

УДК 539.3:624.071.34

Н.Г. Сурьянинов, канд. техн. наук, доц.,
А.Ю. Влазнева, специалист,
Одес. нац. политехн. ун-т

РАСЧЕТ ЛИСТОВЫХ РЕССОР ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

М.Г. Сур'янінов, А.Ю. Влазнева. Розрахунок листових ресор змінної жорсткості. Виведено основні аналітичні залежності, необхідні для розрахунку листових ресор змінної жорсткості. Проведено порівняльний аналіз лінійного та нелінійного розрахунків консольної балки.

Н.Г. Сурьянинов, А.Ю. Влазнева. Расчет листовых ресор переменной жесткости. Выведены основные аналитические зависимости, необходимые для расчета листовых ресор переменной жесткости. Проведен сравнительный анализ линейного и нелинейного расчетов консольной балки.

N.G. Suriyaninov, A.Yu. Vlazneva. Calculation of leaf springs of variable stiffness. The basic analytical dependences necessary for calculation of leaf springs of variable rigidity are deduced. The comparative analysis, of linear and nonlinear calculations of a console beam is carried out.

Современные требования к мягкости подвески и плавности хода транспортного средства подразумевают пропорциональное увеличение жесткости упругих элементов при увеличении нагрузки (так называемая прогрессивность упругой характеристики подвески) для обеспечения постоянной частоты собственных колебаний.

Расчетной схемой листовой рессоры может являться консольная балка, которая при больших прогибах имеет прогрессивную упругую характеристику с параметрами, подходящими для использования ее в качестве элемента переменной жесткости.

В этой связи представляет интерес аналитический метод определения жесткости и прогиба в зависимости от приложенной нагрузки. Получим основные аналитические зависимости, необходимые для расчета листовых ресор переменной жесткости, достигаемой за счет естественной геометрической нелинейности.

Рассмотрим консольную балку с постоянным по длине поперечным сечением, нагруженную на конце изгибающей силой (рис. 1).

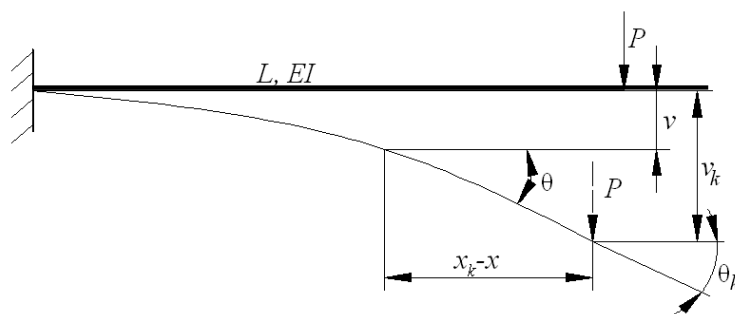


Рис. 1. Консольная балка: L — длина балки, EI — жесткость балки,
 P — внешняя нагрузка, v — вертикальное перемещение сечения,
 v_k — вертикальное перемещение концевого сечения, x — горизонтальная координата сечения,
 x_k — горизонтальная координата концевого сечения, θ — угол поворота сечения,
 θ_k — угол поворота концевого сечения

Уравнение формы упругой линии для консольной балки, нагруженной на конце изгибающей силой, при допущении линейной упругости материала и большой жесткости на растяжение имеет вид

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{P(x_k - x)}{EI}, \quad (1)$$

где s — координата, измеренная вдоль упругой линии балки.

В большинстве случаев эту формулу линеаризуют, полагая

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} \text{ и } x_k = L, \quad (2)$$

где L — длина балки,

v — вертикальное перемещение сечения.

При расчете конструкций, в которых консольная балка используется в качестве упругого элемента, данное допущение неприемлемо.

Решение дифференциального уравнения (1) приводит к трансцендентному уравнению в эллиптических интегралах 1-го рода

$$\int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}, \quad (3)$$

где t — переменная интегрирования;

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_k}{2}};$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{k\sqrt{2}}.$$

Из (3) можно определить угол поворота концевого сечения θ_k методом последовательных приближений, т. е., фактически, подбором. Вертикальное и горизонтальное перемещения конца балки определяются по формулам

$$\frac{v_k}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} \cdot \int_{\varphi}^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt; \quad (4)$$

$$\frac{u_k}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI \sin \theta_k}{PL^2}}.$$

При проектировании упругих элементов переменной жесткости необходимо иметь явную формулу зависимости вертикального перемещения от приложенной силы.

Запишем закон Гука в дифференциальной форме

$$K dv_k = dP, \quad (5)$$

где dP и dv_k — приращения нагрузки и перемещения конца стержня,

K — коэффициент пропорциональности между этими величинами (жесткость), зависящий от формы стержня.

Если зависимость жесткости стержня от формы выражена через перемещения, формула (5) запишется в виде

$$K(v_k) dv_k = dP,$$

или

$$K(v_k) = dP/(dv_k), \quad (6)$$

а если через величину нагружающей силы, то

$$K(P) = \frac{1}{dv_k/dP}. \quad (7)$$

Перепишем закон Гука в приведенных, безразмерных величинах. Тогда

$$K_{\Phi} dV = d\Phi, \quad (8)$$

где $\Phi = PL^2/(EI)$ — приведенная сила или силовой коэффициент формы;

$V = v_k/L$ — приведенное перемещение или геометрический коэффициент формы;

$K_{\Phi} = KL^3/(EI)$ — приведенная жесткость или коэффициент жесткости формы.

Для линейного случая, учитывая соотношение

$$v_k = PL^3/(3EI), \quad (9)$$

коэффициент жесткости формы

$$K_{\Phi_0} = \frac{\Phi}{V} = \frac{PL^2}{EI} \Big/ \frac{PL^3}{3EI \cdot L} = 3. \quad (10)$$

Численно продифференцируем зависимость приведенного вертикального перемещения конца балки от приведенной нагрузки, и, в соответствии с выражением (7), возьмем от него обратную величину. Полученный график приведенной жесткости изображен на рис. 2. Он почти идеально укладывается в квадратную параболу $y = 3 + x^2$.

Предположим, что формула

$$K_{\Phi} = 3 + \Phi^2 \quad (11)$$

является решением уравнения (8).

Тогда, интегрируя его, получаем суммарное перемещение

$$\int_{v_1}^{v_2} dV = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{K_{\Phi}}. \quad (12)$$

$$V_2 - V_1 = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{3 + \Phi^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{\Phi_2}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{\Phi_1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для изначально ненагруженного и недеформированного стержня

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\Phi}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

Результаты вычислений по формуле (13) и сравнение их со значениями, полученными по формулам (3) и (4), приведены в таблице.

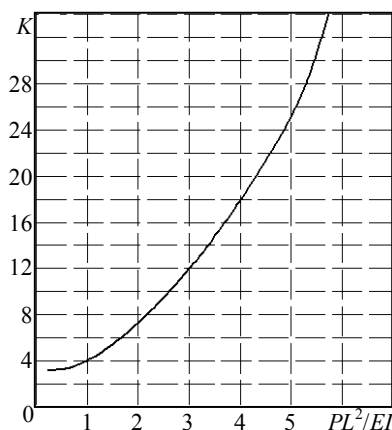


Рис. 2. Приведенная жесткость консольной балки

Сравнительный анализ расчетных методов

| Φ | V | |
|-----|----------------|-----------------|
| | по формуле (4) | по формуле (13) |
| 0,5 | 0,162 | 0,1623 |
| 1 | 0,302 | 0,3023 |
| 2 | 0,494 | 0,4948 |
| 3 | 0,603 | 0,6046 |
| 4 | 0,670 | 0,6710 |
| 5 | 0,714 | 0,7144 |
| 6 | 0,744 | 0,7446 |
| 7 | 0,767 | 0,7669 |
| 8 | 0,785 | 0,7838 |
| 9 | 0,799 | 0,7971 |
| 10 | 0,811 | 0,8079 |

Погрешность вычислений по формуле (13) не превышает 0,4 %.

Используя полученные формулы, определим внутреннюю энергию деформации изначально ненагруженной и недеформированной консольной балки. В консервативной системе

$$U = A = \int_0^V P dv_k = \frac{EI}{L} \int_0^V \Phi dV, \quad (14)$$

Подставляя (11) в (8), запишем

$$dV = \frac{d\Phi}{K_\Phi} = \frac{d\Phi}{3 + \Phi^2},$$

$$U = \frac{EI}{L} \int_0^\Phi \frac{\Phi d\Phi}{3 + \Phi^2} = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} (\ln(3 + \Phi^2) - \ln 3) = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln \left(1 + \frac{\Phi^2}{3} \right). \quad (15)$$

Выразив из (13) Φ , получим выражение для энергии деформации через перемещение

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{3} V). \quad (16)$$

Энергия деформации, вычисленная по этой формуле, например, при $V = 0,8$, оказывается на 76 % больше, чем дает линейная формула.

Переходя к исходным величинам, перепишем для них (11)...(13) и (15)...(16):

$$K = \frac{3EI}{L^3} + \frac{P^2 L}{EI} = K_0 + \frac{P^2 L}{EI}; \quad (17)$$

$$v_k = \frac{L}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{PL^2}{\sqrt{3}EI}; \quad (18)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln \left(1 + \frac{P^2 L^4}{3E^2 I^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{3} \frac{v_k}{L} \right). \quad (19)$$

Формулы (11)...(19) просты, весьма точны и дают все зависимости в явном виде. Это позволило разработать на их основе методику расчета листовых рессор переменной жесткости. Однако эти формулы имеют свою область определения, т.к. геометрический коэффициент формы V при $\Phi \rightarrow \infty$ сходится к величине

$$V_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907,$$

а не к 1. Поэтому, если силовой коэффициент формы превосходит 10, что соответствует поперечному перемещению конца балки более 80 % ее длины ($V = 0,8$), пользоваться полученными формулами не рекомендуется. На рис. 3 изображены графики приведенной жесткости K_Φ , внутренней энергии деформации U и приведенной нагрузки Φ в зависимости от геометрического коэффициента формы V .

Формулы (11)...(16) выведены для расчетной схемы, исходное состояние которой — прямолинейная консольная балка, геометрический и силовой коэффициенты формы которой равны 0. Когда в качестве исходной взята система, форма которой соответствует силовому коэффициенту Φ_0 (и геометрическому V_0), но при этом реальная нагрузка отсутствует (рис. 4), формулы (11)...(16), по-прежнему, будут выполняться, однако в них придется учесть начальные условия:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sqrt{3} \operatorname{tg} \sqrt{3} V_0; \\ \Phi &= \frac{PL^2}{EI} + \Phi_0. \end{aligned} \quad (20)$$

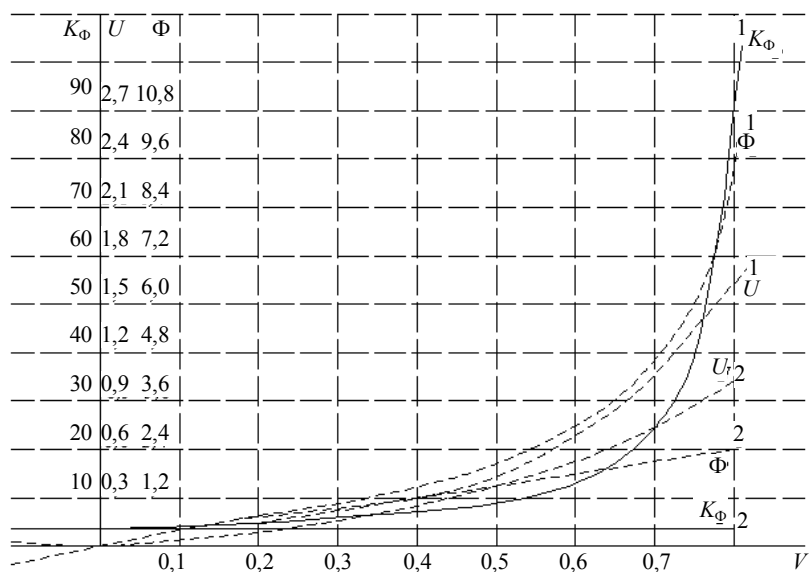


Рис. 3. Сравнение линейного и нелинейного расчетов консольной балки:
1 — графики величин, посчитанных по формулам (11)...(16),
2 — величин, вычисленных по обычным формулам сопротивления материалов



Рис. 4. Предварительно изогнутая консольная балка

Формулы для перехода системы из положения Φ_1 в положение Φ_2 при этом выглядят следующим образом:

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{\Phi_2}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{\Phi_1}{\sqrt{3}} \right), \quad (21)$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln \frac{3 + \Phi_2^2}{3 + \Phi_1^2} = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \ln \frac{K_{\Phi_2}}{K_{\Phi_1}} \quad (22)$$

Таким образом получены все формулы, необходимые для расчета листовых рессор переменной жесткости, достигаемой за счет естественной геометрической нелинейности, при различных начальных параметрах.

Литература

1. Пономарев, С.Д. Расчет упругих элементов машин и приборов / С. Д. Пономарев, Л. Е. Андреева. — М.: Машиностроение, 1980. — 326 с.
2. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1988. — 712 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 17 февраля 2009 г.