

УДК 534.2; 519.62

*Н. С. Голоскубова, Ю. В. Михлин, д-р физ.-мат. наук,
Н. А. Кириллова, канд. тех. наук*

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕГУЩИХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДНК ПЕЙРАРА – БИШОПА

Рассматриваются бегущие волны в модели Пейрара — Бишопа, описывающей динамику молекулы ДНК. Устойчивость бегущих волн в этой системе исследуется в рамках длинноволнового приближения с использованием уравнений в вариациях и последующим применением метода алгебраизации по Айнсу. В результате уравнения в вариациях преобразуются к уравнениям с особыми точками. Для построения границ областей устойчивости / неустойчивости в пространстве параметров системы используются степенные ряды. Полученные результаты иллюстрируются численным моделированием с использованием метода Рунге – Кутты.

Ключевые слова: модель Пейрара – Бишопа, бегущие волны, устойчивость.

Введение. В связи с бурным развитием био- и нанотехнологий волновым процессам в модели ДНК посвящены многие публикации последних лет. Различные модели нелинейной динамики ДНК и их анализ описываются в [4, 7, 10]. Одной из наиболее известных моделей молекулы ДНК является модель, предложенная в [8], так называемая модель Пейрара – Бишопа (модель ПБ). В этой модели две цепочки ДНК представлены двумя связанными цепями жестких дисков, причем взаимодействие противоположных дисков разных цепей описывается потенциалом Морзе, а взаимодействия соседних дисков внутри каждой цепи предполагаются линейными. Процессы распространения волн в моделях ДНК представлены, в частности, в [2 – 5, 7, 10].

В настоящей работе для исследования устойчивости бегущих волн в модели ПБ используются уравнения в вариациях и последующее применение к ним метода алгебраизации, впервые изложенного в книге Айнса [4]. В основе метода лежит преобразование линейных уравнений с переменными коэффициентами к алгебраической форме. В результате уравнения в вариациях преобразуются к уравнениям с особыми точками. Успешное использование такого подхода в задачах об устойчивости нелинейных нормальных колебаний описано в [9].

Целью настоящей работы является применение метода алгебраизации в задаче об устойчивости бегущих волн в ПБ-модели молекулы ДНК, что позволяет получить границы областей устойчивости / неустойчивости бегущих волн в пространстве параметров системы. Получен-

ные результаты иллюстрируются численными расчетами с использованием метода Рунге – Кутта.

Модель Пейрара – Бишопа. Модель Пейрара – Бишопа представлена двумя связанными цепями жестких дисков, соединенных продольными и поперечными пружинами (рис. 1).

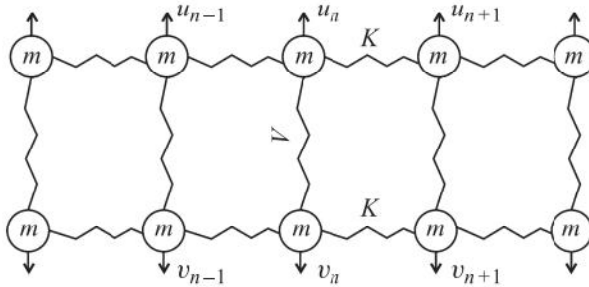


Рис. 1 – Модель ДНК Пейрара – Бишопа

Взаимодействие узлов разных цепочек моделируется потенциалом Морзе, $V(u_n - v_n) = d \left[e^{-a(u_n - v_n)} - 1 \right]^2$, который имитирует водородные связи между основаниями комплементарных пар. Здесь d – энергия диссоциации полинуклеотидных цепей; a – параметр, обратный расстоянию между дисками (так называемая пространственная шкала потенциала). Взаимодействие между соседними узлами в цепочке – линейное. Использование замены переменных $\frac{z_n}{a} = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$, $\frac{y_n}{a} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}}$ приводит уравнения движения к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z_n}{dt^2} = \vartheta (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \vartheta (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - 2\sqrt{2}\gamma e^{-\sqrt{2}y_n} \left[1 - e^{-\sqrt{2}y_n} \right] \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\vartheta = \frac{k}{m}$, $\gamma = \frac{ad}{m}$ – безразмерные параметры; k – постоянная, характеризующая взаимодействие между парами оснований вдоль цепи.

Длинноволновое приближение. Бегущие волны. Преобразование системы (1) в соответствующую распределенную систему может быть выполнено с использованием следующих приближений:

$$y_n \sim y(x), \quad y_{n+1} \sim y(x), \quad z_n \sim z(x), \quad z_{n+1} \sim z(x),$$

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \approx a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} \approx a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (2)$$

В результате вместо уравнений (1) получаем следующую систему уравнений длинноволнового приближения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\sqrt{2}\gamma e^{-\sqrt{2}y} \left[1 - e^{-\sqrt{2}y} \right], \end{cases} \quad (3)$$

где $\beta = \vartheta a^2$.

Поскольку для движения центра масс рассматриваемого дуплекса ограничения не введены, будем рассматривать только динамику расхождения цепей, которая описывается переменной y . По этой причине далее рассматривается только второе уравнение системы (3). Бегущая волна в системе может быть представлена в такой форме:

$$y = \Phi(\varphi), \quad (4)$$

где фаза волны $\varphi = kx - \omega t$.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (3) и сохраняя в разложении экспоненты только члены до третьих степеней включительно, получаем уравнение, описывающее бегущую волну:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) = \gamma (-4\Phi + 6\sqrt{2}\Phi^2 - 28/3 \cdot \Phi^3). \quad (5)$$

Отсюда можно получить следующее равенство

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \frac{\gamma (-4\Phi + 6\sqrt{2}\Phi^2 - 28/3 \cdot \Phi^3)}{\omega^2 - \beta k^2}. \quad (6)$$

Интеграл энергии здесь имеет такой вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 (\omega^2 - \beta k^2) + \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + \frac{7}{3}\Phi^4 \right) = h. \quad (7)$$

Из уравнения (7) получаем также следующую зависимость

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2 \left[h - \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + \frac{7}{3}\Phi^4 \right) \right]}{\omega^2 - \beta k^2}. \quad (8)$$

Равенства (6) и (8) будут использованы в дальнейших преобразованиях.

Алгебраизация по Айнсу. Для исследования устойчивости бегущих волн проводится анализ уравнений в вариациях с использованием процедуры алгебраизации по Айнсу [1, 4, 9]. В этом случае в качестве новой независимой переменной выбирается обобщенная координата, связанная с рассматриваемым решением. Существенно, что эта процедура не требует использования функции, описывающей поведение бегущей волны по времени.

Чтобы изучить устойчивость стационарных волн, выпишем, прежде всего, линеаризованное уравнение вариаций $W(t, x)$ для решения (4), которое может быть получено из уравнения (5)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \gamma W \left(-4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2 \right), \quad (9)$$

где Φ – периодическая функция по φ .

В качестве первого шага мы вводим теперь независимые переменные φ, t вместо переменных x, t . Уравнение в вариациях (9) в новых переменных переписывается следующим образом

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) - 2\omega \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \gamma W \left(-4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2 \right). \quad (10)$$

Используем теперь разделение переменных $W = e^{st} \tilde{z}(\varphi)$ и дополнительное преобразование $\tilde{z}(\varphi) = e^{A\varphi} U$, где $A = -s\omega / (\omega^2 - \beta k^2)$.

В результате вместо уравнения (10) получаем следующее уравнение в вариациях, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2 \frac{d^2 U}{d\varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) = \gamma U \left(B + 4 - 12\sqrt{2}\Phi + 28\Phi^2 \right), \quad (11)$$

где $B = s^2 / (\beta k^2 - \omega^2)$.

Поскольку именно параметр s^2 содержится в уравнении (11), то в случае если параметр s принимает действительные значения, они могут быть как положительными, так и отрицательными. Учитывая предыдущие преобразования, связанные с разделением переменных, это означает рост вариаций, то есть, неустойчивость рассматриваемого решения. Таким образом, устойчивость может наблюдаться только в том случае, когда $s^2 < 0$. Отсюда следует, что для устойчивости должны выполняться следующие неравенства:

$$B > 0, \text{ если } c_0^2 k^2 - \omega^2 < 0, \text{ и } B < 0, \text{ если } c_0^2 k^2 - \omega^2 > 0.$$

Далее в качестве новой независимой переменной вместо φ выбирается переменная Φ , определяющая рассматриваемую бегущую волну. После некоторых преобразований уравнение в вариациях (11) приобретает следующий вид

$$2 \frac{d^2 U}{d\Phi^2} \left[h - \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + \frac{7}{3}\Phi^4 \right) \right] + \frac{dU}{d\Phi} \gamma \left(4\Phi - 6\sqrt{2}\Phi^2 + \frac{28}{3}\Phi^3 \right) - \gamma U \left(B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2 \right) = 0. \quad (12)$$

Преобразование уравнения в вариациях к виду уравнения с особыми точками (12) представляет собой так называемую алгебраизацию по Айнсу задачи устойчивости. Преимущество этого подхода состоит в том, что анализ проблемы устойчивости не требует использования конкретной формы решения $\Phi(\varphi)$.

Особые точки уравнения (12) определяются таким образом:

$$h - \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + 7/3 \cdot \Phi^4 \right) \equiv (\Phi - \Phi_0) G(\Phi, \Phi_0) = 0, \quad (13)$$

где Φ_0 – корень данного уравнения.

Известно, что T – и $2T$ – периодические решения определяют границы областей устойчивости/неустойчивости в пространстве параметров уравнения в вариациях, где T – период коэффициентов уравнения (13). В уравнении с особыми точками эти «граничные решения» определяются рядом вида

$$W = z^r (a_0 + a_1 z + \dots), \quad (14)$$

где r – один из двух индексов особой точки уравнения в вариациях (12), а $z = (\Phi - \Phi_0)$.

Для определения индексов особой точки Φ_0 введем ряд (14) в уравнение (12). Сбрав слагаемые с наименьшей степенью z , получим следующее уравнение для определения этих показателей

$$r(r-1)\gamma \left(-8\Phi_0 + 12\sqrt{2}\Phi_0^2 - 56/3 \cdot \Phi_0^3 \right) + r\gamma \left(4\Phi_0 - 6\sqrt{2}\Phi_0^2 + 28/3 \cdot \Phi_0^3 \right) = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$r_1 = 0 \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{4 - 6\sqrt{2}\Phi_0 + 56/3 \cdot \Phi_0^2}{2 - 3\sqrt{2}\Phi_0 + 14/3 \cdot \Phi_0^2} + 1. \quad (16)$$

Подставляя теперь ряд (14), соответствующий нулевому индексу, в уравнение в вариациях (12) и приравнивая коэффициенты с одинако-

выми степенями по z , мы получаем следующую бесконечную рекуррентную систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned}
 z^0 : & 4a_2 \left[h - \gamma \left(2\Phi_0^2 - 2\sqrt{2}\Phi_0^3 + \frac{7}{3}\Phi_0^4 \right) \right] + \\
 & + a_1 \gamma \left(4\Phi_0 - 6\sqrt{2}\Phi_0^2 + \frac{28}{3}\Phi_0^3 \right) - a_0 \gamma (B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2) = 0; \\
 z^1 : & 2a_2 \gamma \left(4\Phi_0 - 6\sqrt{2}\Phi_0^2 + \frac{28}{3}\Phi_0^3 \right) - a_1 \gamma (B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2) = 0; \\
 z^2 : & -a_2 \gamma (B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель обращается в ноль. Этот определитель был вычислен до 5-го порядка включительно, и, таким образом, получено уравнение, связывающее параметры системы и определяющее границы областей устойчивости/неустойчивости. Заметим, что границы областей, вычисленные для определителей четвертого и пятого порядков, почти идентичны.

Подставляя теперь ряд (14), соответствующий индексу r_2 , в уравнение в вариациях (12) и приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями по z , получаем следующую бесконечную рекуррентную систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned}
 z^{r_2-1} : & a_0 r_2 \gamma (-2r_2 + 3) \left(4\Phi_0 - 6\sqrt{2}\Phi_0^2 + \frac{28}{3}\Phi_0^3 \right) + \\
 & + r_2 a_1 (2r_2 - 1) \left[h - \gamma \left(2\Phi_0^2 - 2\sqrt{2}\Phi_0^3 + \frac{7}{3}\Phi_0^4 \right) \right] = 0; \\
 z^{r_2} : & 2a_2 (r_2^2 + r_2 + 2) \left[h - \gamma \left(2\Phi_0^2 - 2\sqrt{2}\Phi_0^3 + \frac{7}{3}\Phi_0^4 \right) \right] - \\
 & - \gamma a_1 (r_2 + 1) (2r_2 - 1) \left(4\Phi_0 - 6\sqrt{2}\Phi_0^2 + \frac{28}{3}\Phi_0^3 \right) - \\
 & - \gamma a_0 (B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi_0 - 28\Phi_0^2) 2\gamma a_0 r_2 (r_2 - 2) \times \\
 & \times \left[2 - 6\sqrt{2}\Phi_0 + 14\Phi_0^2 \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Итак, получена еще одна система линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель обращается в ноль. Этот определитель был также вычислен до пятого порядка включительно, и, таким образом, получено уравнение, связы-

вающее параметры системы и определяющее границы областей устойчивости / неустойчивости.

На рис. 2 показаны границы областей устойчивости /неустойчивости в плоскостях некоторых выбранных параметров системы, вычисленные для индекса $r_1 = 0$. В расчетах принято, что $a = 1,8$, $\Phi_0 = 0,5$. Полная энергия системы h меняется в интервале $[0,0001; 0,001]$; параметр B меняется в интервале $[20; 120]$; параметр взаимодействия между парами оснований вдоль цепи $k = 0,03$; безразмерный параметр ангармонизма $\rho = 1$. Область устойчивости расположена справа от представленной границы.

В качестве иллюстрации с помощью метода Рунге – Кутты построены решения уравнения в вариациях (12); при этом параметры B, h для расчета выбираются из областей устойчивости/неустойчивости, представленных на рис. 2. Другие параметры принимают те фиксированные значения, которые были указаны выше. Начальные условия: $U = 0,01$;
 $\frac{dU}{d\Phi} = 0,01$.

На рис. 3 показано ограниченное решение уравнения в вариациях. Это решение выбирается из области устойчивости на плоскости параметров (B, h) , представленной на рис. 1 (энергия системы $h = 0,0002$, безразмерный параметр $B = 30$, энергия диссоциации полинуклеотидных цепочек $d = 0,1$; переменная Φ изменяется в интервале $[0; 20]$).

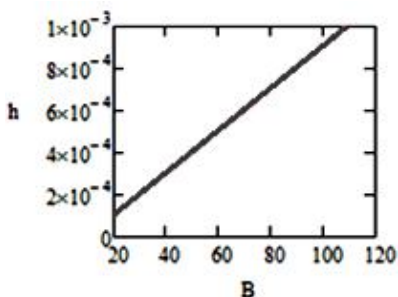


Рис. 2 – Граница между областями устойчивости / неустойчивости на плоскости (h, B) для показателя r_1

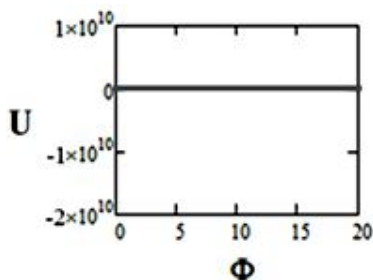


Рис. 3 – Ограниченное решение уравнения в вариациях, выбранное из области устойчивости на рис. 2

Возрастающие решения уравнения в вариациях представлены на рис. 4, которые выбраны из области неустойчивости (рис. 1). Здесь $B = 40$; $h = 0,0007$; переменная Φ изменяется в интервале $[0; 10]$.

На рис. 5 показаны границы между областями устойчивости/неустойчивости в пространстве параметров системы (h, B) , вычисленные для индекса r_2 . При этом параметр h меняется в интервале $[0,0001; \dots 0,001]$, параметр B – в интервале $[2; \dots 300]$. Область устойчивости расположена справа от представленной границы.

Ограниченные и неограниченные решения уравнения в вариациях, полученные методом Рунге – Кутты, показаны на рис. 6 – 8 соответственно, для областей устойчивости / неустойчивости, представленных на рис. 5.

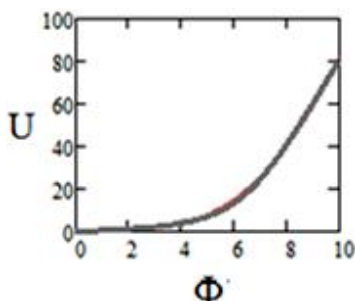


Рис. 4 – Неограниченное решение уравнения в вариациях, выбранное в области неустойчивости

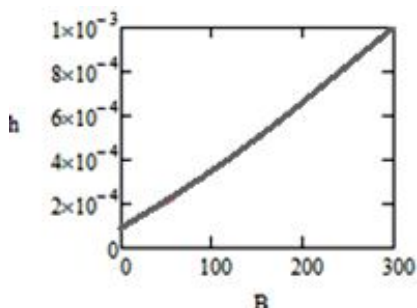


Рис. 5 – Граница между областями устойчивости/неустойчивости на плоскости параметров системы (h, B), вычисленная для индекса r_2

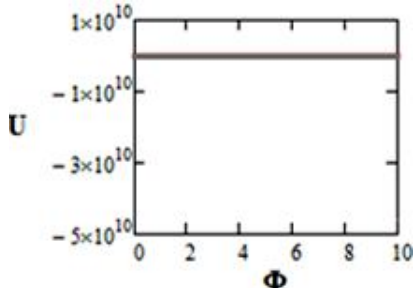


Рис. 6 – Ограниченное решение уравнения в вариациях, выбранное из области устойчивости

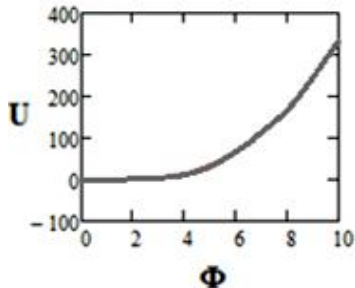


Рис. 7 – Неограниченное решение уравнения в вариациях, выбранное в области неустойчивости

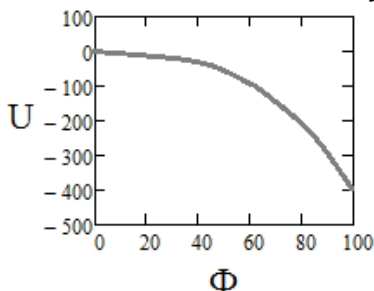


Рис. 8 – Неограниченное решение уравнения в вариациях, выбранное в области неустойчивости

А именно, ограниченное решение из области устойчивости представлено на рис. 6 для $h = 0,0005$, $B = 150$, время t варьируется на интервале $[0; 10]$. Неограниченное решение из области неустойчивости пока-

зано на рис. 7 для $h = 0,0003$, $B = 2$, время t варьируется на интервале $[0, 10]$. На рис. 8 – для $h = 0,0006$, $B = 50$, время t варьируется на интервале $[0, 100]$. Другие параметры, используемые в численных расчетах, те же, что использовались для получения границы на рис. 5.

Выводы. Таким образом, алгебраизация по Айнсу может быть успешно использована для анализа устойчивости бегущих нелинейных волн в длинноволновом приближении модели ПБ, описывающем динамику молекулы ДНК. Границы областей устойчивости/неустойчивости в пространстве параметров системы получены путем анализа линеаризованного уравнения в вариациях, представленного в виде уравнения с особыми точками. Решения, соответствующие этим границам, строятся в степенных рядах. Численное моделирование иллюстрирует полученные результаты относительно устойчивости/неустойчивости бегущих нелинейных волн.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956. – 492 с.
2. **Фахретдинов М. И., Закирьянов Ф. К.** Дискретные бризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 7. С. 1–5.
3. **Фахретдинов М. И., Закирьянов Ф. К., Екомасов Е. Г.** Дискретные бризеры и мультибризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 77–87.
4. **Шугаев А. С., Пономарёв О. А., Лахно В. Д.** Теоретические и экспериментальные исследования открытых состояний ДНК // Математическая биология и биоинформатика. 2013. Т. 8. № 2. С. 553–664.
5. **Dauxois T., Peyrard M., Bishop A. R.** Entropy-driven DNA denaturation // Physical Review E. 1993. Vol. 47. P. R44–R47.
6. **Ince R. L.** Ordinary Differential Equations. London: Longmans Green, 1926. 528 p.
7. **Peyrard M.** Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA // Nonlinearity. 2004. No. 17. P. R1–R40.
8. **Peyrard M., Bishop A. R.** Statistical Mechanics of a Nonlinear Model for DNA Denaturation // Physical Review Letters. 1989. Vol. 62. P. 2755–2758.
9. **Vakakis A. et al.** Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. New York: Wiley-Interscience, 1996. 552 p.
10. **Yakushevich L. V.** Nonlinear Physics of DNA. New York: Wiley, 2-nd Edition, 2004. 207 p.

УДК 534.2; 519.62

*Н. С. Голоскубова, Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук,
Н. О. Кириллова, канд. тех. наук*

СТІЙКІСТЬ БІГУЧИХ ХВИЛЬ У МОДЕЛІ ДНК ПЕЙРАРА – БІШОПА

Розглядаються бігучі хвилі у моделі Пейрара – Бішопа, що описує динаміку молекули ДНК. Стійкість бігучих хвиль в цій системі досліджується у рамках

довгохвильового наближення використанням рівнянь у варіаціях і подальшим застосуванням методу алгебраїзації за Айнсом. В результаті рівняння в варіаціях перетворюються до вигляду рівнянь з сингулярними точками. Для побудови границь областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів системи використовуються степеневі ряди. Отримані результати ілюструються чисельним моделюванням з використанням методу Рунге – Кутта.

Ключові слова: модель Пейрара – Бішопа, бігучі хвилі, стійкість.

UDC 534.2; 519.62

*N. S. Goloskubova, Yu. V. Mikhlin, Dr.Sci. (Phis.-Math.),
N. A. Kyryllova, PhD (Tech.)*

STABILITY OF THE TRAVELING WAVES IN THE PEYRARD-BISHOP MODEL OF DNA

Traveling waves in the Peyrard — Bishop model (PB model), which describes dynamics of the DNA molecule, are considered. A stability of the traveling waves is investigated in the framework of the long wavelength approximation by using equations in variations and the subsequent use of the method of algebraization by Ince. As a result, the equations in variations are transformed to ones with singular points. To construct boundaries between the regions of stability / instability in space of the system parameters the power series are used. Obtained results are illustrated by numerical simulation using the Runge-Kutta method.

Key words: Peyrard – Bishop model, traveling waves, stability.

Due to rapid development of bio- and nanotechnologies, many publications in recent years have been devoted to wave processes in the DNA model. One of the most well-known models of the DNA molecule is the model proposed in [7, 8] (so-called Peyrard – Bishop model, or PB model). Here, two DNA chains are represented by a model with two connected chains of hard disks (see Fig. 1 above), the interaction of opposite disks of different chains is described by the Morse potential $V(u_n - v_n) = d \left[e^{-a(u_n - v_n)} - 1 \right]^2$, and the interactions of neighboring disks inside each chain are linear. After use of the following change of variables, $z_n / a = (u_n + v_n) / \sqrt{2}$, $y_n / a = (u_n - v_n) / \sqrt{2}$, one obtains equations of motion of the chain in the following form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 z_n}{dt^2} = \vartheta (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}), \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \vartheta (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - 2\sqrt{2}\gamma e^{-\sqrt{2}y_n} \left[1 - e^{-\sqrt{2}y_n} \right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Here $\vartheta = k/m$, $\gamma = ad/m$ are dimensionless parameters; the constant k characterizes the interactions of neighboring disks inside each chain.

The system of equations for the long wavelength approximation can be written as the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\sqrt{2}\gamma e^{-\sqrt{2}y} \left[1 - e^{-\sqrt{2}y} \right], \end{array} \right. \quad (2)$$

where $\beta = 9a^2 /$.

Only second equation of the system (2) describing two chains divergence will be considered later.

Traveling wave is presented here as $y = \Phi(\varphi)$, where the phase of the wave is $\varphi = kx - \omega t$. Using expansion of the exponent in the eq. (2) and saving only terms up to third powers inclusively, one has the following equation which describes this traveling wave,

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} (\omega^2 - \beta k^2) = \gamma \left(-4\Phi + 6\sqrt{2}\Phi^2 - \frac{28}{3}\Phi^3 \right), \quad (3)$$

and the energy integral of the system,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 (\omega^2 - \beta k^2) + \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + \frac{7}{3}\Phi^4 \right) = h. \quad (4)$$

Equation in variations $W(t, x)$ for the solution $y = \Phi(\varphi)$ is the following:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \gamma W \left(-4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2 \right), \quad (5)$$

where Φ is a periodic function by φ .

New independent variables φ, t are introduced instead the variables x, t . Then the separation of variables, $W = e^{st} \tilde{z}(\varphi)$, and the additional transformation, $\tilde{z}(\varphi) = e^{A\varphi} U(\varphi)$, where $A = -s\omega / (\omega^2 - \beta k^2)$, are used. Finally, the new independent variable Φ is chosen instead of the variable φ . Equation in variations can be presented as the following:

$$2 \frac{d^2 U}{d\Phi^2} \left[h - \gamma \left(2\Phi^2 - 2\sqrt{2}\Phi^3 + \frac{7}{3}\Phi^4 \right) \right] + \frac{dU}{d\Phi} \gamma \left(4\Phi - 6\sqrt{2}\Phi^2 + \frac{28}{3}\Phi^3 \right) - \gamma U \left(B - 4 + 12\sqrt{2}\Phi - 28\Phi^2 \right) = 0. \quad (6)$$

where $B = s^2 / (\beta k^2 - \omega^2)$.

Thus, so-called algebraization by Ince, first presented in [6], and used then in problem of the nonlinear normal modes stability [9], is realized in the

problem under consideration. The method of algebraization is based on transformation of linear equations with variable coefficients (3) to the algebraic form (6). An advantage of this approach is that an analysis of the stability problem does not need to use the specific form of the solution under consideration.

Note that namely the parameter s^2 is presented in equation (6), Taking into account preceding transformations, one has that the traveling wave stability can be observed only under the following inequalities: $B > 0$, if $c_0^2 k^2 - \omega^2 < 0$ and $B < 0$, if $c_0^2 k^2 - \omega^2 > 0$.

The equation (6) contains singular points. Solutions corresponding to boundaries between the stability / instability regions in the system parameters space can be constructed in power series [6],

$$W = z^r (a_0 + a_1 z + \dots), \quad (7)$$

where r is one of two indexes of the singularity of the equation (6). Here $z = (\Phi - \Phi_0)$. Namely,

$$r_1 = 0 \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{4 - 6\sqrt{2}\Phi_0 + \frac{56}{3}\Phi_0^2}{2 - 3\sqrt{2}\Phi_0 + \frac{14}{3}\Phi_0^2} + 1. \quad (8)$$

Substituting the series (7) to the equation (6), one obtains systems of linear algebraic equations to determine coefficients of the series. One has a non-trivial solution if determinants of these systems are equal to zero. Note that the determinants were calculated up to fifth degree inclusively. As a result, boundaries between the stability / instability regions can be approximately obtained.

The Runge – Kutta method is used to illustrate obtained results. Namely, the limited solutions of the equation in variations are obtained when the system parameters are chosen in the regions of stability, and the unlimited solutions are obtained when the system parameters are chosen in the regions of instability. Corresponding results are presented in Figs. above.

Thus, the method of algebraization used in the problem of the traveling wave stability allows us to obtain boundaries between the stability / instability regions in the system parameters space for the PB-model. The numerical simulation illustrates obtained results.

REFERENCES

1. **Malkin I. G.** Some problems of the nonlinear oscillations theory. Moscow: Gostechteorizdat, 1956. 492 p. (in Russian).
2. **Fakhretdinov M. I., Zakirianov F. K.** Discrete breathers in the model of DNK by Peirard-Bishopa // Journal of Theoretical Physics. 2013. Vol. 83. No 7. P. 1–5. (in Russian).
3. **Fakhretdinov M. I., Zakirianov F. K., Ekomasov E. G.** Discrete breathers and multi-breathers in the model of DNK by Peirard – Bishopa // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 11. No 1. P. 77–87. (in Russian).

4. **Shygayev A. S.**, Shygayev A. S., Ponomarev O. A., Lakhno V. D. Teoreticheskiye i experimentalniye issledovaniya otkritikh sostoyani DNK // Matematischeeskaya biologiya i bioinformatika. 2013. T. 8. No 2. P. 553–664. (in Russian).
5. **Dauxois T.**, Peyrard M., Bishop A. R. Entropy-driven DNA denaturation // Physical Review E. 1993. Vol. 47. P. R44–R47.
6. **Ince R. L.** Ordinary Differential Equations. London: Longmans Green, 1926. 528 p.
7. **Peyrard M.** Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA // Nonlinearity. 2004. No. 17. P. R1–R40.
8. **Peyrard M.**, Bishop A. R. Statistical Mechanics of a Nonlinear Model for DNA Denaturation // Physical Review Letters. 1989. Vol. 62. P. 2755–2758.
9. **Vakakis A. et al.** Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. New York: Wiley-Interscience, 1996. 552 p.
10. **Yakushevich L. V.** Nonlinear Physics of DNA. New York: Wiley, 2-nd Edition, 2004. 207 p.

*Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
Харків, Україна*

Надійшла до редакції 11.05.2019