

DOI 10.15421/4220015
УДК 539.3

О. В. Михаїл, В. В. Лобода, д-р фіз.-мат. наук

ПРО СПОСІБ ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ

Запропонована модель для визначення параметрів руйнування тріщини зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Модель основана на введенні зон пластичності на продовженні тріщини та знаходженні локальної та глобальної складових швидкості звільнення енергії. Комбінація цих складових дозволяє без знаходження довжини пластичної зони знайти необхідний критичний параметр, що визначає розвиток тріщини. Підтвердження запропонованої методики продемонстровано шляхом застосування аналогічної моделі для тріщини типу I в однорідному матеріалі.

Ключові слова: біматеріал, тріщина між двома матеріалами; зона передруйнування.

Вступ. Дослідження внутрішніх та міжфазних тріщин є першочергово важливими для практики, оскільки такі дефекти часто є причиною механічних руйнувань конструкцій. Існує кілька критеріїв руйнування, що визначають можливість розвитку тріщини, серед яких відзначимо енергетичний критерій Гріффітса [6] та деформаційний критерій Леонова – Панасюка – Дагдейла [2, 4]. Детальне обговорення деформаційного критерію проведено в [3], а для тріщини між двома матеріалами можливості його використання проаналізовані в [1]. Реалізація енергетичного критерію для тіл скінченних розмірів зараз найчастіше проводиться з використанням інваріантного інтеграла Черепанова – Райса та методу скінченних елементів (МСЕ). В даній роботі продемонстровано спільне використання вказаних вище критеріїв та вказані способи знаходження швидкості звільнення енергії з їх використанням.

Тріщина типу I. Для ілюстрації методики, що пропонується, розглянемо модель, аналогічну до моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [2, 4], яка була розвинута при дослідженні плоского напруженого стану тонкої пластини з тріщиною. Відомо, що в цьому випадку на продовженнях тріщини розвиваються тонкі зони пластичності і значить фактично задача стає пружно-пластичною. Але метод, запропонований в [2, 4] дозволяє звести пружно-пластичну задачу до задачі лінійної механіки руйнування з невідомою довжиною зони ослаблених міжчастинних зв'язків (передруйнування), якою моделюється зона пластичності.

Для опису цієї моделі, розглянемо спочатку нескінченну однорідну ізотропну пластину послаблену ізольованою прямолінійною тріщиною

$2l_0$ (рис. 1). Нехай у нескінченно віддалених точках пластини прикладені зовнішні розтягувальні напруження p , направлені перпендикулярно до лінії розміщення тріщини.

Віднесемо цю пластину до прямокутної системи декартових координат xOy , вважаючи, що товщина пластини дорівнює одиниці, а тріщина розташована вздовж осі x на відрізку $|x| \leq l_0$ (рис. 1). Зазначимо, що якими б малими не були напруження p , в околі кінців реальної тріщини напруження $\sigma_y(x, 0)$, визначені методами лінійної теорії пружності, перевищують межі крихкої міцності матеріалу, тобто в цій частині тіла виникають області послаблених зв'язків. З симетрії задачі та властивостей δ_c -моделі [3], ці області можна розглядати як розрізи вздовж осі x при $l_0 \leq |x| \leq l$, протилежні береги яких притягуються з напруженням σ_0 . Значення параметра l є невідомим.

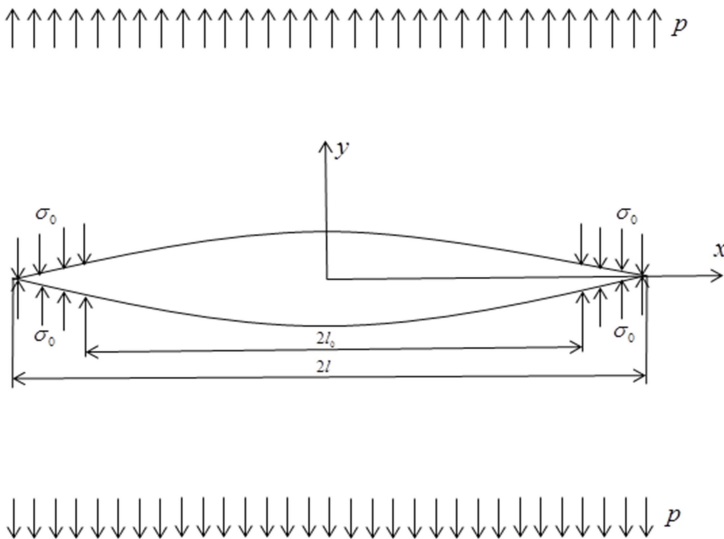


Рис. 1 — Тріщина в однорідному матеріалі з областями послаблених міжчастинних зв'язків

Таким чином, задача про напружено-деформований стан в пластині з тріщиною зводиться до наступної задачі математичної теорії пружності. В пружній площині xOy (рис. 1) маємо розріз довжиною $2l$ ($-l \leq x \leq l$). На поверхні цього розрізу діє напруження

$$\tau_{xy}(x,0)=0; \quad \sigma_y(x,0)=\begin{cases} 0, & |x|\leq l_0; \\ \sigma_0, & l_0\leq|x|\leq l, \end{cases} \quad (1)$$

а в нескінченно віддалених точках площини $\sigma_y(x,\infty)=p$. Віднімаючи від напруженого стану, який при цьому виникає, однорідний напружений стан $\sigma_x=\tau_{xy}=0$, $\sigma_y(x,y)=p$, отримаємо деякий допоміжний напружений стан, зникаючий на нескінченності. На поверхні розрізу цей стан визначається граничними умовами

$$\tau_{xy}(x,0)=0; \quad \sigma_y(x,0)=\begin{cases} -p, & |x|\leq l_0; \\ \sigma_0-p, & l_0\leq|x|\leq l, \end{cases} \quad (2)$$

а на нескінченності всі компоненти допоміжного напруженого стану прямують до нуля.

Розв'язок сформульованої задачі лінійної механіки руйнування наведений в [2, 3]. Зокрема, переміщення верхнього берега тріщини та нормальне напруження на її продовженні визначаються формулами

$$v(x,0)=2\pi c p \sqrt{l^2-x^2}+c\sigma_0 \times \\ \times \left\{ (x-l_0)\Gamma(l,x,l_0)-(x+l_0)\Gamma(l,x,-l_0)-4\sqrt{l^2-x^2} \arccos \frac{l_0}{l} \right\}, \quad (3)$$

$$|x|\leq l;$$

$$\sigma_y(x,0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-l^2}} \left\{ \pi(p-\sigma_0)(x-\sqrt{x^2-l^2})+2\sigma_0 x \arcsin \frac{l_0}{l} + \right. \\ \left. +\sigma_0 \sqrt{x^2-l^2} \times \left[\arcsin \frac{l^2-xl}{l(x-l_0)} - \arcsin \frac{l^2+xl}{l(x+l_0)} \right] \right\}, \quad |x|\geq l, \quad (4)$$

де

$$c=\frac{1}{\pi E}, \quad \Gamma(l,x,\xi)=\ln \frac{l^2-x\xi-\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}}{l^2-x\xi+\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}} \quad (|x|\leq l) \quad (5)$$

На основі формули (4) коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$K_1=\lim_{x_1\rightarrow a^+0} \sqrt{2\pi(x_1-l_0)} \sigma_y(x_1,0)$$

визначається формулою

$$K_1=\sqrt{\pi l} \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right), \quad (6)$$

а на основі формули (3) переміщення верхнього берега тріщини в її початковій вершині наступне

$$v(l_0, 0) = 2\pi c p \sqrt{l^2 - l_0^2} + c \sigma_0 \left\{ -2l_0 \Gamma(l, x, -l_0) - 4\sqrt{l^2 - x^2} \arccos \frac{l_0}{l} \right\},$$

що після перетворень приводить до виразу

$$v(l_0, 0) = 2c \left\{ \pi \sqrt{l^2 - l_0^2} \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) - 2l_0 \sigma_0 \ln \frac{l_0}{l} \right\}. \quad (7)$$

Враховуючи, що при $x \rightarrow l + 0$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x-l)}} = \left(p - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arccos \frac{l_0}{l} \right) \sqrt{\frac{l}{2(x-l)}},$$

а при $x \rightarrow l - 0$

$$v'(x, 0) = 2c \left(2\sigma_0 \arccos \frac{l_0}{l} - \pi p \right) \sqrt{\frac{l}{2(l-x)}},$$

одержуємо, що швидкість звільнення енергії (ШЗЕ), пов'язаної з КІН K_1 визначається формулою:

$$G_1 = \pi c K_1^2.$$

Згідно з термінологією роботи [5] ця складова називається локальною ШЗЕ. Складова ж ШЗЕ, що пов'язана з напруженням σ_0 , наступна:

$$G_2 = 2\sigma_0 v(l_0, 0) = 4c\sigma_0 \sqrt{\pi \frac{l^2 - l_0^2}{l}} K_1 - 8cl_0 \sigma_0^2 \ln \frac{l_0}{l}.$$

Ця ШЗЕ визначається роботою, виконаною напруженням σ_0 при розриві матеріалу на проміжку (l_0, l) . Згідно з [5] ця складова називається глобальною ШЗЕ.

Повна величина ШЗЕ визначається формулою:

$$G = G_1 + G_2. \quad (8)$$

Напруження $\sigma_y(x, 0)$, представлені формулою (4), при довільному значенні параметру l є необмеженим, якщо $x \rightarrow l$. Але вважаючи, що $x = l$ і прирівнюючи отриманий в цьому випадку вираз в фігурних дужках (4) до нуля, отримуємо наступну формули для визначення параметра l_* , при якому $\sigma_y(x, 0)$ є обмеженим:

$$l_* = l_0 \sec \frac{p\pi}{2\sigma_0}. \quad (9)$$

В табл.1 наведені значення G_1 , G_2 та G , отримані для різних значень l , що вибирались з проміжку $[l_0, l_*]$, при $l_0 = 1\text{м}$, $p = 10^6\text{Па}$, $\sigma_0 = 20p$. В цьому випадку $l_* = 1.00309\text{м}$, $G = G_1 = 157.24\text{ Н/м}$ при $l = l_0$ і $G = G_2 = 157.08\text{ Н/м}$ при $l = l_*$.

Таблиця 1 – Зміна локальної та глобальної ШЗЕ при $l_0 = 1\text{м}$, $p = 10^6\text{Па}$, $\sigma_0 = 20p$ та різних положеннях точки $l \in [l_0, l_*]$

$10^3(l-l_0)/l_0$	$G_1, \text{Н/м}$	$G_2, \text{Н/м}$	$G, \text{Н/м}$
0	157.08	0	157.08
0.31	73.3857	83.7322	157.118
0.62	47.949	109.199	157.148
0.93	32.091	125.081	157.172
1.24	21.189	136.002	157.192
1.55	13.4543	143.754	157.208
1.86	7.96726	149.253	157.22
2.16	4.18337	153.046	157.23
2.47	1.74744	155.489	157.236
2.78	0.412837	156.827	157.24
3.09	0	157.241	157.241

Як видно з табл. 1 значення G , отримані для значень l , що знаходяться в проміжку $[l_0, l_*]$ практично не відрізняються від значень G в крайніх точках вказаного відрізка, тобто G є практично інваріантним по відношенню до положення точки l .

Слід також відзначити, що для різних значень σ_0 величини l_* , що визначаються формулою (9), також будуть різними, але величина $G_2 = 2\sigma_0\delta_2$, де $\delta_2 = 2\nu(l_0, 0)$, є глобальною ШЗЕ і є величиною постійною. Вона дорівнює локальній ШЗЕ для відповідної тріщини Гріффітса.

Зсувна тріщина. Аналогічний аналіз можна провести для тріщини, при деформації якої визначальними є зсувні напруження. Розглянемо для цього задачу, схема якої зображена на рис. 2. Тобто має місце контакт двох ізотропних прямокутників з механічними характеристиками E_1, ν_1 (верхній) і E_2, ν_2 (нижній). Нижній прямокутник жорстко закріплений знизу, а на сторони верхнього діють нормальні напруження q_1 і q_2 . Вважається, що на частинах $a < |x| < b$ інтерфейсу виникло розшарування, тобто утворились тріщини, які при $q_1 < 0$ відносяться до зсувного

типу. Таке розшарування може виникати у зв'язку з високою концентрацією напружень у кутових точках з'єднання, що розглядається.

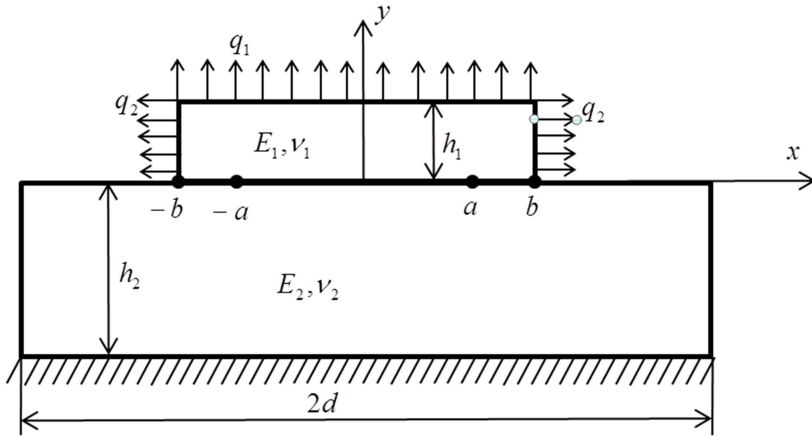


Рис. 2 – Біматеріальна область з тріщинами зсуву біля кутових точок

Застосуємо для аналізу цих тріщин модель, аналогічну моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла, але в її зсувному варіанті. Введемо на продовженнях тріщин $c < |x| < a$ зони пластичності. Ці зони будемо моделювати розрізами, в яких діють зсувні напруження величини τ_0 . Положення точок $-c$ і c вибирається довільним (Рис. 3).

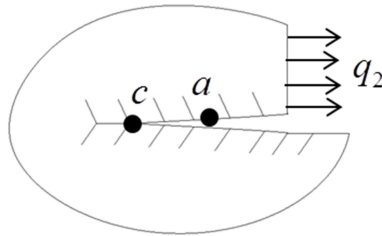


Рис.3 – Конфігурація привершинної зони тріщини

Розв'язок цієї задачі будемо розшукувати методом скінченних елементів. На рис. 4 показана скінченно-елементна сітка, яка згущується при підході до вершин тріщин (рис. 5). Для аналізу використані восьми-вузлові елементи.

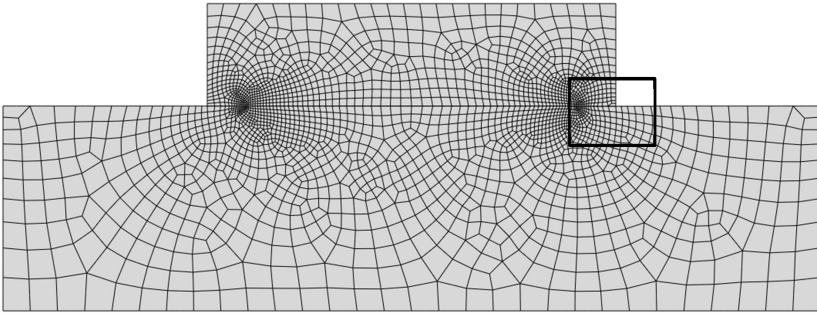


Рис. 4 – Розбиття області на скінченні елементи

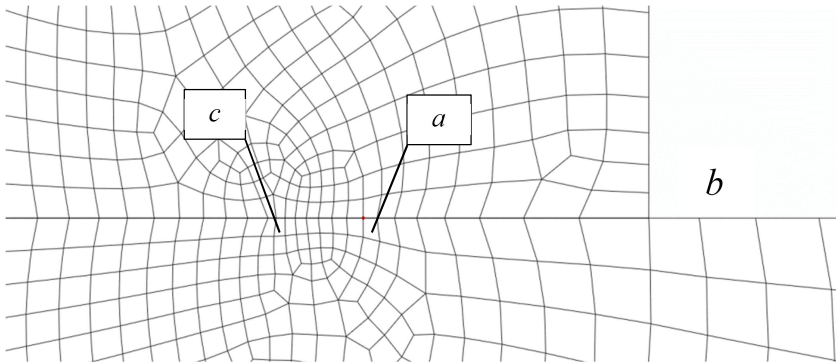


Рис. 5 – Скінченно-елементна сітка в околі вершини тріщини

Вибирались $d=0,20$ м; $b=0,1$ м; $a=0,085$ м; $c=0,08$ м; $h_1 = 0,02$ м;
 $h_2 = 0,04$ м; $E_1 = 10^9$ Н/м²; $\nu_1 = 0,3$; $E_2 = 10^{12}$ Н/м²; $\nu_2 = 0,3$;
 $q_1 = -2 \times 10^5$ Н/м²; $q_2 = 5 \times 10^5$ Н/м².

Значення τ_0 варіювалось. Обчислювались значення інваріантного інтегралу J в новій вершині тріщини $(c,0)$, горизонтальне переміщення $u_1(a,0)$ початкової вершини тріщини, значення глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a,0)$, а також сумарне значення ШЗЕ

$$G = J + G_{gl} . \quad (9)$$

Результати розрахунків наведені у табл. 2.

Таблиця 2 – Значення J -інтегралу в новій вершині тріщини, переміщення $u_1(a, 0)$, глобальної ШЗЕ $G_{gl} = \tau_0 u(a, 0)$ та сумарної ШЗЕ G для різних значень τ_0 .

$10^{-4} \tau_0$, H / M^2	0	20	40	60	75	90	102
J , H / M	5,36	3,40	1,91	0,89	0,45	0,27	≈ 0
$10 \cdot u_1(a, 0)$, м		9,69	8,47	7,25	6,34	5,43	5,11
G_{gl} , H / M	0	1,93	3,39	4,35	4,76	4,88	5,22
G , H / M	5,36	5,33	5,30	5,24	5,21	5,16	5,22

З результатів табл. 2 видно, що сумарне значення ШЗЕ є практично незалежним від величини τ_0 (максимальна розбіжність значень складає 2,6%). Зокрема, при $\tau_0 = 1,02 \times 10^6 \text{ H / M}^2$ локальна ШЗЕ в точці а обертається в нуль, тобто напруження в цій точці стає скінченним, а значення глобальної ШЗЕ добре узгоджується з відповідним значенням локальної ШЗЕ при відсутності пластичної зони. Отримане значення τ_0 являє собою межу текучості такого матеріалу інтерфейсу на зсув, для якого при вибраному значенні s напруження в цій точці є скінченним. Проведений аналіз показує, що при використанні запропонованої моделі не обов'язково заздалегідь визначати положення точки s , а достатньо для кожного конкретного τ_0 і s визначити J і G_{gl} . Сума цих величин з високим ступенем точності буде рівна ШЗЕ для заданої тріщини.

Висновки. Для тріщини типу I в однорідному матеріалі розглянути зони ослаблених міжчастинних зв'язків на продовженнях тріщини довільної довжини. Обчислено локальну та глобальну швидкості звільнення енергії. Для конкретного матеріалу та зовнішнього навантаження показано, що сума цих значень практично не змінюється. Розглянуто також тріщину зсуву, що виникає біля кутових точок області, складеної із двох різнорідних прямокутників різного розміру. Введенні зони пластичності на продовженні тріщини та знайдені локальна і глобальна складові швидкості звільнення енергії для різних значень зсувного напруження в цих зонах, величина якого визначається характеристиками адгезійного шару. Показано, що комбінація складових швидкості звільнення енергії дозволяє без знаходження довжини пластичної зони знайти необхідний критичний параметр, який визначає можливість розвитку тріщини.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред, // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 1. С. 63–68.

2. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механика. 1959. Т. 5. С. 391–401.
3. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К.: Наука думка, 1968. 248 с.
4. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. Vol. 8. No 2. P. 100–104.
5. **Gao, H., Zhang, T.Y., Tong, P.,** Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. 1997. Solids 45. P. 491–510.
6. **Griffith A. A.** The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1920. Vol. A221. P. 163–198.

УДК 539.3

А. В. Михаил, В. В. Лобода, д-р физ.-мат. наук

О СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕЩИН МЕЖДУ ДВУМЯ МАТЕРИАЛАМИ

Предложена модель для определения параметров разрушения трещины сдвига, которая возникает возле угловых точек области, составленной из двух разнородных прямоугольников разного размера. Модель основана на введении зон пластичности на продолжении трещины и нахождении локальной и глобальной составляющих скорости освобождения энергии. Комбинация этих составляющих позволяет без нахождения длины пластической зоны найти необходимый критический параметр, определяющий развитие трещины. Подтверждение предложенной методики продемонстрировано путем применения аналогичной модели для трещины типа I в однородном материале.

Ключевые слова: биматериал; трещина между двумя материалами; зона предразрушения.

UDC 539.3

O. V. Mikhail, V. V. Loboda, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

ON THE WAY OF THE FRACTURE PARAMETERS DETERMINATION FOR CRACKS BETWEEN TWO MATERIALS

A model is proposed to determine the parameters of shear crack failure that occurs near the corner points of an area composed of two dissimilar rectangles of different sizes. The model is based on the introduction of zones of plasticity on the continuation of the crack and finding the local and global components of the energy release rate. The combination of these components allows to find the necessary critical parameter that determines the development of the crack without finding the length of the plastic zone. Confirmation of the proposed technique is demonstrated by applying a similar model for type I cracks in a homogeneous material.

Keywords: biomaterial; crack between two materials; pre-fracture zone.

Introduction. Investigations of internal and interfacial cracks are of paramount importance for practice, as such defects are often the cause of me-

chanical failure of structures. There are several failure criteria that determine the possibility of crack development, among which we note the Griffiths energy criterion [5] and the Leonov – Panasyuk – Dagdale deformation criterion [1, 2]. A detailed discussion of the deformation criterion was conducted in [3], and for the gap between two materials, the possibilities of its use were analyzed in [4]. The realization of the energy criterion for bodies of finite dimensions is now most often carried out using the invariant Cherepanov-Rice integral and the finite element method (FEM). This paper demonstrates the joint use of the above criteria and the methods of finding the energy release rate by using them.

The crack mode I. A crack $|x| \leq l_0, y = 0$ in an infinite homogeneous isotropic plate under remote external tensile stresses is considered in this section. The zones $l_0 \leq |x| \leq l$ of weakened interparticular links with prescribed normal stresses in these zones are introduced at the crack continuations. Analytical solution of the correspondent problem is found for any value of l and local and global energy release rates are found. The variation of these energy release rates with respect to l is analyzed and the results are presented in table form.

Sliding crack. A similar analysis was performed for a crack, the deformation of which is determined mostly by shear stresses. The contact of two isotropic rectangles with mechanical characteristics E_1, ν_1 (upper one) and E_2, ν_2 (lower) is considered. The lower rectangle is rigidly fixed by the lower side, and normal stresses q_1 and q_2 act on the sides of the upper one. It is believed that stratification occurred on parts $a < |x| < b$ of the interface, i.e., the cracks were formed, which for $q_1 < 0$ belong to the shear type. We use a model similar to the Leonov – Panasyuk – Dagdale model for the analysis of these cracks, but in its shear version. We enter the plasticity zones on extensions $c < |x| < a$ of the cracks. These zones will be modeled by sections in which shear stresses of magnitude τ_0 act. The position of the points $-c$ and c was chosen arbitrarily. The solution of this problem was found by means of finite element method.

Conclusions. For a crack type I in a homogeneous material, the zones of weakened interconnections on the crack extensions of arbitrary length are considered. Local and global energy release rates are calculated. For a specific material and external load, it is shown that the sum of these values does not change. Also a shear crack that occurs near the corner points of an area composed of two dissimilar rectangles of different sizes is considered. The zones of plasticity on the continuation of the cracks are introduced. The local and global components of the energy release rate are found for different values of shear stress in these zones, the value of which is determined by the characteristics of the adhesive layer. It is shown that the combination of the energy release rate components allows to find the required critical

parameter that determines the possibility of the crack development without finding the length of the plastic zone.

REFERENCES

1. **Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.** On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media // International Applied Mechanics. 1999. Vol. 35. No. 1. P. 58–63. (in Russian).
2. **Leonov M.Ya., Panasyuk V.V.** Development of the smallest cracks in a rigid body // Appl. Mechanics. 1959. No. 4. P. 391–401. (in Russian).
3. **Panasyuk V.V.** Limited equilibrium of brittle bodies with cracks., Kiev: Naukova Dumka 1968 (translation in English: Detroit. Michigan Inform. Serv. 1971). (in Russian).
4. **Dugdale D.S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. Vol. 8. No 2. P. 100–104.
5. **Gao H., Zhang T.Y., Tong P.** Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. 1997. Solids 45. P. 491–510.
6. **Griffith A.A.** The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. 1920. Vol. A221. P. 163–198.

*Дніпровський національний університет
Імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 05.10.2020