

# МАШИНОСТРОЕНИЕ

## ТЕХНОЛОГИЯ МЕТАЛЛОВ

### МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

УДК 539.3

**В.Ф. Оробей**, д-р техн. наук, проф.,  
**Г.В. Кострова**, канд. техн. наук, доц.,  
**В.Н. Пурич**, канд. техн. наук, доц.,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ АРОК

*В.Ф. Оробей, Г.В. Кострова, В.Н. Пурич.* **Метод граничних елементів в задачах стійкості арок.** Розглянуто задачі стійкості арок, які мають змінні параметри та нетрадиційне навантаження. Розвинено методіку застосування методу граничних елементів для розв'язання наведених задач. Результати відрізняються високою точністю та достовірністю. Викладено алгоритм формування матриць крайових задач стійкості арок і кілець.

*В.Ф. Оробей, Г.В. Кострова, В.Н. Пурич.* **Метод граничных элементов в задачах устойчивости арок.** Рассмотрены задачи устойчивости арок, которые имеют переменные параметры и нетрадиционную нагрузку. Развита методика применения метода граничных элементов для решения приведенных задач. Результаты отличаются высокой точностью и достоверностью. Изложен алгоритм формирования матриц крайовых задач устойчивости арок и колец.

*V.F. Orobey, G.V. Kostrova, V.N. Purich.* **Boundary-element method in arches' stability problems.** The stability problems of archs having variable parameters and unconventional load are considered. The procedure of applying the boundary element method for solving the above problems is developed. The results are notable for high precision and reliability. The algorithm of forming the matrices for boundary problems of archs' and rings' stability is expounded.

В различных отраслях машиностроения, строительстве, мостах, туннелях широко используются арки и арочные системы. Расчет на устойчивость этих конструкций предшествует другим расчетам. Поэтому весьма актуальны новые, более эффективные методики исследования устойчивости арок. Этой теме посвящено много работ [1...4]. Их анализ показывает, что для круговых арок задачи устойчивости решаются в замкнутом виде только при равномерно распределенной по всей длине радиальной нагрузке либо сосредоточенной силе, приложенной в плоскости симметрии. Если радиальная нагрузка расположена на части арки, а сосредоточенные силы имеют произвольные координаты, то в этом случае, а также для арок некругового очертания приходится применять численные методы, где необходимо доказывать достоверность результатов. От подобных сложностей свободен численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ) [5], где можно учесть различные граничные условия и произвольные законы изменения нагрузки, жесткости и радиуса кривизны арок.

*Решение дифференциального уравнения устойчивости круговой арки.* В общем случае нагружения у арки могут быть участки, где нагрузка отсутствует. Поэтому арки при потере устойчивости в своей плоскости испытывают два изгиба: статический, вызванный бифуркацией упругой линии, и изгиб нагруженного участка после превышения нагрузкой критического значения. Решение уравнения статического изгиба имеет вид

		1	2	3	4	5	6		
$EI\upsilon(\alpha)$	1	$a_{11}$	$a_{12}$	$-a_{13}$	$-a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$	$EI\upsilon(0)$	,
$EI\varphi(\alpha)$	2		$a_{22}$	$-a_{23}$	$-a_{13}$		$a_{26}$	$EI\varphi(0)$	
$M(\alpha)$	3			$a_{22}$	$a_{12}$		$-a_{36}$	$M(0)$	
$Q(\alpha)$	4				$a_{11}$		$-a_{46}$	$Q(0)$	
$E Au(\alpha)$	5	$a_{51}$	$a_{52}$	$-a_{53}$	$-a_{54}$	$a_{11}$	$a_{56}$	$E Au(0)$	
$N(\alpha)$	6				$-a_{64}$		$a_{11}$	$N(0)$	

где  $EI, EA$  — поперечная и продольная жесткости сечения арки;  
 $\upsilon(\alpha), u(\alpha)$  — радиальное и нормальное перемещение оси арки;  
 $\varphi(\alpha)$  — угол поворота сечения;  
 $M(\alpha), Q(\alpha), N(\alpha)$  — изгибающий момент, поперечная и нормальная силы в сечении;  
 $\alpha$  — угловая координата.

Фундаментальные ортонормированные функции  $a_{11}, \dots, a_{64}$  [5] для задач данной работы нужно отбросить слагаемые, учитывающие деформацию растяжения оси арки.

Дифференциальное уравнение устойчивости круговой арки в своей плоскости известно и записывается в виде [4]

$$M'''(\alpha) + (1 + qR^3/EI)M'(\alpha) = 0, \quad (2)$$

где  $q$  — равномерно распределенная радиальная нагрузка, направленная всегда перпендикулярно оси арки;

$R = \text{const}$  — радиус кривизны оси арки.

Решение уравнения (2) может быть представлено в матричной форме

		1	2	3	4	5	6		
$EI\upsilon(\alpha)$	1	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	$EI\upsilon(0)$	,
$EI\varphi(\alpha)$	2		$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$A_{26}$	$EI\varphi(0)$	
$M(\alpha)$	3			$A_{22}$	$A_{34}$		$-A_{36}$	$M(0)$	
$Q(\alpha)$	4				$A_{44}$		$-A_{46}$	$Q(0)$	
$E Au(\alpha)$	5	$A_{51}$	$A_{52}$	$-A_{53}$	$-A_{54}$	$A_{11}$	$A_{56}$	$E Au(0)$	
$N(\alpha)$	6				$-A_{64}$		$A_{44}$	$N(0)$	

где фундаментальные ортонормированные функции принимают вид

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \cos \alpha; A_{12} = R \sin \alpha; A_{13} = R^2(1 - \cos \alpha); A_{14} = R^3(-b \sin \alpha + \sin b\alpha)/b(1 - b^2); \\
A_{15} &= EI(-\sin \alpha)/EA; A_{16} = R^3[(1 - b^2) + b^2 \cos \alpha - \cos b\alpha]/b^2(1 - b^2); A_{22} = 1; \\
A_{23} &= R\alpha; A_{24} = R^2(1 - \cos b\alpha)/b^2; A_{26} = R^2(\alpha b - \sin b\alpha)/b^3; b = \sqrt{1 + qR^3/EI}; \\
A_{34} &= R \sin b\alpha/b; A_{36} = R(1 - \cos b\alpha)/b^2; A_{44} = \cos b\alpha; A_{46} = \sin b\alpha/b; \\
A_{51} &= EA \sin \alpha/EI; A_{52} = EAR(1 - \cos \alpha)/EI; A_{53} = EAR^2(\alpha - \sin \alpha)/EI; \\
A_{54} &= EAR^3[(1 - b^2) + b^2 \cos \alpha - \cos b\alpha]/EIb^2(1 - b^2); \\
A_{56} &= EAR^3[\alpha b(1 - b^2) + b^3 \sin \alpha - \sin b\alpha]/EIb^3(1 - b^2); A_{64} = -b \sin b\alpha.
\end{aligned} \tag{4}$$

Данная система функций при  $q \rightarrow 0$  переходит в фундаментальные функции статического изгиба [5], что является необходимым условием отсутствия ошибок при ее построении. Критические значения нагрузки определяются из уравнения МГЭ

$$|\mathbf{A}_*(q_{кр})| = 0 \tag{5}$$

Решение задач устойчивости от нетрадиционных нагрузок.

Рассмотрим задачи, где равномерно распределенная радиальная нагрузка задана на части арки.

*Задача 1.* Арка (рис. 1) разбивается на 3 части: 0–1 и 2–3 испытывают статический изгиб, а 1–2 — изгиб, связанный с потерей устойчивости. В матрице  $\mathbf{A}_*(q_{кр})$  краевой задачи устойчивости следует использовать матрицу (1) для участков 0–1; 2–3 и матрицу (3) для участка 1–2. В граничных точках 1, 2 нужно учесть непрерывность векторов состояния арки, а в опорных точках 0, 3 — краевые условия. В матрицах МГЭ эти условия учитываются точно. Из матрицы  $\mathbf{X}_*(0)$  следует, что в матрице устойчивости  $\mathbf{A}_*(q_{кр})$  нужно обнулить 1, 3 и 5 столбцы. Параметры матрицы  $\mathbf{Y}(\alpha_{гр})$  переносятся в матрицу  $\mathbf{X}_*(0)$ . При этом в обнуленную в отдельных столбцах матрицу  $\mathbf{A}_*(q_{кр})$  вводятся компенсирующие элементы в соответствии с алгоритмом МГЭ [5] и она примет вид (10). Аналогично учитываются другие граничные условия. Значение первых критических сил в виде коэффициентов  $K$  формулы

$$q_{кр} = (b^2 - 1)EI/R^3 = KEI/R^3 \tag{6}$$

представлены в табл. 1, где  $K_1$  для шарнирно опертой арки;  $K_2$  — жестко защемленной;  $K_3$  — жестко защемленной и шарнирно опертой. К неожиданным результатам следует отнести снижение критических нагрузок для неполностью загруженной арки по сравнению с полностью загруженной. При шарнирном опирании (см. рисунок 1) снижение составляет 10 %, для жестко защемленной арки — 53,8 % и 17,1 % для арки с защемленной и шарнирной опорами ( $\alpha_1 = \pi/4$ ;  $\alpha_2 = \pi/2$ ;  $\alpha_3 = \pi/4$ ).

Таблица 1

Коэффициенты критических нагрузок частично нагруженной арки

$\alpha_1$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/12$	$\pi/2$
$\alpha_2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
$\alpha_3$	$\pi/2$	$5\pi/12$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/12$	0
$K_1$	4,88	3,51	2,88	2,70	2,88	3,51	4,88
$K_2$	$\infty$	179,01	5,47	3,69	5,47	179,01	$\infty$
$K_3$	$\infty$	$\infty$	5,49	4,41	4,18	4,52	5,52

*Задача 2.* Арка нагружена сосредоточенной радиальной силой  $F$  с произвольной координатой. Достаточно точной моделью учета сосредоточенной силы является выражение

$$q(\alpha) = F\delta(\alpha - \alpha_F), \quad (7)$$

где  $\delta(\alpha - \alpha_F)$  — дельта-функция Дирака со сдвигом;

$\alpha_F$  — координата силы  $F$ .

Однако применить эту модель в уравнении устойчивости (2), где отсутствуют интегральные преобразования, весьма затруднительно. В этой связи воспользуемся приближенным подходом, когда угол  $\alpha_2$  (см. рисунок 1) уменьшается до конечного малого значения. Критическая сила в этом случае будет равна

$$F_{кр} = q_{кр} R\alpha_2 = KEI/R^2. \quad (8)$$

Величины  $\alpha_2$  для конкретных расчетных схем арок всегда могут быть определены. В расчетах критических сил принято  $\alpha_2 = 0,01$  и  $0,001\alpha_{гр}$ .

$X_*(0) =$	1	$EI\upsilon^{0-1}(0) = 0; EI\varphi^{2-3}(\alpha_3)$	;	$Y(\alpha_{гр}) =$	1	$EI\upsilon^{0-1}(\alpha_1) = EI\upsilon^{1-2}(0)$	(9)
	2	$EI\upsilon^{0-1}(0)$			2	$EI\varphi^{0-1}(\alpha_1) = EI\varphi^{1-2}(0)$	
	3	$M^{0-1}(0) = 0; Q^{2-3}(\alpha_3)$			3	$M^{0-1}(\alpha_1) = M^{1-2}(0)$	
	4	$Q^{0-1}(0)$			4	$Q^{0-1}(\alpha_1) = Q^{1-2}(0)$	
	5	$E Au^{0-1}(0) = 0; N^{2-3}(\alpha_3)$			5	$E Au^{0-1}(\alpha_1) = E Au^{1-2}(0)$	
	6	$N^{0-1}(0)$			6	$N^{0-1}(\alpha_1) = N^{1-2}(0)$	
	7	$EI\upsilon^{1-2}(0)$			7	$EI\upsilon^{1-2}(\alpha_2) = EI\upsilon^{2-3}(0)$	
	8	$EI\varphi^{1-2}(0)$			8	$EI\varphi^{1-2}(\alpha_2) = EI\varphi^{2-3}(0)$	
	9	$M^{1-2}(0)$			9	$M^{1-2}(\alpha_2) = M^{2-3}(0)$	
	10	$Q^{1-2}(0)$			10	$Q^{1-2}(\alpha_2) = Q^{2-3}(0)$	
	11	$E Au^{1-2}(0)$			11	$E Au^{0-1}(\alpha_2) = E Au^{1-2}(0)$	
	12	$N^{1-2}(0)$			12	$N^{1-2}(\alpha_2) = N^{2-3}(0)$	
	13	$EI\upsilon^{2-3}(0)$			13	$EI\upsilon^{2-3}(\alpha_3) = 0$	
	14	$EI\varphi^{2-3}(0)$			14	$EI\varphi^{2-3}(\alpha_3)$	
	15	$M^{2-3}(0)$			15	$M^{2-3}(\alpha_3) = 0$	
	16	$Q^{2-3}(0)$			16	$Q^{2-3}(\alpha_3)$	
	17	$E Au^{2-3}(0)$			17	$E Au^{2-3}(\alpha_3) = 0$	
	18	$N^{2-3}(0)$			18	$N^{2-3}(\alpha_3)$	

В табл. 2 приведены значения коэффициентов  $K$  при  $\alpha_{гр} = \pi$  и трех граничных условий:  $K_1$  — двухшарнирная арка;  $K_2$  — жестко защемленная;  $K_3$  — с жестко защемленной и шарнирной опорами. Из таблицы следует, что значения критических сил по двум расчетам отличаются незначительно.

Таблица 2

## Коэффициенты критических сил

$K_i$	$\alpha_2$	$\alpha_F$					
		$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$	$3\pi/4$
$K_1$	$0,01\pi$	4,48	2,81	2,02	2,19	2,81	4,48
	$0,001\pi$	4,39	2,78	2,00	2,17	2,78	4,39
$K_2$	$0,01\pi$	5,46	4,27	$\pi$	2,98	4,27	5,46
	$0,001\pi$	5,21	4,15	$\pi$	3,51	4,15	5,21
$K_3$	$0,01\pi$	11,38	5,45	2,75	2,61	2,98	4,26
	$0,001\pi$	10,79	5,32	2,72	2,58	2,94	4,18

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		$a_{12}$		$-a_{14}$		$a_{16}$	$-1$											
2		$a_{22}$		$-aB_{13}$		$a_{26}$		$-1$										
3				$a_{12}$		$-a_{36}$			$-1$									
4				$a_{11}$		$-a_{46}$				$-1$								
5		$a_{52}$		$-a_{54}$		$a_{56}$					$-1$							
6				$-a_{64}$		$a_{11}$						$-1$						
7							$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	$-1$					
8								$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$A_{26}$		$-1$				
9									$A_{22}$	$A_{34}$		$-A_{36}$			$-1$			
10										$A_{44}$		$-A_{46}$				$-1$		
11							$A_{51}$	$A_{52}$	$-A_{53}$	$-A_{54}$	$A_{11}$	$A_{56}$					$-1$	
12										$-A_{64}$		$A_{44}$						$-1$
13													$a_{11}$	$a_{12}$	$-a_{13}$	$-a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$
14	$-1$													$a_{22}$	$-a_{23}$	$-a_{13}$		$a_{26}$
15														$a_{22}$	$a_{12}$			$-a_{36}$
16			$-1$												$a_{11}$			$-a_{46}$
17													$a_{51}$	$a_{52}$	$-a_{53}$	$-a_{54}$	$a_{11}$	$a_{56}$
18					$-1$											$-a_{64}$		$a_{11}$

Задача 3. Рассмотрим задачи устойчивости, когда радиальная нагрузка изменяется по линейным законам:

случай а) (рис. 2)

$$q(\alpha) = q\alpha/\alpha_{гр} \quad (11)$$

и случай б)

$$q(\alpha) = q[2\alpha/\alpha_{гр} + 2H(\alpha - \alpha_{гр}/2) - 4\alpha H(\alpha - \alpha_{гр}/2)/\alpha_{гр}], \quad (12)$$

где  $\alpha$  — текущая координата;

$H(\alpha - \alpha_{гр}/2)$  — единичная функция Хевасайда со сдвигом.

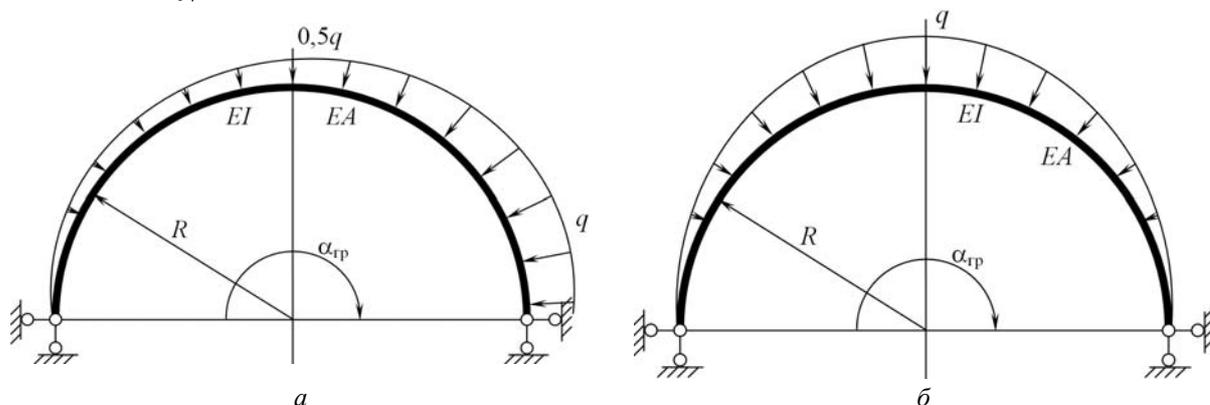


Рис. 2. Арка с линейно возрастающей и убывающей нагрузкой

В этих условиях возникают задачи устойчивости арки для обыкновенного дифференциального уравнения (2) с переменными коэффициентами. Решения таких уравнений можно получить, используя ряды. При этом возникают серьезные математические трудности, которые не всегда можно преодолеть. Если к решению подобных задач привлечь численно-аналитический вариант МГЭ [5], то вся сложность решения сведется к построению компьютерной программы, которая автоматически формировала бы матрицу  $\mathbf{A}_*(q_{\text{гр}})$  уравнения устойчивости (5). Арка разбивается на  $n$  частей, в пределах каждой части  $q_i = \text{const}$ , и можно использовать матрицу (3). На границах всех участков нужно обеспечить непрерывность векторов состояния, а в опорных точках — краевые условия арки. Если арку разбить на три части, то  $\mathbf{A}_*(q_{\text{кр}})$  имела бы вид (10), где диагональные блоки должны быть заняты матрицами (3). При большом  $n$  ступенчатая аппроксимация функции  $q(\alpha)$  будет мало отличаться от заданной функции и значения  $q_{\text{кр}}$  будут близки к точным. В табл. 3 представлены значения коэффициентов  $K$  для задач а), б) (рис. 2), откуда следует, что для арки с шарнирными опорами (рис. 2, а) уменьшение нагрузки в два раза увеличивает критические значения соответственно в два раза. Отметим, что арка разбивалась на 60 участков и дальнейшее увеличение их числа не уточняет критические значения.

Таблица 3

Коэффициенты критических нагрузок арок с  $q(\alpha)$ 

$q(\alpha)$ по формуле (11)								
$\alpha_{\text{гр}}/2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$K_1$	70,77	30,32	16,16	6,05	2,51	1,56	0,88	—
$K_2$	86,96	37,82	20,63	8,40	4,21	3,14	2,43	1,84
$q(\alpha)$ по формуле (12)								
$\alpha_{\text{гр}}/2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$K_1$	39,14	16,77	8,94	3,35	1,39	0,87	0,49	—
$K_2$	70,89	31,23	17,36	7,51	4,16	3,32	2,79	2,41
$K_3$	54,86	23,94	13,12	5,43	2,82	2,16	1,77	2,00

Задача 4. Усложним задачу 3 введением линейно изменяющейся жесткости (рис. 3) по выражению

$$EI(\alpha) = EI \{ (4 - 6\alpha/\alpha_{\text{гр}}) \cdot [1 - H(\alpha - \alpha_{\text{гр}}/2)] + (6\alpha/\alpha_{\text{гр}} - 2) \cdot H(\alpha - \alpha_{\text{гр}}/2) \}. \quad (13)$$

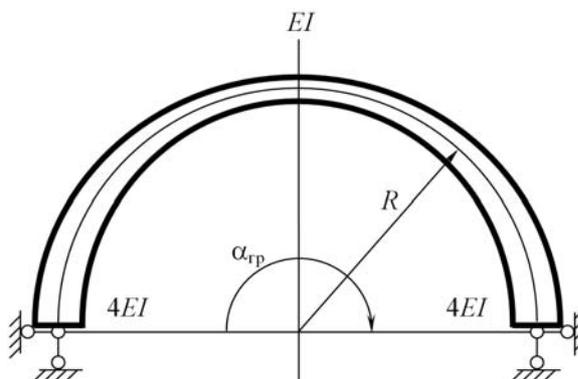


Рис. 3. Арка с переменной жесткостью

В данном случае ступенчатой аппроксимации подвергаются два параметра устойчивости арки — нагрузка  $q$  и поперечная жесткость  $EI$ . Аналогично задаче 3 арка разбивается на 60 частей, для дискретизированной системы формируется матрица  $A_*(q_{кр})$ , критические значения сведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты критических нагрузок арок с  $q(\alpha)$ ,  $EI(\alpha)$ 

$q(\alpha) = 1$ , $EI(\alpha)$ по формуле (13)								
$\alpha_{гр}/2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$K_1$	46,90	20,01	10,72	4,02	1,67	1,04	0,59	—
$K_2$	82,62	36,38	20,20	8,71	4,80	3,81	3,18	2,67
$K_3$	65,12	28,41	15,58	6,45	3,34	2,57	2,10	2,65
$q(\alpha)$ по формуле (11), $EI(\alpha)$ по формуле (13)								
$K_1$	93,16	39,93	21,30	7,99	3,33	2,07	1,17	—
$K_2$	166,63	73,40	40,80	17,64	9,77	7,79	6,55	5,85
$K_3$	118,65	51,65	28,21	11,54	5,84	4,39	3,47	3,05
$q(\alpha)$ по формуле (12), $EI(\alpha)$ по формуле (13)								
$K_1$	53,03	22,72	12,11	4,54	1,89	1,17	0,66	—
$K_2$	88,12	38,74	21,47	9,20	5,01	3,95	3,26	2,69
$K_3$	71,90	31,35	17,17	7,10	3,66	2,81	2,29	2,69

**Задача 5.** Устойчивость кольца. Особенность формирования матрицы  $A_*(q_{кр})$  состоит в том, что столбцы не обнуляются (нет нулевых начальных параметров) и вводятся компенсирующие элементы, обеспечивающие равенство начальных и конечных граничных параметров. Кольцо разбивалось на 100 частей. Критические нагрузки из уравнения (5):  $q_{кр1} = 3EI/R^3$  для  $q(\alpha) = \text{const}$ , что равно точному значению [6];  $q_{кр1} = 5,828EI/R^3$  для нагрузки по формуле (11) и  $q_{кр1} = 6,197EI/R^3$  для нагрузки по (12) (см. рисунок 2). Эти результаты позволяют оценить точность предложенной методики. Погрешность составляет 2,9 % и 3,3 % при условии, что коэффициенты уравнения (2) являются линейными функциями.

Из представленного видно, что методика расчета на устойчивость арок с переменными параметрами, основанная на МГЭ, позволяет эффективно и достаточно точно решать сложные задачи, имеющие важное практическое и научное значение.

### Литература

1. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. — М.: Наука, 1971. — 807 с.
2. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / [А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников и др.] — М.: Стройиздат, 1984. — 416 с.
3. Григолюк, Э.И. Проблемы нелинейного деформирования / Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин. — М.: Наука, 1988. — 232 с.
4. Устойчивость и динамика сооружений / [Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов] — М.: Высш. шк., 1987. — 264 с.
5. Численные методы в механике / [В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, А.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов] — Одесса: Стандарт, 2005. — 564 с.
6. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. — М.: Высш. шк., 1991. — 440 с.

Поступила в редакцию 16 марта 2009 г.  
Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.