

УДК 539.374

А. М. Свитлинец

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА НА ОВАЛИЗАЦИЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Для оценки предельного состояния в технологических процессах гибки труб активно используются исследования по оваллизации поперечного сечения, которая приводит к исчерпанию несущей способности. Исследовано влияние неравномерного нагрева в окружном направлении трубы на ее предельное состояние. Полученные результаты позволяют сделать вывод о существенном влиянии неравномерности температурного поля на предельный момент.

Ключевые слова: изгиб трубы, температура, пластичность, предельное состояние, оваллизация.

Введение. В [3] впервые было показано, что длинные упругие трубы при чистом изгибе достигают предельной нагрузки в результате оваллизации поперечного сечения. Предельный момент упругопластических труб, в предположении, что оваллизация поперечного сечения является эллиптической, получен в [1]. Системный подход к решению задачи нелинейного поведения труб в рамках деформационной теории пластичности без учета удлинения в окружном направлении был разработан в [8], а процедура решения – обобщена в [4, 5, 17] для различных вариантов пространственной кинематики трубы и множества вариантов теорий пластического течения. Об экспериментах, включающих чистый изгиб неупругих оболочек, сообщалось в [10, 11, 14, 16, 18, 19]. На основании этих исследований можно прийти к заключению, что для более тонких труб предельной нагрузке предшествует бифуркационная потеря устойчивости; для более толстых труб первой достигается предельная нагрузка. Для обычно используемой стали и алюминиевых сплавов такой переход оказывается между значениями $35 < D/h < 45$, где D и h – диаметр и толщина трубы соответственно. В данной работе рассматривается влияние температурного поля на оваллизацию поперечного сечения трубы.

Изложение основного материала исследования. Теория пластического течения с комбинированным упрочнением. Для описания механического поведения материала трубы используется теория термопластического течения с комбинированным упрочнением. В основу теории закладываются следующие допущения:

– аддитивное представление приращений полной деформации $d\varepsilon$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^T,$$

где $d\varepsilon_{ij}^e, d\varepsilon_{ij}^p, d\varepsilon_{ij}^T$ – скорости упругой, пластической и температурной деформации соответственно;
– закон Гука

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E_0 g(T)} [(1+\nu)d\sigma_{ij} - \nu d\sigma_{kk} \delta_{ij}],$$

где E_0 – модуль упругости при 0°C ; ν – коэффициент Пуассона, $g(T)$ – функция, характеризующая зависимость упругого модуля от температуры. Эту зависимость зададим в виде

$$g(\vartheta) = \left\{ 1 - \vartheta \exp \left[\vartheta^* \left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \right) \right] \right\} \quad \vartheta > 0,$$

где $\vartheta = (T + 273) / (T_{nl} + 273)$ – гомологическая температура (T_{nl} – температура плавления); ϑ^* – характеристическая гомологическая температура.

Для описания пластической анизотропии воспользуемся квадратичным условием текучести Хилла [9]

$$\left[(\sigma_x - \alpha_x)^2 - (\sigma_x - \alpha_x)(\sigma_\theta - \alpha_\theta) + \frac{1}{S^2} (\sigma_\theta - \alpha_\theta)^2 \right]^{1/2} = \sigma_s(\lambda, T), \quad (1)$$

где σ_x, σ_θ – компоненты тензора напряжений; α_x, α_θ – девиатор остаточных напряжений; σ_s – предел текучести, зависящий от длины траектории пластического деформирования λ ; $S = \sigma_{\theta\theta} / \sigma_{0x}$ – параметр анизотропии, который определяется из результатов двухосных экспериментов [12];

– принцип градиентальности

$$d\varepsilon_x^p = N_x d\lambda, \quad d\varepsilon_\theta^p = N_\theta d\lambda, \quad d\varepsilon_z^p = N_z d\lambda,$$

где $d\lambda$ – пластический множитель; $N_x = \partial f / \partial \sigma_x, N_\theta = \partial f / \partial \sigma_\theta, N_z = -N_x - N_\theta$ – компоненты девиатора, определяющего направление скорости пластической деформации. Применительно к условию пластичности (1) имеем:

$$N_x = \frac{2(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_\theta - \alpha_\theta)}{2\sigma_s}, \quad N_\theta = \frac{2(\sigma_\theta - \alpha_\theta) / S^2 - (\sigma_x - \alpha_x)}{2\sigma_s},$$

$$N_z = -\frac{(\sigma_x - \alpha_x) - (2/S^2 - 1)(\sigma_\theta - \alpha_\theta)}{2\sigma_s}.$$

Остаточные напряжения α_x, α_θ возникают за счет сил сопротивления дальнедействующим препятствиям, связанным со структурой материала, и не могут быть преодолены за счет тепловой энергии поликристалла. Поэтому влияние температуры на α_x, α_θ осуществляется только через зависимость упругого модуля от температуры:

$$\alpha_x(\lambda, T) = g(T)\bar{\alpha}_x(\lambda), \quad \alpha_\theta(\lambda, T) = g(T)\bar{\alpha}_\theta(\lambda).$$

Предел текучести σ_s связан с близкоедействующими препятствиями движению дислокаций, преодолению которых может содействовать тепловая активация. В силу этого запишем

$$\sigma_s(\lambda, T) = \bar{\sigma}_s(\lambda)q(T).$$

В дальнейшем примем $q(T) = g(T)$.

Изменения параметров упрочнения $\alpha_x, \alpha_\theta, \sigma_s$ пропорциональны пластическому сомножителю $d\lambda$ и задаются следующими уравнениями эволюции:

$$d\bar{\alpha}_x = \beta_c(N_x - \alpha_c\alpha_x)d\lambda, \quad d\bar{\alpha}_\theta = \beta_c(N_\theta - \alpha_c\alpha_\theta)d\lambda, \\ d\bar{\sigma}_s = \beta(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_{\max})d\lambda,$$

где $\beta_c, \alpha_c, \beta, \sigma_{\max}$ – константы материала.

Пластический сомножитель находится из условия непрерывности $df = 0$

$$d\lambda = \frac{N_x d\sigma_x + N_\theta d\sigma_\theta}{E_p},$$

где $E_p = g(T)\beta_c[N_x(\sigma_x - \alpha_x) + N_\theta(\sigma_\theta - \alpha_\theta)] + q(T)\beta(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_{\max})$.

На основании записанных выше формул получаем определяющие соотношения:

$$d\sigma_x = \frac{e_{22}}{\Delta} E_0 g(T)(d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^T) - \frac{e_{12}}{\Delta} E_0 g(T)(d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_\theta^T); \\ d\sigma_\theta = -\frac{e_{12}}{\Delta} E_0 g(T)(d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^T) + \frac{e_{11}}{\Delta} E_0 g(T)(d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_\theta^T),$$

где

$$C_{xx} = \frac{e_{22}}{\Delta} E_0 g(T), \quad C_{x\theta} = -\frac{e_{12}}{\Delta} E_0 g(T), \quad C_{\theta\theta} = \frac{e_{11}}{\Delta} E_0 g(T), \\ e_{11} = 1 + \frac{\eta E_0 g(T) N_x^2}{E_p}, \quad e_{22} = 1 + \frac{\eta E_0 g(T) N_\theta^2}{E_p}, \\ e_{12} = \frac{\eta E_0 g(T) N_\theta N_x}{E_p} - \nu, \quad \Delta = e_{11}e_{22} - e_{12}^2.$$

Здесь η – параметр, который равен единице в пластическом состоянии ($f = 0, d\lambda > 0$), и нулю – в упругом состоянии ($f < 0$ или $f = 0, d\lambda = 0$).

Для конкретизации определяющих соотношений необходимо задать константы материала $E, \nu, \beta_c, \beta, \bar{\sigma}_{\max}, S, \mathcal{G}_*$.

Постановка задачи. Рассмотрим чистый изгиб длинной круговой трубы радиуса R с толщиной стенки h при заданном изменении кривизны κ и переменном температурном поле, определенному по закону:

$$T = \begin{cases} T_0 + (T_{\max} - T_0) \frac{\theta - \theta_1}{\pi - \theta_1} & \pi \geq \theta \geq \pi - \theta_1 \\ T_0 & \pi - \theta_1 \geq \theta \geq 0 \end{cases},$$

где T_0, T_{\max} – минимальная и максимальная температура соответственно; θ, θ_1 – углы (рис. 1).

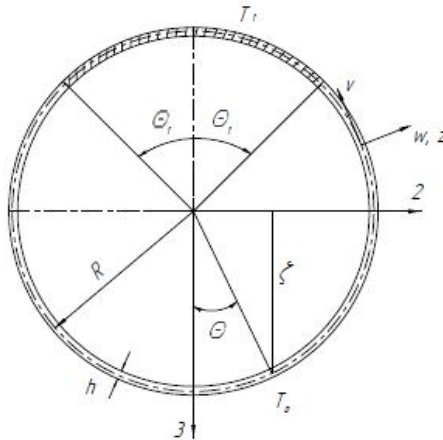


Рис. 1 – Геометрия трубы

Для решения задачи воспользуемся подходом, описанным в [15]. Осевую и окружную деформации (рис. 1) представим в виде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \bar{\zeta} \bar{\kappa}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \bar{z} \bar{\kappa}_\theta, \quad (2)$$

$$\bar{\zeta} = [(1.0 + \bar{w}) \cos \theta - \bar{v} \sin \theta + \eta_0 \bar{z} \cos \theta], \quad (3)$$

где ε_x^0 – деформация оси трубы, $\bar{z} = z/h, \bar{w} = w/R, \bar{v} = v/R, \eta_0 = h/R, \bar{\zeta} = \zeta/R, \bar{\kappa} = R\kappa$.

Мембранная составляющая ε_θ^0 деформации и локальная кривизна κ_θ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_\theta^0 = \bar{v}' + \bar{w} + \frac{1}{2}(\bar{v}' + \bar{w})^2 + \frac{1}{2}(\bar{v} - \bar{w}')^2, \quad \bar{\kappa}_\theta = \frac{\eta_0 (\bar{v}' - \bar{w}'')}{\left[1.0 - (\bar{v} - \bar{w}')^2\right]^{1/2}}. \quad (4)$$

Здесь $(\cdot)' = d(\cdot) / d\theta$, $(\cdot)'' = d^2(\cdot) / d\theta^2$.

Воспользуемся принципом возможных перемещений в скоростях применительно к поставленной задаче

$$2R \int_0^\pi \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\sigma}_x \delta \dot{\varepsilon}_x + \dot{\sigma}_\theta \delta \dot{\varepsilon}_\theta) dz d\theta = 0,$$

где точка над переменной обозначает производную по времени.

С учетом определяющих соотношений запишем:

$$\int_0^\pi \int_{-h/2}^{h/2} [C_{xx} \dot{\varepsilon}_x \delta \dot{\varepsilon}_x + C_{x\theta} (\dot{\varepsilon}_\theta \delta \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x \delta \dot{\varepsilon}_\theta) + C_{\theta\theta} \dot{\varepsilon}_\theta \delta \dot{\varepsilon}_\theta] dz d\theta = 0, \quad (5)$$

или с учетом (2), (3):

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^0 + \bar{z} \dot{\bar{\kappa}}_\theta, \quad \dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_x^0 + \dot{\bar{\zeta}} \bar{\kappa} + \bar{\zeta} \dot{\bar{\kappa}}, \quad \dot{\bar{\zeta}} = [\dot{w} \cos \theta - \dot{v} \sin \theta].$$

Примем следующие выражения для перемещений и осевой деформации ε_x^0 :

$$\varepsilon_x^0 = q_1, \quad \bar{v} \approx \sum_{n=2}^N q_n \sin n\theta, \quad \bar{w} \approx \left[\sum_{n=1}^N q_{n+N} \cos n\theta + q_{2N+1} \right].$$

Тогда для их скоростей и производных по θ можем записать соответственно:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x^0 &= \dot{q}_1, \quad \dot{\bar{v}} \approx \sum_{n=2}^N \dot{q}_n \sin n\theta, \quad \dot{\bar{v}}' \approx \sum_{n=2}^N n \dot{q}_n \cos n\theta, \\ \dot{\bar{w}} &\approx \sum_{n=1}^N \dot{q}_{n+N} \cos n\theta + \dot{q}_{2N+1}, \quad \dot{\bar{w}}' \approx - \sum_{n=1}^N n \dot{q}_{n+N} \sin n\theta, \\ \dot{\bar{w}}'' &\approx - \sum_{n=1}^N n^2 \dot{q}_{n+N} \cos n\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), выразим скорости деформаций через \dot{q}_n :

$$\dot{\varepsilon}_x = a_0 \ddot{\bar{k}} + \sum_{n=1}^{2N+1} a_n \dot{q}_n, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \sum_{n=1}^{2N+1} b_n \dot{q}_n, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= (1.0 + \bar{w} + \eta_0 \bar{z}) \cos \theta - \bar{v} \sin \theta, \quad a_1 = 1, \\ a_n &= -\bar{k} \sin \theta \sin n\theta, \quad n = 2 \div N, \\ a_n &= \bar{k} \cos \theta \cos(n - N)\theta, \quad n = N + 1 \div 2N, \\ a_{2N+1} &= \bar{k} \cos \theta, \quad b_1 = 0, \\ b_n &= \left\{ 1.0 + \bar{v}' + \bar{w} + \frac{\eta_0 \bar{z}}{[1.0 - (\bar{v} - \bar{w}')^2]^{1/2}} \right\} n \cos n\theta + \\ &+ \left\{ \bar{v} - \bar{w}' + \frac{\eta_0 \bar{z} (\bar{v} - \bar{w}') (\bar{v}' - \bar{w}'')}{[1.0 - (\bar{v} - \bar{w}')^2]^{3/2}} \right\} \sin n\theta, \quad n = 2 \div N, \\ b_n &= \left\{ 1.0 + \bar{v}' + \bar{w} + \frac{\eta_0 \bar{z} (n - N)^2}{[1.0 - (\bar{v} - \bar{w}')^2]^{1/2}} \right\} \cos(n - N)\theta + \\ &+ \left\{ \bar{v} - \bar{w}' + \frac{\eta_0 \bar{z} (\bar{v} - \bar{w}') (\bar{v}' - \bar{w}'')}{[1.0 - (\bar{v} - \bar{w}')^2]^{3/2}} \right\} (n - N) \sin(n - N)\theta, \\ &n = N + 1 \div 2N, \quad b_{2N+1} = 1.0 + \bar{v}' + \bar{w}. \end{aligned}$$

Подставляя (7) в уравнение принципа возможных перемещений (5), и, учитывая независимость вариаций $\delta \dot{q}_n$, приходим к системе $2N + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно \dot{q}_n , $n = 1 \div (2N + 1)$ следующего вида

$$\sum_{k=1}^{2N+1} A_{nk} \dot{q}_k = B_n, \quad (8)$$

где

$$B_n = \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} a_0 (C_{xx} a_n + C_{x\theta} b_n) d\bar{z} d\theta;$$

$$A_{kn} = \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} [C_{xx} a_n a_k + C_{x\theta} (a_n b_k + b_n a_k) + C_{\theta\theta} b_n b_k] d\bar{z} d\theta.$$

Решение системы уравнений (8) строилось методом Эйлера.

Используя результаты для перемещений, деформаций и напряжений на каждом шаге по времени, можно оценить осевое усилие и изгибающий момент по формулам:

$$P = 2Rh \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x d\bar{z} d\theta, \quad \bar{M} = \frac{1}{2\sigma_0} \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x \bar{\zeta} d\bar{z} d\theta. \quad (9)$$

В приведенных выше формулах интегрирование проводится численно. Промежуток интегрирования $[-1/2, 1/2]$ разбивается на m , а промежуток $[0, \pi]$ на n интервалов, и интегрирование, в пределах каждого образованного промежутка, ведется с использованием квадратных формул Гаусса. При расчетах принималось 2 интервала по толщине и 4 на промежутке $[0, \pi]$. Результаты расчетов приведены в табл. 1, где использованы следующие обозначения: $\Delta = |w(0) + w(\pi)| / R$ – оваллизация поперечного сечения; T_0, T_1 – температура нагрева отдельных участков трубы (рис. 1), $M_0 = \sigma_0 4R^2 h$, $\kappa_0 = h / (4R^2)$.

Таблица 1 – Зависимость оваллизации от распределения температуры

$1 - 2\theta_1 / \pi$	κ / κ_0	M / M_0	Δ	T_0	T_1
0	0,26	0,558	0,031	20	400
0,5	0,28	0,569	0,035		
0,6	0,26	0,573	0,027		
0,7	0,26	0,576	0,027		
0,8	0,29	0,578	0,039		
0,9	0,29	0,578	0,039		
1	0,29	0,58	0,039		

Как следует из полученных результатов, с ростом θ_1 от 0 до $\pi/2$ предельный момент и оваллизация уменьшаются.

Выводы. Исследовано влияние неравномерного нагрева в окружном направлении трубы на ее предельное состояние. Для описания деформации трубы использовалась теория оболочек для малых деформаций и конечных перемещений, а для описания механического поведения материала трубы – теория термопластического течения с комбинированным упрочнением. В этих соотношениях модуль упругости, предел текучести и остаточные напряжения зависят от температуры.

Применение принципа возможных перемещений в скоростях и использование представления перемещений в виде ряда по синусам и косинусам позволило свести задачу оваллизации к системе дифференциальных уравнений первого порядка, которая была решена методом Эйлера.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о существенном влиянии неравномерности температурного поля на предельный момент.

Перспективы дальнейшего развития данного направления могут быть связаны с исследованием неравномерности оваллизации поперечного сечения вдоль длины трубы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Ades C. S.** Bending strength of tubing in the plastic range // J. Aeronaut. Sci. 1957. Vol. 24. P.605.
2. **Armstrong P. J., Frederick C. O.** 1966. A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
3. **Brazier L. G.** On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections // Proc. R. Soc. 1927. A116. P. 104.
4. **Bushnell D.** Elastic-plastic bending and buckling of pipes and elbows // Comput. Struct. 1981. Vol. 13. P. 241.
5. **Calladine C. R.** Plastic buckling of tubes in pure bending // Proc. IUTAM Conf. on Collapse (Edited by G. W. Hunt and J. M. T. Thompson). London, U.K. — 1983.). —P.111.
6. **Chen J., Young B., Uy B.** Behavior of High Strength Structural Steel at Elevated Temperatures // Journal of Structural Engineering. 2006. Vol. 132(12). P. 1948–1954. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.
7. **Corona E., Lee L.-H., Kyriakides S.** Yield anisotropy effects on buckling of circular tubes under bending // Journal of Structural Engineering. 2006. Vol. 43. P. 7099–7118.
8. **Gellin S.** The plastic buckling of long cylindrical shells under pure bending // Int. J. Solids Structures. 1980. Vol. 10. P. 397.
9. **Hill R.** The Mathematical Theory of Plasticity // Oxford University Press, Oxford. — 1950. Vol. 20. P. 115.
10. **Jirsa J. E., Lee F. H., Wilhoit J. C., Merwin J. E.** Ovaling of pipelines under pure bending // OTC 1569. Proc. Offshore Tech. Conf. 1972. Vol. 1. P. 573.
11. **Korol R. M.** Critical buckling strains of round tubes in flexure // Int. J. Mech. Sci. — 1979. Vol. 21. P. 719.
12. **Kyriakides S., Yeh, M.-K.** Plastic anisotropy in drawn metal tubes // ASME J. Eng. Industry. 1988. Vol. 110. P.303–307.
13. **Kyriakides S., Ju. G. T.** Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending: Part I Experiments // Int. J. Solids Struct. 1992. Vol.29. P.1117–1142.
14. **Kyriakides S., Shaw P. K.** Inelastic buckling of tubes under cyclic loads // ASME J. Press. Vessel Technol. 1987. Vol. 109. P.169.
15. **Moore R. L., Clark J. W.** Torsion, compression, and bending of tubular sections machined from 755-T6 rolled round rod // NACA RM 52125. 1952. Vol. 7. P. 132.
16. **Reddy B. D.** An experimental study of the plastic buckling of circular cylinders in pure bending // Int. J. Solids Structures. 1979. Vol. 15. P. 669.
17. **Shaw P. K., Kyriakides S.** Inelastic analysis of thin-walled tubes under cyclic bending // International Journal of Solids and Structures. 1985. Vol. 1073. P. 256.
18. **Sherman D. R.** Tests of circular steel tubes in bending // ASCEJ. Struct. Div. 1976. Vol. 102. Iss. 11. P.2181–2195.
19. **Tuggu P., Schroeder J.** Plastic deformation and stability of pipes exposed to external couples // Int. J. Solids Structures. 1979. Vol.15. P.643.

Г. М. Світлинець

ВПЛИВ НЕРІВНОМІРНОГО НАГРІВУ НА ОВАЛІЗАЦІЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ ТРУБИ ПРИ ЧИСТОМУ ВИГІНІ

Для оцінки граничного стану в технологічних процесах гнуття труб активно використовуються дослідження овалізації поперечного перерізу, яка призводить до вичерпання несучої здатності. Досліджено вплив нерівномірного нагрівання в окружному напрямку труби на її граничний стан. Отримані результати дозволяють зробити висновок про суттєвий вплив нерівномірності температурного поля на граничний момент.

Ключові слова: вигин труби, температура, пластичність, граничний стан, овалізація.

H. M. Svitlynets

INFLUENCE OF UNEVEN HEATING ON THE OVALIZATION OF AN ELASTOPLASTIC PIPE CROSS-SECTION UNDER PURE BENDING CONDITIONS

Researches for cross-sectional ovalization are actively used to evaluate the critical state in the processes of bending pipes, which leads to the exhaustion of the bearing capacity. In the present article it is investigated the influence of uneven heating in the circumferential direction of the pipe on its critical state. This question has not previously been investigated in known publications. The obtained results make it possible to draw a conclusion on the significant effect of temperature unevenness on the critical moment.

Keywords: pipe bending, temperature, plasticity, limiting state, ovalization.

In [3], it was shown for the first time that the behavior of long elastic tubes under pure bending conditions reaches the limiting load due to the ovalization of pipe cross-section. The critical moment of the elastoplastic pipes was obtained in [1], with the assumption that the ovalization of the cross-section is elliptic. The system approach to the solution of the problem of nonlinear behavior of the tube in the framework of the deformation theory of plasticity without taking into account the extension in the circumferential direction was developed in [8]. This procedure of the solution was generalized in [17, 4, 5] for various variants of the spatial kinematics of the tube and many variants of theories of plastic flow. In the present paper, we investigate the influence of the temperature field on the ovalization of pipe cross-section.

To describe the mechanical behavior of the pipe material we used flow thermoplastic theory with combined hardening. In these relations, the modulus of elasticity, yield strength and residual stresses depend on the temperature.

To describe tube deformation we use shell theory for small deformations and finite displacements.

It is applied the principle of possible displacements in speeds. Using the representation of displacements in the form of sines and cosines series, one

can obtain system of linear equations with respect to the rates of change in the coefficients of the expansion. Solving this system, one can obtain system of first-order differential equations, which can be solved by the Euler method.

The obtained results make it possible to conclude that there is a significant effect of the temperature unevenness at the critical moment.

REFERENCES

1. **Ades C. S.** Bending strength of tubing in the plastic range // J. Aeronaut. Sci. 1957. Vol. 24. P.605.
2. **Armstrong P. J., Frederick C. O.** 1966. A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
3. **Brazier L. G.** On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections // Proc. R. Soc. 1927. A116. P. 104.
4. **Bushnell D.** Elastic-plastic bending and buckling of pipes and elbows // Comput. Struct. 1981. Vol. 13. P. 241.
5. **Calladine C. R.** Plastic buckling of tubes in pure bending // Proc. IUTAM Conf. on Collapse (Edited by G. W. Hunt and J. M. T. Thompson). London, U.K. – 1983.). –P.111.
6. **Chen J., Young B., Uy B.** Behavior of High Strength Structural Steel at Elevated Temperatures // Journal of Structural Engineering. 2006. Vol. 132(12). P. 1948–1954. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.
7. **Corona E., Lee L.-H., Kyriakides S.** Yield anisotropy effects on buckling of circular tubes under bending // Journal of Structural Engineering. 2006. Vol. 43. P. 7099–7118.
8. **Gellin S.** The plastic buckling of long cylindrical shells under pure bending // Int. J. Solids Structures. 1980. Vol. 10. P. 397.
9. **Hill R.** The Mathematical Theory of Plasticity // Oxford University Press, Oxford. – 1950. Vol. 20. P. 115.
10. **Jirsa J. E., Lee F. H., Wilhoit J. C., Merwin J. E.** Ovaling of pipelines under pure bending // OTC 1569. Proc. Offshore Tech. Conf. 1972. Vol. 1. P. 573.
11. **Korol R. M.** Critical buckling strains of round tubes in flexure // Int. J. Mech. Sci. – 1979. Vol. 21. P. 719.
12. **Kyriakides S., Yeh, M.-K.** Plastic anisotropy in drawn metal tubes // ASME J. Eng. Industry. 1988. Vol. 110. P.303–307.
13. **Kyriakides S., Ju. G. T.** Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending: Part I Experiments // Int. J. Solids Struct. 1992. Vol.29. P.1117–1142.
14. **Kyriakides S., Shaw P. K.** Inelastic buckling of tubes under cyclic loads // ASME J. Press. Vessel Technol. 1987. Vol. 109. P.169.
15. **Moore R. L., Clark J. W.** Torsion, compression, and bending of tubular sections machined from 755-T6 rolled round rod // NACA RM 52125. 1952. Vol. 7. P. 132.
16. **Reddy B. D.** An experimental study of the plastic buckling of circular cylinders in pure bending // Int. J. Solids Structures. 1979. Vol. 15. P. 669.
17. **Shaw P. K., Kyriakides S.** Inelastic analysis of thin-walled tubes under cyclic bending // International Journal of Solids and Structures. 1985. Vol. 1073. P. 256.
18. **Sherman D. R.** Tests of circular steel tubes in bending // ASCEJ. Struct. Div. 1976. Vol. 102. Iss. 11. P.2181–2195.
19. **Tuggu P., Schroeder J.** Plastic deformation and stability of pipes exposed to external couples // Int. J. Solids Structures. 1979. Vol.15. P.643.