

УДК 539.3:624.072.45

В.Ф. Оробей, д-р техн. наук, проф.,
Н.Г. Сурьянинов, канд. техн. наук, доц.,
А.М. Лимаренко, канд. техн. наук,
 Одес. нац. политехн. ун-т

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ

В.Ф. Оробей, М.Г. Сур'янінов, О.М. Лимаренко. **Розрахунок нерозрізних балок з урахуванням експлуатаційних факторів.** Подано методику розрахунків напружено-деформованого стану нерозрізної балки методами кінцевих і граничних елементів. За досліджувану конструкцію обрано розрахункову схему чотири рази статично невизначуваної балки, у якій дискретно змінюються поперечна жорсткість, коефіцієнт постелі пружної основи, є пружна опора і частина балки вільна від основи (явище відліпання). Запропоновано алгоритми урахування додаткових чинників, що впливають на стан конструкцій, як при розрахунку методом граничних елементів, так і методом кінцевих елементів. Результати обох методів добре узгоджуються.

В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко. **Расчет неразрезных балок с учетом эксплуатационных факторов.** Представлена методика расчетов напряженно-деформированного состояния неразрезной балки методами конечных и граничных элементов. В качестве исследуемой конструкции выбрана расчетная схема четыре раза статически неопределимой балки, у которой дискретно изменяются поперечная жесткость, коэффициент постели упругого основания, имеется упругая опора и часть балки свободна от основания (явление отлипания). Предложены алгоритмы учета дополнительных факторов, влияющих на состояние конструкций, как при расчете методом граничных элементов, так и методом конечных элементов. Результаты обоих методов хорошо согласуются.

V.F. Orobey, N.G. Surianinov, A.M. Limarenko. **Calculation of continuous beams subject to operating factors.** The methods to prove the results of calculating the deflected mode of a continuous beam by the methods of finite and boundary elements is presented. The scheme of four-times-statically-indeterminable beam is chosen as an investigated design, which the transverse rigidity, the elastic base bed, change discretely in there is an elastic support and part of the beam is free from the basis. The algorithms for considering additional design factor, both in the method of boundary elements and in the method of finite elements are proposed. The results of both methods correlate well.

Достоверность результатов расчета напряженно-деформированного состояния неразрезных балок с учетом множества факторов продолжает оставаться актуальной проблемой в различных отраслях машиностроения и строительстве. При исследовании состояния балок, как правило, нужно опираться на расчеты как минимум двух различных по природе методов. В этом случае с высокой степенью вероятности можно утверждать, что полученные результаты весьма близки к истинным значениям состояния конструкции. Последнее обстоятельство крайне важно на стадии проектирования, когда необходимо определять оптимальные размеры конструкции.

Здесь использованы метод граничных элементов (МГЭ) [1], реализованный в пакете MATLAB и метод конечных элементов (МКЭ) [2], реализованный в пакете ANSYS.

Задача 1. Неразрезную балку (рис. 1) в алгоритме МГЭ разбиваем на пять стержней, нумеруем узлы и стрелками указываем начало и конец каждого элемента.

Упругая опора учитывается соотношениями

$$v^{2-3}(l) = v^{3-4}(0) = -\frac{R_3}{15EI}; \quad R_3 = -Q^{2-3}(l) + Q^{3-4}(0); \quad v^{2-3}(l) = v^{3-4}(0) = \frac{Q^{2-3}(l) - Q^{3-4}(0)}{15EI} L^3.$$

Матрицы X_* ; Y , где учтены краевые условия, уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2, 3, 4 и упругая опора примут вид (1).

$X_* =$	1	$m_1 E I v_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(l)}^{0-1}$	$; Y =$	$m_1 E I v_{(0)}^{0-1} = 0$	(1)
	2	$m_1 E I \varphi_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(l)}^{1-2}$		$m_1 E I \varphi_{(l)}^{0-1} = m_1 E I \varphi_{(0)}^{1-2}$	
	3	$M_{(0)}^{0-1};$		$M_{(0)}^{0-1} = M_{(0)}^{1-2}$	
	4	$Q_{(0)}^{0-1}$		$Q_{(l)}^{0-1}$	
	5	$m_2 E I v_{(0)}^{0-2} = 0; Q_{(l)}^{2-3}$		$m_2 E I \varphi_{(l)}^{1-2} = 0$	
	6	$m_2 E I \varphi_{(0)}^{1-2}$		$m_2 E I \varphi_{(l)}^{1-2} = m_2 I \varphi_{(0)}^{2-3}$	
	7	$M_{(0)}^{1-2};$		$M_{(l)}^{1-2} = M_{(0)}^{2-3}$	
	8	$Q_{(0)}^{1-2}$		$Q_{(l)}^{1-2}$	
	9	$m_3 E I v_{(0)}^{2-3} = 0; Q_{(l)}^{3-4}$		$m_3 E I v_{(l)}^{2-3} = \frac{m_3 L^3}{15} [Q_{(l)}^{2-3} - Q_{(0)}^{3-4}]$	
	10	$m_3 E I \varphi_{(0)}^{2-3}$		$m_3 E I \varphi_{(l)}^{2-3} = m_3 I \varphi_{(0)}^{3-4}$	
	11	$M_{(0)}^{2-3};$		$M_{(l)}^{2-3} = M_{(0)}^{3-4}$	
	12	$Q_{(0)}^{2-3}$		$Q_{(l)}^{2-3}$	
	13	$m_4 E I v_{(0)}^{3-4} = \frac{m_4 L^3}{15} [Q_{(l)}^{2-3} - Q_{(0)}^{3-4}]; E I v_{(l)}^{4-5}$		$m_4 E I v_{(l)}^{3-4} = 0$	
	14	$m_4 E I \varphi_{(0)}^{3-4}$		$m_4 E I \varphi_{(l)}^{3-4} = m_4 E I \varphi_{(0)}^{4-5}$	
	15	$M_{(0)}^{3-4};$		$M_{(l)}^{3-4} = M_{(0)}^{4-5}$	
	16	$Q_{(0)}^{3-4}$		$Q_{(l)}^{3-4}$	
	17	$E I v_{(0)}^{4-5} = 0; Q_{(l)}^{4-5}$		$E I v_{(l)}^{4-5}$	
	18	$E I \varphi_{(0)}^{4-5}$		$E I \varphi_{(l)}^{4-5}$	
	19	$M_{(0)}^{4-5};$		$M_{(l)}^{4-5} = 0$	
	20	$Q_{(0)}^{4-5}$		$Q_{(l)}^{4-5} = 0$	

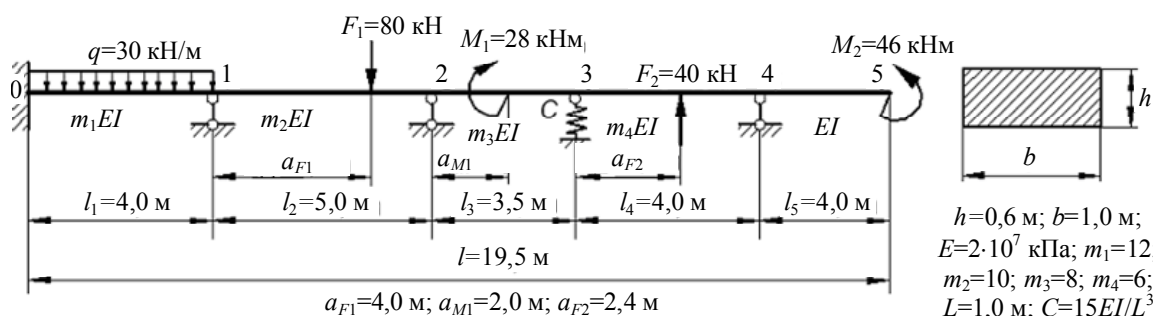


Рис. 1. Нерезная балка с упругой опорой

Разрешающее уравнение для балки (см. рисунок 1) формируется по правилам МГЭ [1].

Для реализации расчета МКЭ выбран программный комплекс ANSYS. Возможности программы позволяют выполнять расчет практически любых конструкций на прочность, устойчи-

вость и динамические нагрузки [2]. Для расчета неразрезной балки из библиотеки стандартных конечных элементов программы выбран двухузловой балочный элемент BEAM54, предназначенный для решения двумерных задач. Свойства элемента BEAM54 задаются путем описания характеристик поперечного сечения, свойств материала (модуля упругости и коэффициента Пуассона) и упругого основания. Конструкция была разбита на 90 конечных элементов.

Результаты решения краевой задачи и вычисления параметров состояния балки представлены в табл. 1. Там же дано сравнение результатов МГЭ и МКЭ.

Таблица 1

Напряженно-деформированное состояние балки с упругой опорой

Глобальная координата x , м	Параметры НДС балки					
	Изгибающий момент M , кНм			Поперечная сила Q , кН		
	МКЭ	МГЭ	Погрешность Δ , %	МКЭ	МГЭ	Погрешность Δ , %
0,00	43,752	44,09	0,77	62,814	63,06	0,39
4,00	32,495	31,8	2,186	57,186 -18,636	56,9 -18,1	0,5 2,88
8,00	42,049	40,5	3,82	-18,636 61,364	-18,1 61,9	2,88 0,867
9,00	19,495	21,3	8,47	61,364 -0,07526	61,9 -0,12	0,867 4,099
11,00	20,82 6,841	21,1 6,89	1,32 0,79	-0,07526	-0,12	37,3
12,5	6,9366	7,07	1,89	6,013	6,27	4,27
16,5	46,0	46,0	0,00	-33,987	-33,73	0,76
19,5	46,0	46,0	0,00	0,00	0,00	0,00
x , м	Прогиб v , м			Угол поворота φ , радиан		
2	$0,5498 \cdot 10^{-5}$	$0,557 \cdot 10^{-5}$	1,31	$0,4343 \cdot 10^{-6}$	$0,473 \cdot 10^{-6}$	8,18
6	$0,7676 \cdot 10^{-5}$	$0,7188 \cdot 10^{-5}$	6,78	$0,5962 \cdot 10^{-5}$	$0,5706 \cdot 10^{-5}$	4,48
7	$0,1158 \cdot 10^{-4}$	$0,1147 \cdot 10^{-4}$	0,98	$0,324 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$	62
8	$0,902 \cdot 10^{-5}$	$0,952 \cdot 10^{-5}$	1,89	$0,7045 \cdot 10^{-5}$	$0,675 \cdot 10^{-5}$	29,5
11	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,4075 \cdot 10^{-5}$	0,79	$0,47537 \cdot 10^{-5}$	$0,53 \cdot 10^{-5}$	10,3
12,5	$0,162 \cdot 10^{-5}$	$0,1832 \cdot 10^{-5}$	11,57	$0,1746 \cdot 10^{-6}$	$0,1678 \cdot 10^{-5}$	4,05
19,5	$0,608 \cdot 10^{-3}$	$0,6107 \cdot 10^{-3}$	0,44	$0,39423 \cdot 10^{-3}$	$0,395 \cdot 10^{-3}$	0,195

Из таблицы 1 следует достаточное соответствие результатов двух разных методов.

Задача 2. Добавим в расчетную схему балки (см. рисунок 1) упругое основание с дискретно изменяющимся коэффициентом постели (рис. 2): стержень 0-1 – $k_1 = 1 \cdot 10^4$ кН/м³; 1-2 – $k_2 = 2 \cdot 10^4$ кН/м³; 2-3 – $k_3 = 3 \cdot 10^4$ кН/м³; 3-4 – $k_4 = 4 \cdot 10^4$ кН/м³; 4-5 – $k_5 = 5 \cdot 10^4$ кН/м³. Чтобы учесть упругое основание, достаточно заменить фундаментальные функции изгиба в разрешающем уравнении задачи 1 на фундаментальные функции балки на упругом основании с одним коэффициентом постели [1]. Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния балки представлены в табл. 2

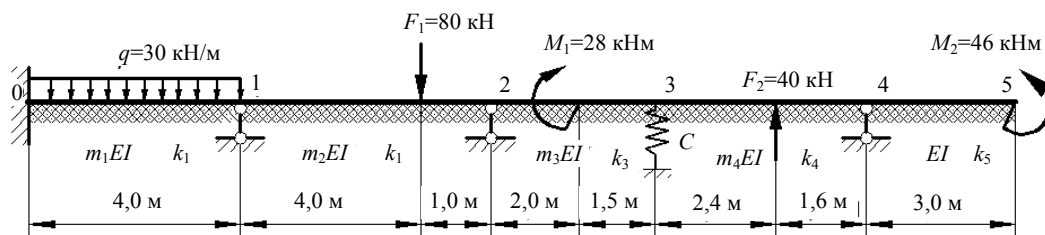


Рис. 2. Неразрезная балка на упругом основании

Таблица 2

Напряженно-деформированное состояние балки с упругой опорой и упругим основанием

Глобальная координата $x, \text{ м}$	Параметры НДС балки					
	Изгибающий момент $M, \text{ кНм}$			Поперечная сила $Q, \text{ кН}$		
	МКЭ	МГЭ	Погреш- ность $\Delta, \%$	МКЭ	МГЭ	Погреш- ность $\Delta, \%$
0,00	44,201	44,8	1,34	-63,13	-63,6	0,739
4,00	31,441	30,02	4,73	56,745 -17,743	56,3 -16,7	0,79 6,245
8,00	40,137	37,4	7,3	-18,157 61,742	-17,2 62,8	5,56 1,685
9,00	21,558	25,3	14,79	61,664 -2,394	62,7 -4,76	1,65 49,7
11,00	17,412 11,336	15,9 12,1	9,5 6,3	-2,394	-4,76	49,7
12,5	14,108	19,1	26,1	-2,13 15,5	-4,75 17,3	55,16 10,4
14,9	19,778	20,1	1,6	16,192 -23,74	17,3 -22,7	6,4 4,58
16,5	14,038	13,4	4,76	-23,428 13,648	-22,3 14,0	0,76 5,06
19,5	46,0	46,0	0,00	0,00	0,00	0,00
$x, \text{ м}$	Прогиб $v, \text{ м}$			Угол поворота $\varphi, \text{ радиан}$		
2	$0,56071 \cdot 10^{-5}$	$0,57477 \cdot 10^{-5}$	2,45	$0,4921 \cdot 10^{-6}$	$0,5624 \cdot 10^{-6}$	12,5
6	$0,69571 \cdot 10^{-5}$	$0,60752 \cdot 10^{-5}$	14,5	$0,5637 \cdot 10^{-5}$	$0,5216 \cdot 10^{-5}$	8,07
7	$0,1068 \cdot 10^{-4}$	$0,10042 \cdot 10^{-4}$	6,35	$0,21406 \cdot 10^{-5}$	$0,1934 \cdot 10^{-5}$	10,68
8	$0,93246 \cdot 10^{-5}$	$0,83676 \cdot 10^{-5}$	11,4	$0,6607 \cdot 10^{-5}$	$0,6076 \cdot 10^{-5}$	8,74
11	$0,1912 \cdot 10^{-5}$	$0,12258 \cdot 10^{-5}$	55,9	$0,41625 \cdot 10^{-5}$	$0,6548 \cdot 10^{-5}$	36,4
12,5	$0,2961 \cdot 10^{-5}$	$0,40834 \cdot 10^{-5}$	27,487	$0,23885 \cdot 10^{-6}$	$0,1547 \cdot 10^{-5}$	54,9
19,5	$0,3212 \cdot 10^{-3}$	$0,325 \cdot 10^{-3}$	1,17	$0,2679 \cdot 10^{-3}$	$0,2687 \cdot 10^{-3}$	0,3

Из таблицы 2 также следует, что результаты МКЭ и МГЭ достаточно согласуются между собой.

Задача 3. Расчетную модель (см. рисунок 2) усложним явлением отлипания, т.е. на отдельных участках балки (0-1 и 2-3) отсутствует упругое основание (рис. 3). В этом случае в уравнение краевой задачи, согласно МГЭ [1], возвращаются фундаментальные функции изгиба для участков 0-1, 2-3. Результаты расчетов состояния балки представлены в табл. 3.

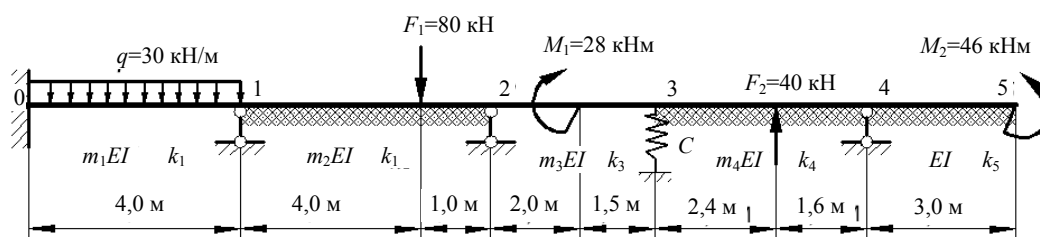


Рис. 3. Нерезная балка на упругом основании с эффектом отлипания

Таблица 3

Напряженно-деформированное состояние балки на упругом основании с учетом отлитания

Глобальная координата x , м	Параметры НДС балки					
	Изгибающий момент M , кНм			Поперечная сила Q , кН		
	МКЭ	МГЭ	Погрешность Δ , %	МКЭ	МГЭ	Погрешность Δ , %
0,00	44,252	44,87	1,38	-63,189	-63,66	0,74
4,00	31,495	30,25	4,116	56,811 -17,775	56,34 -16,8	0,836 5,8
8,00	40,214	37,4	7,52	-18,19 61,709	-17,3 62,7	5,145 1,58
9,00	21,447	25,3	15,23	61,629 -2,1697	62,68 -4,66	1,68 53,4
11,00	17,542 11,218	15,9 12,1	10,3 7,29	-2,1697	-4,66	53,4
12,5	14,147	19,0	25,5	-2,1697 15,469	-4,66 17,3	53,4 10,58
14,9	19,835	20,2	1,8	16,202 -23,729	17,5 -22,5	7,417 5,462
16,5	14,037	13,4	4,75	-23,418 13,649	-22,3 14,0	5,46 2,507
19,5	46,0	46,0	0,00	0,00	0,00	0,00
x , м	Прогиб v , м			Угол поворота φ , радиан		
2	$0,5614 \cdot 10^{-5}$	$0,57576 \cdot 10^{-5}$	2,49	$0,49218 \cdot 10^{-6}$	$0,564 \cdot 10^{-6}$	12,73
6	$0,69752 \cdot 10^{-5}$	$0,6076 \cdot 10^{-5}$	14,8	$0,5649 \cdot 10^{-5}$	$0,522 \cdot 10^{-5}$	8,22
7	$0,10706 \cdot 10^{-4}$	$0,10047 \cdot 10^{-4}$	6,56	$0,2056 \cdot 10^{-5}$	$0,1937 \cdot 10^{-5}$	6,14
8	$0,9349 \cdot 10^{-5}$	$0,83731 \cdot 10^{-5}$	11,655	$0,66196 \cdot 10^{-5}$	$0,6078 \cdot 10^{-5}$	8,91
11	$0,1976 \cdot 10^{-5}$	$0,1377 \cdot 10^{-5}$	43,5	$0,41635 \cdot 10^{-5}$	$0,6548 \cdot 10^{-5}$	36,42
12,5	$0,2991 \cdot 10^{-5}$	$0,40666 \cdot 10^{-5}$	26,45	$0,2357 \cdot 10^{-6}$	$0,155 \cdot 10^{-5}$	52,06
19,5	$0,3212 \cdot 10^{-3}$	$0,32491 \cdot 10^{-3}$	1,142	$0,26794 \cdot 10^{-3}$	$0,2687 \cdot 10^{-3}$	0,283

Анализ результатов по данным таблиц 1, 2, 3 показывает, что данные МКЭ и МГЭ достаточно согласуются между собой при учете различных дополнительных факторов. Это свидетельствует о том, что МКЭ и МГЭ позволяют получать весьма точные и достоверные результаты о внутреннем состоянии конструкции. В данном случае основание незначительно влияет на НДС балки, что объясняется наличием жестких опор и небольшими прогибами в пролетах. На консольном участке, где прогибы велики, влияние упругого основания значительно. Реакция R_4 уменьшается в 4 раза, а максимальный прогиб уменьшается почти в два раза. В таких условиях практически незаметным оказалось отсутствие основания на участках 0-1 и 2-3.

Очевидно, что подобные выводы более обоснованы, если они опираются на данные минимум двух различных по природе методов.

Литература

1. Численные методы в механике / В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец и др. — Одесса, Стандартъ, 2005. — 563 с.
2. Дашенко, А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Н.Г. Сурьянинов, Д.В. Лазарева; под ред. Н.Г. Сурьянинова. — Одесса: Астропринт, 2007. — 484 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 23 декабря 2008 г.

