

УДК 62-752

В.А. Белоус, канд. техн. наук, Одес. нац. политехн. ун-т

ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В.О. Білоус. Динамічне гашення коливань консольної пластини. Запропоновано методику визначення параметрів насадка для динамічного гашення коливань консольної пластини для її захисту від вібрацій.

В.А. Белоус. Динамическое гашение колебаний консольной пластины. Предложена методика определения параметров насадка для динамического гашения колебаний консольной пластины для ее защиты от вибраций.

V.A. Belous. Dynamic dampening of cantilever plate's oscillations. The suggested method determines the parameters of extension for dynamic dampening of cantilever plate's oscillations to protect it from the vibrations.

Идея динамического гашения колебаний — введение дополнительных масс, которые своими колебаниями на частоте внешнего возмущения гасят колебания находящегося под его действием объекта системы, — применяется в конструкциях самого различного типа при защите их от вибраций основания. Особенно актуальными являются исследования по гашению колебаний в системах с распределенными параметрами, которых сравнительно мало [1]. Динамическое гашение колебаний пластины на упругом основании были исследованы ранее [2]. Представляют интерес колебания прямоугольной пластины длиной b и шириной a_1 , консольно закрепленной в массивном основании по одному продольному краю и имеющей малую вспомогательную пластину шириной a_2 на другом продольном краю. Срединные плоскости пластин примем за координатные плоскости x_1z_1 и x_2z_2 , а оси y_1 и y_2 направим по нормали к этим плоскостям. Пусть движение основания при кинематическом возмущении осуществляется с частотой ω и амплитудой R , т.е. $v_k(t) = R \sin \omega t$. Изогнутую поверхность участков, достаточно удаленных от поперечных краев длинных пластин ($b \geq 3 a_1$, $b \geq 3 a_2$), при этом можно считать цилиндрической [3]. Тогда мысленно вырезав из пластин в направлении осей x_1 и x_2 элементарные полоски, последние можно рассматривать как консольную балку длиной a_1 и насадок длиной a_2 (рис. 1).

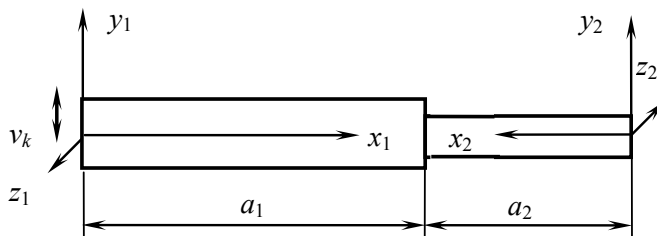


Рис. 1. Схема кинематического возмущения основания консольной пластины с насадком

Дифференциальные уравнения малых колебаний пластины и насадка около положения статического равновесия для прогибов v_1 и v_2 имеют вид [4]

$$m_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} = 0; \quad D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \mu_1^2)}; \quad m_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + D_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} = 0; \quad D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1 - \mu_2^2)},$$

где $m_1 = \rho_1 h_1$;

$m_2 = \rho_2 h_2$;

ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотность материала пластины и насадка;

h_1 и h_2 — соответственно толщина пластины и насадка;

E_1 и E_2 — соответственно модуль упругости Юнга пластины и насадка;

μ_1 и μ_2 — соответственно коэффициент Пуассона материала пластины и насадка;
 D_1 и D_2 — соответственно цилиндрическая жесткость пластины и насадка.

Изгибающие моменты M_1 и M_2 и перерезывающие силы Q_1 и Q_2 в сечениях пластины и насадка, перпендикулярных осям x_1 и x_2 , [3] имеют вид

$$M_1 = -D_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}; \quad M_2 = -D_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}, \quad Q_1 = -D_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3}; \quad Q_2 = -D_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3}.$$

Начальные граничные условия на краях пластины и насадка

$$v_1|_{x_1=0} = R \sin \omega t; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}|_{x_2=0} = 0; \quad \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3}|_{x_2=0} = 0.$$

Конечные граничные условия на стыке пластины и насадка

$$D_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}|_{x_1=a_1} = D_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}|_{x_2=a_2}, \quad D_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3}|_{x_1=a_1} = -D_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3}|_{x_2=a_2}.$$

Разделяя переменные по методу Фурье для установившегося режима колебаний, прогибы пластины и насадка можно представить в виде произведений двух функций

$$v_1(x_1, t) = V_1(x_1) \sin \omega t; \quad v_2(x_2, t) = V_2(x_2) \sin \omega t,$$

где $V_1(x_1)$ и $V_2(x_2)$ — соответственно их формы прогибов.

После подстановки их в дифференциальные уравнения колебаний

$$V_1^{IV} - \chi_1^4 V_1 = 0; \quad V_2^{IV} - \chi_2^4 V_2 = 0, \quad (1)$$

где $\chi_1^4 = \frac{m_1 \omega^2}{D_1}$ и $\chi_2^4 = \frac{m_2 \omega^2}{D_2}$.

Решение уравнений (1) удобно представить в функциях Крылова [4], образующих систему частных решений с единичной матрицей начальных граничных условий, которые имеют вид

$$U_1(x_i) = 0,5(\operatorname{ch} \chi_i x_i + \cos \chi_i x_i); \quad U_2(x) = 0,5(\operatorname{sh} \chi x + \sin \chi x);$$

$$U_3(x_i) = 0,5(\operatorname{ch} \chi_i x_i - \cos \chi_i x_i); \quad U_4(x_i) = 0,5(\operatorname{sh} \chi_i x_i - \sin \chi_i x_i),$$

причем $U_1' = \chi U_4$, $U_2' = \chi_i U_1$, $U_3' = \chi_i U_2$, $U_4' = \chi_i U_3$ ($i=1, 2$).

Учитывая начальные граничные условия, решение уравнений (1) имеет вид

$$V_1(x_1) = R U_1(x_1) + A_3 U_3(x_1) + A_4 U_4(x_1); \quad V_2(x_2) = A_1 U_1(x_2) + A_2 U_2(x_2),$$

где $A_1 = V_2(0)$, $A_2 = V_2'(0) \chi_2^{-1}$, $A_3 = V_1''(0) \chi_1^{-2}$, $A_4 = V_1'''(0) \chi_1^{-3}$.

Величины амплитуды прогибов V и угла поворота θ в стыковом сечении

$$V = V_1(a_1); \quad \theta = V_1'(a_1), \quad V = V_2(a_2); \quad \theta = -V_2'(a_2),$$

т.е. $A_3 U_3(a_1) + A_4 U_4(a_1) = V - R U_1(a_1); \quad A_3 U_2(a_1) + A_4 U_3(a_1) = \theta \chi_1^{-1} - R U_4(a_1),$

$$A_1 U_1(a_2) + A_2 U_2(a_2) = V; \quad A_1 U_4(a_2) + A_2 U_1(a_2) = -\theta \chi_2^{-1}.$$

Эти четыре уравнения определяют постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 в зависимости от величин V и θ .

С учетом стыковых конечных граничных условий

$$D_1 \chi_1^2 [A_3 U_1(a_1) + A_4 U_2(a_1) + R U_3(a_1)] = D_2 \chi_2^2 [A_1 U_3(a_2) + A_2 U_4(a_2)],$$

$$D_1 \chi_1^3 [A_3 U_4(a_1) + A_4 U_1(a_1) + R U_2(a_1)] = -D_2 \chi_2^3 [A_1 U_2(a_2) + A_2 U_3(a_2)].$$

Введем в рассмотрение безразмерные параметры

$$\phi^4 = \frac{m_2}{m_1}; \quad \delta^4 = \frac{D_2}{D_1}; \quad \bar{\chi}_1 = \chi_1 a_1; \quad \bar{\chi}_2 = \chi_2 a_2; \quad \psi = \frac{\bar{\chi}_1}{\bar{\chi}_2} = \frac{\delta a_1}{\phi a_2}; \quad \bar{\omega}^2 = \bar{\chi}_2^4 = \frac{m_2 a_2^4}{D_2} \omega^2. \quad (2)$$

После подстановки полученных значений постоянных A_1, A_2, A_3, A_4 из двух стыковых условий можно найти амплитуды прогибов V и угла поворота θ в стыковом сечении

$$V = \frac{R}{\Delta} \left\{ c_1 \left[\frac{d_{11}^{(1)}}{\Delta_1} + \phi^2 \delta^2 \frac{d_{22}^{(2)}}{\Delta_2} \right] + c_2 \left[\frac{d_{12}^{(1)}}{\Delta_1} - \phi \delta^3 \frac{d_{12}^{(2)}}{\Delta_2} \right] \right\}; \quad (3)$$

$$\theta \chi_1^{-1} = \frac{R}{\Delta} \left\{ c_1 \left[\frac{d_{21}^{(1)}}{\Delta_1} - \phi^3 \delta \frac{d_{21}^{(2)}}{\Delta_2} \right] + c_2 \left[\frac{d_{22}^{(1)}}{\Delta_1} + \phi^2 \delta^2 \frac{d_{11}^{(2)}}{\Delta_2} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } \Delta = \left\{ \left[\frac{d_{22}^{(1)}}{\Delta_1} + \phi^2 \delta^2 \frac{d_{11}^{(2)}}{\Delta_2} \right] \left[\frac{d_{11}^{(1)}}{\Delta_1} + \phi^2 \delta^2 \frac{d_{22}^{(2)}}{\Delta_2} \right] + \left[-\frac{d_{21}^{(1)}}{\Delta_1} + \phi^3 \delta \frac{d_{21}^{(2)}}{\Delta_2} \right] \left[\frac{d_{12}^{(1)}}{\Delta_1} - \phi \delta^3 \frac{d_{12}^{(2)}}{\Delta_2} \right] \right\};$$

$$\Delta_1 = 0,5(1 - \operatorname{ch} \bar{\chi}_1 \cos \bar{\chi}_1); \quad \Delta_2 = 0,5(1 + \operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2);$$

$$d_{11}^{(1)} = d_{22}^{(1)} = 0,5 \operatorname{sh} \bar{\chi}_1 \sin \bar{\chi}_1; \quad d_{11}^{(2)} = d_{22}^{(2)} = 0,5 \operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2;$$

$$d_{12}^{(1)} = 0,5(\operatorname{ch} \bar{\chi}_1 \sin \bar{\chi}_1 - \operatorname{sh} \bar{\chi}_1 \cos \bar{\chi}_1); \quad d_{12}^{(2)} = 0,5(\operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2 - \operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2);$$

$$d_{21}^{(1)} = 0,5(\operatorname{sh} \bar{\chi}_1 \cos \bar{\chi}_1 + \operatorname{ch} \bar{\chi}_1 \sin \bar{\chi}_1); \quad d_{21}^{(2)} = 0,5(\operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2 + \operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2);$$

$$c_1 = 0,5 \Delta_1^{-1} \operatorname{ch} \bar{\chi}_1 \cos \bar{\chi}_1 (\operatorname{ch} \bar{\chi}_1 - \cos \bar{\chi}_1); \quad c_2 = 0,5 \Delta_1^{-1} \operatorname{ch} \bar{\chi}_1 \cos \bar{\chi}_1 (\operatorname{sh} \bar{\chi}_1 + \sin \bar{\chi}_1).$$

Полное гашение вынужденных колебаний в стыковом сечении будет при условиях $V = 0$ и $\theta = 0$, что приводит к уравнениям

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{d_{12}^{(1)} \Delta_2 - \phi \delta^3 d_{12}^{(2)} \Delta_1}{d_{11}^{(1)} \Delta_2 + \phi^2 \delta^2 d_{22}^{(2)} \Delta_1}; \quad \frac{c_1}{c_2} = -\frac{d_{22}^{(1)} \Delta_2 + \phi^2 \delta^2 d_{11}^{(2)} \Delta_1}{d_{21}^{(1)} \Delta_2 - \phi^3 \delta d_{21}^{(2)} \Delta_1}. \quad (5)$$

Такие условия в стыковом сечении эквивалентны условиям консольно закрепленного насадка, при свободных колебаниях которого $\operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2 = -1$, т.е. $\bar{\chi}_2 = 1,875; 4,694; \dots$ [4]. При выполнении $\Delta_2 = 0$ условия гашения колебаний (5) приобретают вид

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\delta d_{12}^{(2)}}{\phi d_{22}^{(2)}} = \frac{\delta \operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2 - \operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2}{\operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2}; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\delta d_{11}^{(2)}}{\phi d_{21}^{(2)}} = \frac{\delta \operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2}{\phi \operatorname{sh} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2 + \operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \sin \bar{\chi}_2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{ch}^2 \bar{\chi}_2 \sin^2 \bar{\chi}_2 - \operatorname{sh}^2 \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2 = \operatorname{sh}^2 \bar{\chi}_2 \sin^2 \bar{\chi}_2$ при $1 - \operatorname{ch}^2 \bar{\chi}_2 \cos^2 \bar{\chi}_2 = 0$ ($1 + \operatorname{ch} \bar{\chi}_2 \cos \bar{\chi}_2 = 0$), оба условия имеют один вид

$$\left(\frac{\operatorname{ch} \bar{\chi}_2}{\operatorname{sh} \bar{\chi}_2} - \frac{\cos \bar{\chi}_2}{\sin \bar{\chi}_2} \right) \left(\frac{\delta}{\phi} \right) = \frac{\operatorname{ch} \bar{\chi}_1 - \cos \bar{\chi}_1}{\operatorname{sh} \bar{\chi}_1 + \sin \bar{\chi}_1}. \quad (6)$$

С помощью соединительного множителя ψ (2) нелинейное трансцендентное уравнение, коим является условие (6), можно представить в виде

$$\left(\frac{\operatorname{ch} \bar{\chi}_2}{\operatorname{sh} \bar{\chi}_2} - \frac{\cos \bar{\chi}_2}{\sin \bar{\chi}_2} \right) \left(\frac{a_2}{a_1} \psi \right) - \frac{\operatorname{ch} \psi \bar{\chi}_2 - \cos \psi \bar{\chi}_2}{\operatorname{sh} \psi \bar{\chi}_2 + \sin \psi \bar{\chi}_2} = 0. \quad (7)$$

При выбранном значении параметра насадка $\bar{\chi}_2$, задавая соотношение размеров насадка и пластины a_2/a_1 , из численного решения уравнения (7) можно найти величину множителя ψ , т.е. определить значение параметра

$$\left(\frac{\delta}{\phi} \right)^4 = \left(\frac{a_2}{a_1} \psi \right)^4 = \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^4 \approx \frac{E_2 \rho_1}{E_1 \rho_2} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2. \quad (8)$$

Результаты соответствующего расчета представлены графиком на рис. 2.

Таким образом, при кинематическом возмущении основания насадок будет играть роль своеобразного динамического гасителя, ограничивая амплитуду и угол поворота в стыковом сечении для основной пластины, причем в нем самом будет происходить распределение деформаций и напряжений такое же, как при закреплении в неподвижном основании.

График можно использовать для настройки гасителя, при которой стыковое сечение пластины и насадка остается неподвижным. При его наличии можно по заданной частоте кинематического возмущения выбрать параметры насадка и по формуле (8), зная соотношения физико-механических постоянных материалов пластины и насадка, а также соотношение их толщин (h_2/h_1), определить соответствующее соотношение их размеров (a_2/a_1).

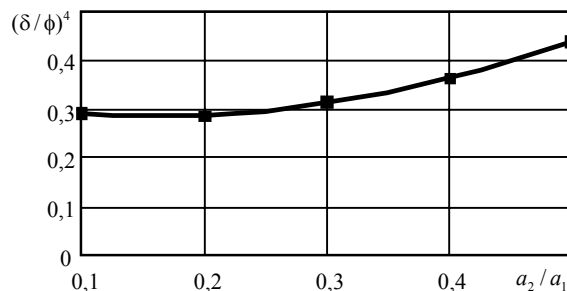


Рис. 2. Зависимость $(\delta/\phi)^4$ от a_2/a_1 при $\bar{\chi}_2 = \sqrt{\bar{\omega}} = 1,875$

Литература

1. Карамышкин, В.В. Динамическое гашение колебаний / В.В. Карамышкин. — Л.: Машиностроение, 1988. — 108 с.
2. Белоус, В.А. Динамическое гашение колебаний пластины на упругом основании / В.А. Белоус // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2008. — Вып. 2(30). — С. 19 — 22.
3. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
4. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. — Л.: Политехника, 1990. — 272 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 17 марта 2009 г.