

УДК 539.3

Р. А. Искандеров д-р мат. наук, Р. К. Алимamedов

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВРЕЖДЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной анизотропной поврежденной цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего давления. Используется вариационный принцип Остроградского – Гамильтона. Поверхностные нагрузки, действующие со стороны вязкой жидкости на поперечно подкрепленную оболочку, определяются из решений линеаризованного уравнения Навье – Стокса. С использованием контактных условий построено частотное уравнение, которое реализовано численно. Построены характерные кривые.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, частота колебаний, вариационный принцип, повреждаемость, статическая и динамическая сила, подкрепление.

Введение. Надежный расчет цилиндрической оболочки, контактирующей со средой на длительную прочность предполагает учет образующихся и накапливающихся дефектов и влияния внешней сред и сил. При периодичности напряжения этот учет носит усложненный характер, связанный с так называемым процессом «залечивания» дефектов. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведения подкрепленных поврежденных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и параметрических колебаний, а также выборы рациональных параметров конструкции, контактирующей с вязкой жидкостью, являются актуальными задачами.

Отметим, что в [4] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. Расчет частот свободных колебаний выполнен на основании метода Рэлея – Ритца. Результаты вычислений представлены в виде зависимостей частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки. В [2] исследованы свободные колебания, усиленной продольными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндриче-

ской оболочки из стеклопластика с протекающей жидкостью. В [6, 8] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний подкрепленной различными ребрами цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье с протекающей жидкостью. Предполагается, что кольцевые ребра укреплены на внешней поверхности обшивки, размещены на равных расстояниях и имеют одинаковые геометрические и механические характеристики. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимостей от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика и от скорости протекающей жидкости при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки.

В [9, 10] с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью под действием внешнего давления $q = q_0 + q_1 \sin \omega_* t$ (где q_0 – средняя или основная нагрузка, q_1 – амплитуда изменения нагрузки, ω_* – частота ее изменения). На основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона, построена система дифференциальных уравнений относительно амплитуды перемещений поперечно подкрепленной поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью, которое реализовано численно. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье – Стокса. Предполагается, что ось упругой симметрии материала оболочки совпадает с координатными осями.

Исследованию собственных частот колебаний шарнирно-опертой по краям круговой замкнутой цилиндрической оболочки, усиленной регулярной системой продольных и поперечных ребер со сплошным наполнителем посвящена [7]. Оболочка моделируется как конструктивно-ортотропная, а ее движение описывается системой уравнений в перемещениях.

Одной из экспериментально подтвержденных теорий повреждаемости является наследственная теория повреждаемости, разработанная для сложнапряженного состояния в [2, 3]. Согласно этой теории определяющее уравнение для однородного тела (\bar{x} -вектор-координата точки тела) записывается в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij},$$

где E – модуль Юнга; M^* – интегральные операторы наследственного типа, описывающие процессы повреждаемости, и для которых имеют место представления

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь $M(\bar{x}, t - \tau)$ – ядро повреждаемости; $(t_k^-; t_k^+)$ – интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости; $f(t_k^+)$ – функция «залечивания» дефектов, зависящая от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значение $f(t_k^+) = 0$ соответствует полному «залечиванию» дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения $f(t_k^+) = 1$ отсутствию самого эффекта «залечивания» дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичного «залечивания» дефектов. Для определения интервалов $(t_k^-; t_k^+)$ необходимо задавать специальные условия. Их удобно формулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условия её работы и видов нагружения. В данной работе подобные условия будут сформулированы ниже.

Постановка задачи. Рассмотрим поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщины $2h$, длины ℓ , заполненную вязкоупругой жидкостью. Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены, т.е. при $x = 0; \ell$ имеет место:

$$N_{xx} = 0; \quad M_{xx} = 0; \quad w = 0; \quad v = 0,$$

где N_{xx} – осевое усилие; M_{xx} – изгибающий момент; w, v – компоненты вектора перемещения точки оболочки-прогиба и радиального перемещения соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского – Гамильтона. Согласно этому принципу истинные траектории отличаются от других возможных траекторий тем, что для первых должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь под K понимается кинетическая энергия системы; под Π – потенциальная энергия системы; $[t_0, t_1]$ – отрезок времени, в котором происходит процесс движения.

Принимается, что напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа – Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края панели, лежат в одной координатной плоскости.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_j, ϑ_j, w_j для j -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также, вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \vartheta_j(x) = \vartheta(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y). \end{aligned}$$

Здесь $h_j = 0,5h + H_j^1$; h – толщина оболочки; H_j^1 – расстояния от осей j -го поперечного стержня до поверхности оболочки; φ_j, φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений кольцевых ребер.

Полная энергия упругой деформации ортотропной продольно подкрепленной повреждающейся цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12} + \right. \\ &+ N_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{22} d\tau \right) + \\ &+ N_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{12} d\tau \right) - \\ &- M_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{11} d\tau \right) - \\ &- M_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{22} d\tau \right) - \\ &- M_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{12} d\tau \right) \left. \right\} dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \tilde{G}_j J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_j F_j \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dy + \\
& + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy - \\
& - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y \vartheta + (q_z + q) w) dx dy,
\end{aligned}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки; u, v, w – составляющие перемещения точек срединной поверхности оболочки; x_1, x_2 – координаты криволинейных краев оболочки; $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения j -го поперечного стержня относительно оси Oz , оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_j, \tilde{G}_j – модули упругости и сдвига материала j -го продольного стержня, t – временная координата; $t_i = \omega_i t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_i}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$, ρ_0, ρ_i – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка и i -й продольный стержень, соответственно; q_x, q_y, q_z – компоненты вектора давления, действующего со стороны вязкой жидкости; k_2 – количество поперечных ребер.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz \quad (5)$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = B_{66}\chi_{12}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолкна и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\
B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\
B_{26} &= 1/2 (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\
B_{16} &= 1/2 (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi,
\end{aligned}$$

где $b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{66}$ – основные модули упругости ортотропного материала; φ – угол, образуемый направлением стекловолокон в окружном направлении.

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}; \quad \sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}\sigma_{12} = B_{66}\varepsilon_{12}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Поверхностные нагрузки q_x, q_y, q_z , действующие со стороны вязкой жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяются из решения линеаризованного уравнения Навье – Стокса

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a^2} q \text{grad} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{v}, \quad (7)$$

где $\bar{\mu}$ – динамический коэффициент вязкости; p – давление в некоторой точке жидкости; ρ_0 – плотность жидкости; a – скорость звука в жидкости; ∇^2 – оператор Лапласа; $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости произвольной точки жидкости.

На контактной поверхности оболочка – вязкая жидкость ($r=R$) выполняются условия:

$$q_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad q_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad q_r = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (8)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta}, \quad q_z = -p, \quad (9)$$

где силы вязкости определяются равенствами:

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \quad (10)$$

Уравнение (9) с помощью уравнения неразрывности и уравнения состояния переходит к уравнению относительно p :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (11)$$

Решение задачи. Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = A(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi; \vartheta = B(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi; w = C(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad (12)$$

где A, B, C – неизвестные функции.

Эти функции для частот, лежащих вблизи $\omega/\omega_1=1/2$, примем в виде:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \\ B(t) &= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \\ C(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (11) после разделения переменных имеет вид

$$p = p_0 J(\lambda r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega t. \quad (14)$$

Дополняя контактными условиями (8), (9) полную энергию системы (4) уравнений движения жидкости (7), приходим к контактной задаче о параметрических колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной поперечными системами ребер и заполненной вязкой жидкости. Другими словами, задача о параметрических колебаниях подкрепленной поперечными системами ребер ортотропной оболочки с вязкой жидкостью сводится к совместному интегрированию полной энергии системы и уравнений движения жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (4) – (6), (16) и (12) – (14) и (2) задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}B_1 + a_{i4}B_2 + a_{i5}C_1 + a_{i6}C_2 = 0 \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (15)$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{i6}$ ($i=1,2,3,\dots,6$) имеют громоздкий вид, поэтому не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (15) шестого порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя J_n

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \quad (16)$$

Отметим, что при $\bar{\mu} = 0$ уравнение (16) переходит к частотному уравнению параметрических колебаний поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью.

Результаты численного анализа. Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты [1]:

$R = 0,16 \text{ м}; h = 0,00045 \text{ м}; \nu_2 = 0,19; \nu_1 = 0,11; l = 0,8 \text{ м}; \rho / \rho_0 = 0,105,$
 $\xi_1 = 1; \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2; \nu = 0,3; h_j = 1,39 \text{ мм}; F_j = 5,75 \text{ мм}^2;$
 $J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; a_* = 1350 \text{ м / сек}; \bar{\mu} = 10,02 \text{ кг / (сек.м)}.$

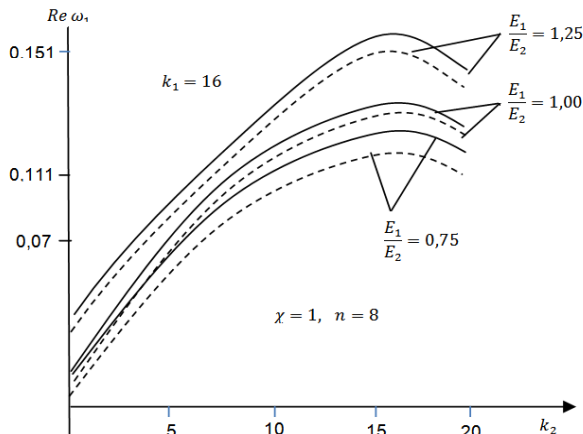


Рис. 1 – Зависимость параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. На них приведены зависимость параметра частоты от числа поперечных стержней k_2 для различных отношений модулей упругости материала оболочки и от угла намотки φ для различных отношений R/L .

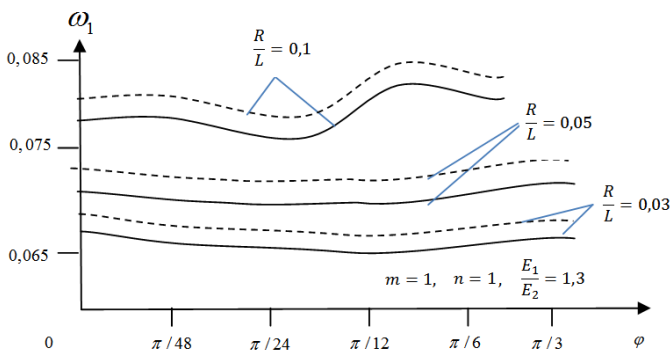


Рис. 2 – Зависимость параметра частоты колебаний от угла намотки φ

На рис. 1 и рис 2 штриховым линиям соответствуют параметры для поврежденной оболочки, сплошным линиям – оболочки без повреждений. Приведенные зависимости показывают, что учет повреждаемости мате-

риала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. Кроме того, с увеличением отношений E_1/E_2 частоты собственных колебаний системы увеличиваются.

С увеличением количества поперечных ребер частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем, при определенных значениях k_1 , инерционные воздействия стержней на процесс колебаний системы становятся существенными.

Рис. 2 показывает, что при малых значениях отношений R/L собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки φ . С увеличением отношения R/L зависимости собственной частоты колебаний от угла намотки φ носят сложный характер.

Выводы. С помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной анизотропной поврежденной цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего давления. Построены кривые зависимости параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней и от угла намотки. Уточнено влияние повреждаемости на частоты колебаний системы. Учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. С увеличением отношений модулей упругости материала оболочки частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер, частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем, при определенных его значениях начинают уменьшаться. При малых значениях отношений радиуса оболочки к ее длине собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки. С увеличением этого отношения, зависимости собственных частот колебаний системы от угла намотки носит сложный характер.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Алыев Ш. Ш.** Свободные колебания усиленных продольными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, с протекающей жидкостью // Теоретическая и прикладная механика. Баку. 2014. № 1-2. С.136–142.
2. **Ахундов М. Б., Гулиев Р.** С Распространение ударной волны в повреждающемся наследственно упругом цилиндрическом теле // Тр. ИММ АН Азербайджан. 1997. Т. IV(XIV). С. 208–212.
3. **Ахундов М. Б., Суворова Ю. В, Садыхов Ф. М.** Распространение волн деформаций и напряжений в кусочно однородном вязкоупругом стержне конечной длины с учетом повреждаемости материала // Изв. РАН, МТТ. 1994. №5. С. 113–120.
4. **Босяков С. М., Чживэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. НАН Белоруссии. 2011. № 3 (10). С. 24–27.
5. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. **Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Алыев Ш. Ш.** Свободные колебания усиленных поперечными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стек-

лопластика, с протекающей жидкостью // Пробл. вычислит. механики и прочности конструкций. 2015. Вып.24. С.123–130.

7. **Latifov F. S., Cafarova I. T.** Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells strengthened by annular ribs // Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences. 2005. T. X. No 4. P.135–140.

8. **Latifov F. S., Iskenderov R. A., Aliyev Sh. Sh.** Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs // Int.nat. J. on Technical and Physical Problems of Engineering. 2015. Iss. 24. Vo. 7. No 3. P. 63–67.

9. **Latifov F. S., Iskenderov R. A., Alimamedov R. K.** Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell // Int. J. on Technical and Physical Problems of Engineering.2015. Vol. 7. No 4. P. 70–74.

10. **Latifov F. S., Seifullaev F. A., Alyev Sh. Sh.** Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57. No. 4. P. 709–713.

УДК 539. 3

R. A. Iskanderov, д-р мат. наук, Р. К. Алімамедов

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОПЕРЕЧНО ПІДКРІПЛЕНОЇ АНИЗОТРОПНОЇ ПОШКОДЖЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ, ЗАПОВНЕНОЇ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Розв'язана задача про параметричні коливання поперечно підкріпленої анізотропної пошкодженої циліндричної оболонки зі склопластику з в'язкою рідиною під дією зовнішнього тиску. Застосовується варіаційний принцип Остроградського – Гамільтона. Поверхневі навантаження, що діють з боку в'язкої рідини на поперечно підкріплену оболонку визначаються з розв'язків лінійаризованого рівняння Нав'є – Стокса. З використанням контактних умов побудоване і реалізовано чисельно частотне рівняння. Побудовані характерні криві.

Ключові слова: циліндрична оболонка, в'язка рідина, частота коливань, варіаційний принцип, пошкоджуваності, статична і динамічна сила, підкріплення.

UDC 539.3

R. A. Iskanderov, Dr. Sci. (Math.), R. K. Alimamedov

PARAMETRIC VIBRATIONS OF TRANSVERSELY STRENGTHENED, ANISOTROPIC, DAMAGED, VISCOUS FLUID-FILLED CYLINDRICAL SHELL MADE OF GLASS-REINFORCED PLASTIC

In the present article, using the variational principle, the problem of the parametric oscillation of a transversely reinforced, anisotropic, damaged cylindrical shell of fiberglass with a viscous liquid under the action of external pressure is solved. To solve this problem, the Ostrogradskii – Hamilton variational principle is applied. Surface loads acting on the side of a viscous fluid on a transversely supported shell are determined from the solutions of the linearized Navier – Stokes equation. Using the contact conditions, a frequency equation is constructed and implemented numerically. Characteristic curves are constructed.

Keywords: cylindrical shell, viscous liquid, vibration frequency, variational principle, damageability, static and dynamic force, reinforcement.

In the paper, by means of the variational principle we solve a problem on parametric vibrations of a laterally strengthened, anisotropic, damaged, viscous fluid-filled cylindrical shell made of glass-reinforced plastic under the action of external pressure $q = q_0 + q_1 \sin \omega_1 t$ (where q_0 is the average or main load, q_1 is the amplitude of load change, ω_1 is the frequency of its change). Surface loads acting from viscous fluid on laterally strengthened shell, are determined from the solutions of the Navier – Stocks linearized equation. Damageability of the cylindrical shell made of glass-reinforced plastic is taken into account by means of the hereditary theory of damageability. It is accepted that the stress-strain state of the cylindrical shell can be completely determined within linear theory of elastic thin shells, based on Kirchhoff-Love conjectures, while for calculation of ribs the theory of Kirchhoff-Klebsh curvilinear bars is applicable. The system of coordinates is chosen so that the coordinate lines coincide with the lines of the principal curvature of the shell's median surface. It is accepted that the ribs are located along the coordinate lines, and their edges as the edges of the panel, lie on the same coordinate plane.

The Ostrogradsky – Hamilton variational principle is used for solving the stated problem. According to this principle, the true trajectories differ from other possible trajectories so that for the first ones the following condition should be fulfilled

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0.$$

Here under K one understands kinetic energy of the system, under Π the potential energy of the system, $[t_0, t_1]$ is time interval in which the process of movement occurs. The studied problem on parametric vibrations of a viscous-fluid-filled orthotropic shell strengthened with the lateral systems of ribs is reduced to joint integration of total energy of the system and fluid motion equations subjected to mentioned conditions on their contact surface. The frequency equation was constructed and numerically realized. Characteristic dependence curves were constructed. Account of damageability of the shell material reduces to reduction of frequencies of the system's natural vibrations compared to the case when an undamaged shell is considered. As the ratio of modulus of elasticity of the shell material increases, the frequencies of the system's natural vibrations increase. When the amount of the lateral ribs increases, the frequencies of the system's natural vibrations at first increase, and then at its certain values they began to decrease. As small values of the ratio of the shell radius to its length, natural frequencies of system vibrations weakly depend on the winding angle. With the increase in this ratio the dependence of the natural frequencies of the system vibrations on the winding angle has a complicated character.

REFERENCES

1. **Alyev Sh. Sh.** Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with longitudinal systems of ribs // *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Baku. 2014. №1-2. P. 136–142. (in Russian)
2. **Akhundov M. B., Guliyev R. S.** Propagation of impact wave in damaged hereditary elastic cylindrical body // *Trudy IMM AN Azerb.* 1997. Vol. IV(XIV). P. 208–212. (in Russian).
3. **Akhundov M. B., Suvorova Yu. V., Sadykhov F. M.** Propagation of stress and strain waves in piecewise homogeneous bar of finite length with regard to material damageability // *Isv. RAN, MTT.* 1994. No 5. P. 113–120. (in Russian).
4. **Bosyakov S. M., Chziway V** Analysis of free oscillations of a cylindrical shell made of glass-reinforced plastic at boundary conditions // *Mekhanika mashin mekhanizmov i materialov International scientific-engineering journal. Institute of machine building, NAN Belarusi.*-No 3(10) P. 24–27. (in Russian).
5. **Volmir A. S.** Shells in fluid and gas flow. M.: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).
6. **Latifov F. S., Iskenderov R. A., Alyev Sh. Sh.** Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with lateral systems of ribs // *Problem of computational mechanics and strength of structures.* 2015. Iss. 24. P.123–130. (in Russian).
7. **Latifov F. S., Cafarova I. T.** Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells sellaaaytb by annular ribs // *Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences.* 2005. T. X. No 4. P.135–140.
8. **Latifov F. S., Iskenderov R. A., Aliyev Sh. Sh.** Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs // *Int.nat. J. on Technical and Physical Problems of Engineering.* 2015. Iss. 24. Vo. 7. No 3. P. 63–67.
9. **Latifov F. S., Iskenderov R. A., Alimamedov R. K.** Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell // *Int. J. on Technical and Physical Problems of Engineering.*2015. Vol. 7. No 4. P. 70-74.
10. **Latifov F. S., Seifullaev F. A., Alyev Sh. Sh.** Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2016. Vol. 57. No. 4. P. 709–713.

*Азербайджанський
архітектурно-будівельний
університет,
Баку, Азербайджан*

Надійшла до редколегії 29.10.2018