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (7)$$

$$\bar{\lambda}_c \frac{\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})}{\bar{h}^{(i)}(\bar{x})} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}'^{(i)}(t)}{t-\bar{x}} dt = \bar{q}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (8)$$

де $\bar{h}^{(i)}(\pm 1) = 0$, $\bar{\gamma}^{(i)}(\pm 1) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\bar{\gamma}^{(0)}(\bar{x}) = 0$.

Тут, на відміну від попередньої ітераційної схеми (5), (6), вже на першому кроці ітераційного процесу враховуються термічні деформації при визначенні розкриття тріщини. Для визначення функцій $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$ та $\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})$ ($i \geq 1$) із системи СІДР (7), (8) використовуємо метод колокацій [1], так, як і при розв'язуванні системи (5), (6).

Водночас, як засвідчив числовий експеримент, процедура (7), (8) не-ефективна для відносно великих густин теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, коли виникає від'ємне розкриття тріщини вже на першому кроці ітераційного процесу.

За критерій зупинки ітераційних процесів вибирали одночасне виконання умов

$$\left| \frac{\bar{\gamma}^{(i)}(0) - \bar{\gamma}^{(i-1)}(0)}{\bar{\gamma}^{(i)}(0)} \right| \leq 10^{-5}, \quad \left| \frac{\bar{h}^{(i)}(0) - \bar{h}^{(i-1)}(0)}{\bar{h}^{(i)}(0)} \right| \leq 10^{-5}.$$

Числові результати. На рис. 2 проілюстровано залежність розкриття тріщини від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для двох напрямів потоку – скерованого до матеріалу з більшою ТД (суцільні криві) та до матеріалу з меншою ТД (штрихові криві) за фіксованого значення коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = 0.01$ та фіксованої інтенсивності розтягувальних зусиль $\bar{p} = 0.01$. Штрих-пунктирна крива описує розкриття тріщини за відсутності теплового навантаження ($\bar{q} = 0$). Бачимо, що зі збільшенням густини теплового потоку $|\bar{q}|$ розкриття тріщини збільшується, коли потік скерований до матеріалу з більшою ТД, і зменшується, коли потік скерований до матеріалу з меншою ТД.

На рис. 3 проілюстровано вплив теплової провідності заповнювача тріщини на її розкриття за скерованого до матеріалу з меншою ТД теплового потоку при $\bar{q} = -0.006$, $\bar{p} = 0.01$. Суцільні криві відповідають коефіцієнтам теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = 10^{-2}$, $\bar{\lambda}_c = 10^{-3}$, $\bar{\lambda}_c = 10^{-4}$, $\bar{\lambda}_c = 10^{-5}$. Штрих-пунктирна крива зображає розкриття тріщини за ідеа-

льно провідного заповнювача ($\bar{\lambda}_c = \infty$), коли стрибок температури між її берегами дорівнює нулю і температурне поле не впливає на її розкриття.

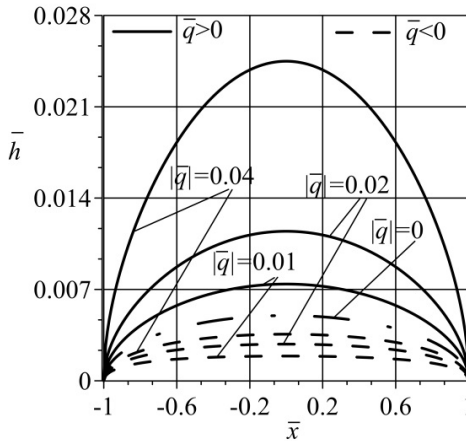


Рис. 2 – Залежність розкриття тріщини від густини та напрямку теплового потоку

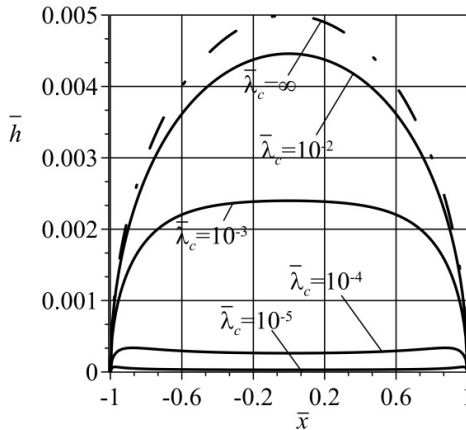


Рис. 3 – Залежність розкриття тріщини від коефіцієнта теплопровідності заповнювача за теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД

Бачимо, що розкриття тріщини зменшується зі зниженням коефіцієнта теплопровідності заповнювача, а розподіл розкриття вздовж тріщини стає більш рівномірним. Якщо при $\bar{\lambda}_c = 10^{-3}$, $\bar{\lambda}_c = 10^{-2}$ розкриття набуває максимального значення в центрі тріщини, то при $\bar{\lambda}_c = 10^{-4}$,

$\bar{\lambda}_c = 10^{-5}$ максимум розкриття досягається поблизу кінців тріщини. Виявлено, що навіть за дуже малих коефіцієнтів теплопровідності заповнювача ($\bar{\lambda}_c = 10^{-5}$) локальний мінімум розкриття в центрі тріщини залишається додатнім, тому береги тріщини не вступають у контакт за теплового потоку скерованого до матеріалу з меншою ТД, хоча за теплоізоляції берегів тріщини вони починають контактувати на центральній ділянці тріщини [8].

Зауважимо, що термонапружений стан біматеріалу з одночасним урахуванням термоопору заповнювача і поверхневих плівок на її берегах досліджено у [2, 8, 9, 11].

Висновки. Досліджується двовимірний термонапружений стан біматеріального тіла із заповненою теплопровідним середовищем міжфазною тріщиною, термоопір якої залежить від її розкриття, за дії нормальних до міжфазної лінії розтягувальних зусиль і теплового потоку. Відповідна задача термопружності зведена до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття тріщини і стрибка температури між її берегами. На основі методу послідовних наближень побудовано окремі ітераційні алгоритми розв'язування цієї системи для двох напрямів заданого теплового потоку – до матеріалу з більшою і з меншою термічною дистортивністю. Проаналізовано залежність розкриття тріщини від теплового потоку і коефіцієнта теплопровідності її заповнювача. Виявлено, що за теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю, зниження коефіцієнта теплопровідності заповнювача приводить до зменшення розкриття тріщини, більш рівномірного його розподілу вздовж тріщини та до зміщення максимуму розкриття з центру тріщини до її країв.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
2. *Гольдштейн Р. В.* Эффект частичного закрытия міжфазної тріщини з теплопровідним заповнювачем і поверхневими плівками при дії на біматеріал термічного навантаження / Р. В. Гольдштейн, Г. С. Кіт, Р. М. Мартиняк, Х. І. Середницька // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – Т. 55, № 4. – С. 64–73.
3. *Подстригач Я. С.* Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Я. С. Подстригач, Г. С. Кит // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1967. – Вып. 7. – С. 194–201.
4. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя / Я. С. Подстригач // *Инж.-физ. журн.* – 1963. – Т. 6, № 10. – С. 129–136.
5. *Кит Г. С.* Влияние теплопроницаемости дугообразной трещины на термоупругое состояние в ее окрестности / Г. С. Кит, Ю. С. Френчко // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1973. – Т. 9, № 1. – С. 75–80.
6. *Кит Г. С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – К.: *Наук. думка*, 1983. – 280 с.

7. **Кит Г. С.** Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной / Г. С. Кит, О. В. Побережный // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – № 9. – С. 78-88

8. **Мартыняк Р. М.** Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р. М. Мартыняк, Х. І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

9. **Мартыняк Р. М.** Моделирование термопружной поведінки біматеріалу з теплопроникуною міжфазною тріщиною / Р. М. Мартыняк, Х. І. Гончар // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 83–88.

10. **Мартыняк Р. М.** Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой / Р. М. Мартыняк, Х. И. Гончар // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 58–62.

11. **Мартыняк Р. М.** Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной / Р. М. Мартыняк, Х. И. Середницькая // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 50. – С. 91–98.

12. **Barber J. R.** The disturbance of a uniform steady-state heat flux by a partially conducting plane crack / J. R. Barber // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1976. – 19. – P. 956–958.

13. **El-Borgi S.** A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // Int. J. Eng. Sci. – 2004. – Vol. 42. – P. 371–393.

14. **Johnson K. L.** Contact Mechanics / K. L. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.

15. **Kuo A.-Y.** Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack / A.-Y. Kuo // ASME J. Appl. Mech. – 1990. – Vol. 57, No. 2. – P. 359–364.

16. **Lee K. Y.** Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. J. Park // Eng. Fract. Mech. – 1995. – Vol. 50, No. 4. – P. 475–482.

УДК 539.3

*Р. М. Мартыняк, д-р физ.-мат. наук,
Х. И. Середницькая, канд. физ.-мат. наук*

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Задача термоупругости для биматериальной плоскости с заполненной теплопроводной средой межфазной трещиной, термосопротивление которой зависит от ее раскрытия, сведена к нелинейной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно раскрытия трещины и скачка температуры между ее берегами. С использованием метода последовательных приближений построены алгоритмы решения этой системы для двух направлений заданного теплового потока – к материалу с большей и с меньшей термической дистортивностью. Проанализированы зависимости раскрытия трещины от теплового потока и коэффициента теплопроводности заполнителя.

Ключевые слова: межфазная трещина, теплопроводный заполнитель, нелинейная система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, итерационная процедура.

*R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Kh. I. Serednytska, PhD (Phys.-Math.)*

ANALYTICAL AND NUMERICAL ITERATIVE PROCEDURE FOR SOLVING THE THERMOELASTIC PROBLEM FOR A BIMATERIAL WITH AN INTERFACE CRACK

The thermoelastic problem for a bimaterial with an interface crack filled with a heat-conducting medium is reduced to a nonlinear system of singular integro-differential equations for a crack opening and a temperature jump between the crack edges. The thermal resistance of the crack is dependent on the crack opening. Based on the method of successive approximations, two separate numerical algorithms for solving this system are constructed for two heat flow directions (heat flows to material with larger thermal distortivity and heat flows to material with smaller thermal distortivity). The dependences of the crack opening on the heat flow and thermal conductivity of the crack filler are analyzed.

Keywords: *interfacial crack, heat-conducting filler, nonlinear system singular integro-differential equations, iterative procedure.*

Heat transfer between crack edges significantly affects on temperature and stress distributions in the material in the vicinity of the crack. Using the conditions of thermal contact of bodies through a thin layer [4], temperature fields and stresses in bodies with cracks, edges of which are in thermal contact through a crack filler, were modeled [3]. When the crack height is small, the crack filler longitudinal conductivity can be neglected. As a result, we obtain the crack model assuming heat transfer in transversal direction only. Such a crack is named as a heat-permeable crack in [6] and a partially conducting or a partially insulated crack in [12, 13, 16]. The effect of the crack filler on heat exchange between the crack edges is taken into account by thermal resistance which is directly proportional to the crack height and inversely proportional to the filler thermal conductivity. The thermoelasticity problems for bodies with cracks, thermal resistances of which are preassigned and not dependent on loading, were solved in [5, 6, 7, 12, 13, 16]. Thermal stresses in a bimaterial with an interface crack having given thermal resistance were investigated in [15].

The thermoelastic behavior of a bimaterial with an interface crack that is filled with a heat-conducting filler and thermal resistance of which depends on the crack opening and varies with thermal and mechanical loads was modeled in [9]. The corresponding thermoelasticity problem was reduced to a nonlinear system of singular integro-differential equations for the crack opening and the temperature jump between the crack edges. An approach was developed to solve this system [9]. The qualitative regularities of effect of the crack filler on thermomechanical behavior of the bimaterial were investigated for specific ranges of thermal load (imposed heat flow) and filler thermal conductivity. Further studies showed that this approach led to physically incorrect results for large values of heat flow and fillers with low thermal conductivity. In this paper, we propose iterative algorithms for solving the nonlinear thermoelastic problem for the bimaterial with the heat-permeable interface crack, thermal resistance of which depends on the crack opening,

for wide ranges of thermal and mechanical loads and the filler thermal conductivity. The efficient iteration procedure is developed on the basis of the method of successive approximations. It consists of two algorithms for solving the nonlinear system of singular integro-differential equations, each of which is devised for a specific heat flow direction. The first algorithm is devised for the case of heat flowing into the material with larger thermal distortivity and the second one for the case of heat flowing into the material with smaller thermal distortivity. The dependences of the crack opening on the heat flow and the crack filler thermal conductivity are analyzed. It is shown that the crack opening decreases, its distribution becomes more uniform along the crack and its maximum shifts from the crack center to the crack ends with decreasing thermal conductivity of the crack filler.

REFERENCES

1. **Gabdulkaev B. G.** The direct methods for solving of the singular integral equations of first kind / B. G. Gabdulkaev. – Kazan: Ed. Kazansk. University, 1994. – 288 p. (in Russian).
2. **Goldstein R. V.** Effect of Partial Closure of an Interface Crack with Heat-conducting Filler and Surface Films in the Case of Thermal Loading of a Bimaterial / R. V. Goldstein, H. S. Kit, R. M. Martynyak, Kh.I. Serednytska // *Mathematical Methods and Physico-mechanical Filds.* – 2012. – Vol. 55, No. 4. – P. 64–73. (in Ukrainian).
3. **Podstrigach Y. S.** Determination of temperature fields and stresses in the vicinity of heat-conducting cracks / Y. S. Podstrigach, G. S. Kit // *Thermal stress in the Elements of Constructions.* – 1967. – Vol. 7. – C. 194–201. (in Russian).
4. **Podstrigach Y. S.** Temperature field in the system of solid bodies conjugated with the aid of an intermediate layer / Y. S. Podstrigach // *Engineering and Physics Journal* – 1963. – Vol. 6, No 10. – C. 129–136. (in Russian).
5. **Kit G. S.** Influence of the thermal permeability of an arc-shaped crack on the thermoelastic state in its neighborhood / G. S. Kit, Yu. S. Frenchko // *Physico-chemical Mechanics of Materials.* – 1973. – Vol. 9, No 1. – C. 75–80. (in Russian).
6. **Kit G. S.** Plane problems of thermoelasticity for bodies with cracks / G.S. Kit, M.G. Krivtsun. – Kiev: Naukova Dumka, 1983. – 280 p. (in Russian).
7. **Kit G. S.** Thermoelastic state of an infinite body with a heat-conducting circular crack / G. S. Kit, O. V. Poberezhniy // *Thermal stress in the Elements of Construction.* – 1970. – No 9. – P. 78-88 (in Russian).
8. **Martynyak R.M.** Contact problems of thermoelasticity for interface cracks in bima-terials / R. M. Martynyak, Kh. I. Serednytska. – Lviv : Rastr-7, 2017. – 168 p. (in Ukrainian)
9. **Martynyak R. M.** Modelling of thermoelastic behavior of bimaterial having a heat conductive interface crack / R. M. Martynyak, Kh.I. Honchar // *Applied Problems of Mechanics and Mathematics.* – 2005. – Vol. 3. – P. 83–88. (in Ukrainian).
10. **Martynyak R. M.** The thermoelastic deformation of a bimaterial with an interfacial defect filled with a heat conducting medium / R.M. Martynyak, Kh.I. Honchar // *Theoretical and Applied Mechanics.* – 2005. – Vol. 41. – C. 58–62. (in Russian).
11. **Martynyak R. M.** The thermoelasticity of the piecewise-homogeneous solid with an interfacial heat-permeable crack / R. M. Martynyak, Kh. I. Serednytska // *Theoretical and Applied Mechanics.* – 2012. – Vol. 50. – P. 91–98. (in Russian).
12. **Barber J. R.** The disturbance of a uniform steady-state heat flux by a partially con-ducting plane crack / J.R. Barber // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1976. – 19. – P. 956–958.

13. **El-Borgi S.** A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // Int. J. Eng. Sci. – 2004. – Vol. 42. – P. 371–393.

14. **Johnson K. L.** Contact Mechanics / K.L. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.

15. **Kuo A.-Y.** Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack / A.-Y. Kuo // ASME J. Appl. Mech. – 1990. – Vol. 57, No. 2. – P. 359–364.

16. **Lee K. Y.** Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. J. Park // Eng. Fract. Mech. – 1995. – Vol. 50, No. 4. – P. 475–482.

Друкується за рекомендацією програмного комітету VI Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 25 – 28 травня 2017 р., м. Запоріжжя.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 20.03.2017