

УДК 539.3

С. В. Босаков д-р техн. наук

ДВЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА В УПРУГИЙ СЛОЙ

Приводится решение контактной задачи для кольцевого штампа на упругом слое под действием осесимметрично приложенной силы и момента. Расчет выполнен методом ортогональных многочленов с использованием специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения для слоя. Даны численные результаты.

Ключевые слова: контактная задача, кольцевой штамп, упругий слой, сила, момент.

Введение. В отечественной литературе Б. Н. Жемочкин [12] впервые опубликовал решение осесимметричной контактной задачи о кольцевом штампе на упругом полупространстве. Впоследствии эта задача была решена многими авторами [1, 2, 5, 10, 11] различными способами, причем Ф. Н. Бородачева [5] также решила контактную задачу о действии момента на кольцевой штамп, лежащий на упругом полупространстве. В. М. Александровым [2] получены асимптотические формулы для распределения контактных напряжений и перемещений кольцевого штампа на упругом полупространстве при действии на штамп осесимметрично приложенной силы и момента. Был рассмотрен более сложный вид упругого основания [7]. Выполнен обзор ряда работ по контактными задачам для кольцевых пластинок [16]. Ниже дается решение контактной задачи для кольцевого штампа, расположенного на упругом слое и нагруженного силой и моментом.

Постановка задачи. Рассмотрим кольцевой штамп, лежащий без трения на упругом слое с характеристиками E, ν, h под действием силы и момента (рис. 1). Вертикальные перемещения поверхности упругого слоя в полярных координатах от действия сосредоточенной единичной силы даются выражением [16]

$$K(r, \rho, \theta, \phi) = \frac{1-\nu^2}{\pi E h} \int_0^{\infty} L(u) J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2}\right) du, \quad (1)$$
$$L(u) = \frac{ch2u - 1}{sh2u + 2u},$$

где r, θ – координаты точки поверхности слоя, в котором определяется перемещение; ρ, ϕ – координаты точки приложения единичной силы.

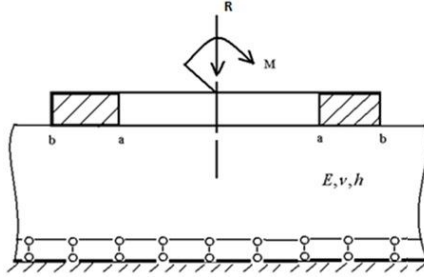


Рис. 1 – Кольцевой штамп на упругом слое

В дальнейшем, исходя из асимптотических свойств для $L(u)$, принимаем специальную аппроксимацию

$$L(u) \approx 1 - e^{-u} - \frac{1}{2} u e^{-2u}. \quad (2)$$

Интегральные уравнения для определения закона распределения контактных напряжений от отдельных воздействий на штамп силы P и M можно записать в таком виде

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b q_0(\rho, \phi) K(r, \rho, \theta, \phi) \rho d\rho d\phi = \delta, \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b q_1(\rho, \phi) K(r, \rho, \theta, \phi) \rho d\rho d\phi = \beta r \cos\theta, \quad (4)$$

где $q_0(\rho, \phi)$, $q_1(\rho, \phi)$ – законы распределения контактных напряжений под подошвой кольцевого штампа при осесимметричном действии силы P и момента M соответственно; δ , β – линейное и угловое перемещения кольцевого штампа от силы и момента соответственно.

В [6] получены интегральные уравнения контактных задач для круглого штампа на упругом слое и кольцевого штампа на упругом полупространстве [2, 5]. В соответствии с ними уравнения (3), (4) принимают вид (с учетом того, что задано $q_0(\rho, \phi) = q_0(\rho)$, $q_1(\rho, \phi) = q_1(\rho) \cos\phi$)

$$\int_a^b q_0(\rho) \int_0^\infty L(u) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) du \rho d\rho = \frac{Eh}{2(1-\nu^2) b^2} \delta, \quad (5)$$

$$\int_a^b q_1(\rho) \int_0^\infty L(u) J_1\left(u \frac{r}{h}\right) J_1\left(u \frac{\rho}{h}\right) du \rho d\rho = \frac{Eh}{2(1-\nu^2) b^2} \beta r. \quad (6)$$

В данной работе распределение контактных напряжений предлагается искать в виде рядов по полиномам и присоединенным функциям Лежандра [9] с весом и неизвестными коэффициентами. В безразмерных координатах эти законы распределения принимают вид

$$q_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)(\rho^2-a^2)}} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}), \quad (7)$$

$$q_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)(\rho^2-a^2)}} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} P_{2k+1}^1(\sqrt{1-\rho^2}). \quad (8)$$

Задача 1. Рассмотрим решение осесимметричной задачи. При этом используем интеграл [15, стр.218]

$$\int_0^{\infty} e^{-px} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = \frac{1}{\pi\sqrt{bc}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2+b^2+c^2}{2bc}\right), \quad (9)$$

где $Q_\nu(z)$ – функция Лежандра второго рода [15].

Дифференцируя (9) по параметру, можно получить интеграл

$$\int_0^{\infty} x e^{-px} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx.$$

После интегрирования (5) с учетом (9), представим результат интегрирования в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(e^{-u} + \frac{1}{2} u e^{-2u} \right) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) du = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2m,2n}(h) P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}), \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты $C_{2m,2n}(h)$ определялись численно для всех $0 < h < \infty, 0 < a < 1$.

Подставим $q_0(\rho)$ (7) в уравнение (5) и с учетом (10) выполним интегрирование по переменной ρ . При интегрировании используем очевидное представление произведения двух полиномов Лежандра

$$P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2}) = \sum_{i=0}^{m+n} d_{2m,2n,2i} P_{2i}(\sqrt{1-\rho^2}) \quad (11)$$

и спектральное соотношение Г. Я. Попова [14, стр.301]

$$\int_a^1 \frac{y P_{2n}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{y^2-a^2}} dy = (-1)^n \frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!} P_{2n}(a). \quad (12)$$

Также, используя результаты [6], можно получить для $0 < r, \rho < 1$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty J_0\left(u \frac{r}{h}\right) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) du = \\ & = \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^\infty (1+4m) \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2m}(\sqrt{1-r^2}). \end{aligned} \quad (13)$$

При подстановке (7) в (5) последовательно используем формулы (13), (11), (10) и (12). В итоге получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^\infty B_{2k} \left\{ \sum_{m=0}^\infty (1+4m) \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^2 P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \cdot \right. \\ & \cdot \sum_{i=0}^{k+m} d_{2k,2m,2i} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} P_{2i}(a) + \\ & + \frac{\pi}{2h} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty C_{2m,2n}(h) P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \cdot \\ & \left. \cdot \sum_{i=0}^{k+m} d_{2k,2m,2i} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} P_{2i}(a) \right\} = \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножим обе части (14) на

$$\frac{P_{2j}(\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2} \sqrt{r^2-a^2}} r dr$$

и, используя представление (11) и интеграл (12), проинтегрируем по r в пределах $(a, 1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом усечения [13]. В результате устанавливаем связь между δ и коэффициентами разложения B_{2k} (7). Далее находим полную энергию упругого основания и действующей на кольцевую пластинку осесимметричной нагрузки [3] в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} 2\pi b^2 \int_a^1 q_0(r) r dr - R\delta. \quad (15)$$

Приравняв производную от полной энергии по осесимметричному перемещению δ нулю, находим это перемещение, что позволяет определить распределение контактных напряжений под подошвой кольцевого штампа.

Пример 1. Исходные геометрические соотношения: $a/b = 0,5$; $h/b = 2$. При учете первых пяти членов разложения (7) получено

$$B_0 = 2,0777 \frac{2 E \delta}{\pi^2 (1 - \nu^2) b};$$

$$B_2 = -0,7693 \frac{2 E \delta}{\pi^2 (1 - \nu^2) b}; \quad B_4 = 0,5677 \frac{2 E \delta}{\pi^2 (1 - \nu^2) b};$$

$$B_6 = 0,7566 \frac{2 E \delta}{\pi^2 (1 - \nu^2) b}; \quad B_8 = 0,4268 \frac{2 E \delta}{\pi^2 (1 - \nu^2) b},$$

перемещение $\delta = 0,2655 R (1 - \nu^2) / (Eb)$.

Отметим, что для круглого штампа на упругом полупространстве [8]

$$\delta = 0,5 R (1 - \nu^2) / (Eb).$$

Для аналогичного кольцевого штампа на упругом полупространстве [10]

$$\delta = 0,5208 R (1 - \nu^2) / (Eb).$$

На рис. 2 приведены графики распределения контактных нормальных напряжений под подошвой рассматриваемого кольцевого штампа, а именно: пунктирной линией показаны асимптотические решения В. М. Александрова [1] – для полупространства, сплошной линией – решение автора для упругого слоя.

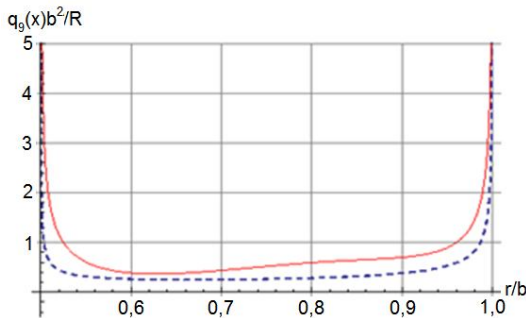


Рис. 2 – Распределение контактных напряжений

Задача 2. Рассмотрим решение задачи о действии момента на кольцевой штамп, расположенный на упругом слое (рис. 1). С использованием соотношения (9) имеем равенство

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-u} + \frac{1}{2} u e^{-2u} \right) J_1 \left(u \frac{r}{h} \right) J_1 \left(u \frac{\rho}{h} \right) du = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2m+1, 2n+1}(h) P_{2m+1}^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right). \quad (16)$$

Подставим $q_1(\rho)$ (8) в уравнение (6) и с учетом (16) выполним интегрирование по переменной ρ . При интегрировании используем очевидное представление произведения двух присоединенных функций Лежандра с целочисленными индексами

$$P_{2m+1}^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) = \sum_{i=0}^{m+n+1} d_{2m, 2n, 2i} P_{2i} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right), \quad (17)$$

результаты [4] для $0 < r, \rho < 1$

$$\int_0^{\infty} J_1 \left(u \frac{r}{h} \right) J_1 \left(u \frac{\rho}{h} \right) du = \frac{h}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (3+4n) \frac{\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma^2(n+2)} P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right) \quad (18)$$

и интеграл (12). В результате получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (3+4n) \frac{\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma^2(n+2)} P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right) \\ \sum_{i=0}^{k+n+1} d_{2k, 2n, 2i} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} P_{2i}(a) - \\ - \frac{8}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2m+1, 2n+1}(h) P_{2n}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right) \sum_{i=0}^{k+m+1} d_{2k, 2m, 2i} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} P_{2i}(a) \end{array} \right\} = \quad (19)$$

$$= \frac{8E\beta}{\pi(1-\nu^2)} r.$$

Умножим обе части (19) на

$$\frac{P_{2j+1}^1 \left(\sqrt{1-r^2} \right)}{\sqrt{1-r^2} \sqrt{r^2-a^2}} r dr$$

и проинтегрируем по r в пределах $(a, 1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. При этом используем представление (17). Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом усечения [13]. В результате устанавливаем связь между углом наклона штампа β и коэффициентами разложения B_{2k+1} (8). Далее находим полную энергию упругого основания и действующей на кольцевой штамп момента [3] в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} b^3 \int_0^{2\pi} \int_a^1 q_1(r) \cos^2 \varphi r^2 dr - M\beta. \quad (20)$$

Находим угловое перемещение, а затем распределение контактных напряжений под подошвой кольцевого штампа, вызванное действием момента.

Пример 2. Исходные геометрические соотношения: $a/b = 0,5$; $h/b = 0,5$. Для коэффициентов первых трех членов разложения (8) получим:

$$(B_1, B_3, B_5) = (-0,4022, 0,0339, 0,0151) \frac{16E}{\pi^2 (1-\nu^2)} \beta,$$

$$\beta = 0,517 M (1-\nu^2) / (Eb^3).$$

Отметим, что числовой коэффициент в выражении для β равен 0,75 для круглого штампа на упругом полупространстве [8] и 0,7628 для подобного кольцевого штампа на полупространстве [5].

На рис. 3 приведен график распределения контактных напряжений по подошве штампа от действия момента при $\phi = 0$.

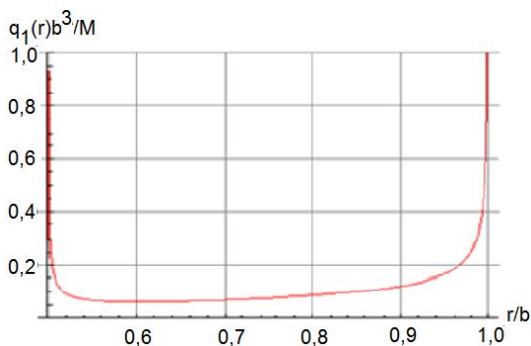


Рис. 3 – Контактные напряжения от действия момента при $\phi = 0$

Выводы. Использование формулы (9) позволяет получить решение поставленной контактной задачи для кольцевого штампа при любых соотношениях $h/b, a/b$. Вопрос о возможности решения способом усечения

чения бесконечных систем, получаемых при реализации указанного подхода, требует специального исследования из-за сложных формул для коэффициентов при неизвестных в этих системах.

Отметим, что для круглого штампа на упругом слое при действии осесимметричной нагрузки этот вопрос исследовался в [9], где доказана правомерность решения бесконечных систем для этих задач способом усечения. Некоторым доказательством правильности полученных в статье результатов является сопоставление получаемого решения для слоя с решением для круглого и кольцевого штампов [5, 6, 18] на упругом полупространстве.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Александров В. М.** Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // МТТ. 1967. №4. С. 108–116.
2. **Александров В. М.** Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством // ПММ. 1996. Т. 60. №1. С. 132–139.
3. **Александров А. В., Потапов В. Д.** Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. 400 с.
4. **Босаков С. В.** Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. Брест: БрГТУ, 2006. 108 с.
5. **Бородачева Ф. Н.** О вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство по действием вертикальной внецентренной силы // Изв. вузов, Стр-во и архитектура. 1969. № 8. С. 15–19.
6. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Генералова Н. В., Коваленко Е. В.** О вдавливании кольцевого в плане штампа в упругий слой с тонким усиливающим покрытием // МТТ. 1999. № 3. С. 27–33.
8. **Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И.** Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
9. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963. 1100 с.
10. **Егоров К. Е.** К вопросу расчета оснований под фундаментом с подошвой кольцевой формы // Сб. тр. НИИОСП «Механика грунтов». М.: Госстройиздат. 1958. № 34 С. 34–57.
11. **Егоров К. Е.** Расчет оснований под фундаментом с подошвой кольцевой формы // Доклады к VI Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. М.: Стройиздат. 1965. С. 74–82. 290-298
12. **Жемочкин Б. Н.** Расчет круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. М.: Изд-во ВИА РККА им. Куйбышева, 1938. 135 с.
13. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.: ФМ, 1962. 708 с.
14. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
15. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит., 1983. 752 с.
16. **Шматкова А. А.** Контактные задачи для полупространства, сложные в плане области контакта. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.

**ДВІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ
ПРО ВТИСНЕННЯ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПУ В ПРУЖНИЙ ШАР**

Подано розв'язок контактної задачі для кільцевого штампу на пружній основі під дією осесиметрично прикладених сили та моменту. Розрахунок зроблено методом ортогональних поліномів з використанням спеціальної апроксимації ядра інтегрального рівняння для шару. Приведені числові результати.

Ключові слова: контактна задача, кільцевий штамп, пружний шар, сила, момент.

**TWO CONTACT PROBLEMS OF A RING PUNCH
INTO THE ELASTIC LAYER**

The solution of the contact problem for an ring stamp on an elastic layer under the action of axisymmetric applied force and moment is given. The calculation is performed by the method of orthogonal polynomials using a special approximation of the kernel of the integral equation for the layer. Numerical results are given.

Keywords: contact problem, ring stamp, elastic layer, force, moment.

The article considers two contact problems for a ring punch that lies without friction on a hinge-supported layer and is loaded with an axisymmetrically applied force and moment. These two problems are reduced to two integral equations for the unknown laws of the distribution of contact stresses under the bottom of the ring punch. The kernel of integral equations is an improper integral obtained earlier by V. M. Alexandrov. Using the method of special approximation, the kernel is expressed as a Boussinesq solution and a double series in terms of the associated Legendre functions. The unknown distribution law of contact stresses in the form of series of Legendre polynomials with a weight in the axisymmetric case and associated Legendre functions with a weight under the action of the moment, and with using of G. Ya. Popov's method of orthogonal polynomials is given. The tasks are reduced to infinite systems of linear algebraic equations for the unknown coefficients in the laws of distribution of contact stresses, which are solved by the truncation method.

Two examples are considered. The first example provides a solution to the axisymmetric problem of the effect of a force on a ring punch. A comparison of the obtained solution with a known solution for a half-space has been carried out. In the second example is considered the effect of the moment on the ring punch and the comparison with the known decision of F. N. Borodacheva for a half-space is made.

REFERENCES

1. **Aleksandrov V. M.** Axisymmetric problem of the action of a ring stamp on an elastic half-space // MTT. 1967. No 4. P. 108–116. (in Russian).
2. **Aleksandrov V. M.** The interaction of a flat oblique ring stamp with an elastic half-space // PMM. 1996. Vol. 60. No 1. P.132–139. (in Russian).
3. **Aleksandrov A. V., Potapov V. D.** Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Vysha Shkola, 1990. 400 c. (in Russian).
4. **Bosakov S. V.** Ritz method in contact problems of the theory of elasticity. Brest: BrGTU Publishing House, 2006. 108c. (in Russian).
5. **Borodacheva F. N.** On the indentation of a ring punch into an elastic half-space due to the action of vertical eccentric force // Izv. universities, Building and architecture. 1969. No 8. P. 15–19. (in Russian).
6. **Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A.** Non-classical mixed problems of the theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1974. 456 c. (in Russian).
7. **Generalova N. V., Kovalenko E. V.** On the indentation of an annular stamp in the elastic layer with a thin reinforcing coating // MTT. 1999. No. 3. P. 27–33. (in Russian).
8. **Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I.** Calculation of structures on an elastic basis. Moscow: Stroizdat, 1984. 679 p. (in Russian).
9. **Gradstein I. S., Ryzhik I. M.** Tables of integrals of sums, series and products. Moscow: FM, 1963.1100 p. (in Russian).
10. **Yegorov K. E.** To the question of the calculation of the bases under the foundation with the bottom ring shape // Sat tr. NIIOSP "Soil Mechanics". Moscow: Gosstroyizdat, 1958. No 34. P.34–57 (in Russian).
11. **Yegorov K. E.** Calculation of the base under the foundation with the sole ring shape. Reports to the VI International Congress on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Moscow: Stroizdat. 1965. p.74-82. 290-298 (in Russian).
12. **Zhemochkin B. N.** Calculation of round plates on an elastic base on a symmetrical load. Moscow: Publishing House of the Red Army VIA them. Kuibyshev, 1938. 135 p. (in Russian).
13. **Kantorovich L. V., Krylov V. I.** Approximate methods of higher analysis. Moscow: FM, 1962. 708 p. (in Russian).
14. **Popov G. Ya.** Concentration of elastic stresses near dies, cuts, thin inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka, 1982. 344 p. (in Russian).
15. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev, O. I.** I Integrals and series. Special functions. Moscow: FM Nauka, 1983. 752 p. (in Russian).
16. **Shmatkova A. A.** Contact tasks for half-space, difficult in terms of contact area. Mechanics of contact interactions. Moscow: Fizmatlit, 2001. 672 p. (in Russian).

Друкується за рекомендацією програмного комітету VII Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 23-26 травня 2019 р. м. Запоріжжя.

*Белорусский национальный
Технический университет,
РУП «Институт БелНИИС»,
Минск, Республика Беларусь*

Надійшла до редколегії 02.04.19