УДК 517.928

А.К. Осадчий, математик,
О.А. Осадчая, магистр,
Одес. нац. ун-т им. И.Н. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

О.К. Осадчий, О.О. Осадча. **Усереднення рівнянь керованого руху з розривними характеристиками.** Розглядається узагальнення другої схеми часткового усереднення О.М.Філатова на системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. Побудовано та обгрунтовано схеми повного та часткового усереднення для рівнянь керованого руху з розривними елементами.

А.К. Осадчий, О.А. Осадчая. **Усреднение уравнений управляемого движения с разрывными характеристиками.** Рассматривается усреднение второй схемы частичного усреднения А.Н. Филатова на системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Построены и обоснованы схемы полного и частичного усреднения для уравнений управляемого движения с разрывными элементами.

A.K. Osadchyy, O.A. Ocadcha. **Averaging of the equations of controlled movement with discontinuous characteristics.** Generalization of the second scheme of A.N. Filatov's partial averaging on the differential equations systems with the discontinuous right side is considered. The schemes of complete and partial averaging for the equations of controlled movement with discontinuous elements are built and substantiated.

Исследование реальных управляемых процессов, основанное на идеализированных математических моделях, приводит обычно к дифференциальным уравнениям с малыми параметрами. Для их решения широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного метода зависит от структуры дифференциального уравнения, описывающего динамику управляемого объекта.

Одним из асимптотических методов, широко используемым при исследовании задач нелинейной механики, и особенно в разделе теории колебаний, является метод усреднения, математическое обоснование которого для различных классов уравнений содержится в работах Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского и др. В задачах оптимального управления метод усреднения был впервые применен в работах Н.Н.Моисеева. Затем многими исследователями с помощью метода усреднения были решены важные для приложений задачи управления движением объектов.

Управляемые системы с разрывными траекториями возникают во многих задачах квантовой физики, экономики, химической промышленности, биологии, теории систем с переменной структурой и систем со скользящими режимами, где разрывные системы автоматического регулирования, импульсные вычислительные системы интенсивно развиваются, расширяя круг своих приложений. Обоснование метода усреднения для такого вида систем рассматривалось в работах [1].

Рассмотрим обобщение второй схемы частичного усреднения А.Н.Филатова [2] на системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, что позволяет построить и обосновать схемы полного и частичного усреднения для уравнений управляемого движения с разрывными элементами.

I. Схема частичного усреднения для систем с разрывной правой частью

Пусть система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}=\varepsilon[f(t,x)+\varphi(t,x,\varepsilon)],\quad x(0,\varepsilon)=x_0, \tag{1}$$

где $f(t,x)=\begin{cases} f_1(t,x) \text{ при } \Phi(t,x)\le 0, \\ f_2(t,x) \text{ при } \Phi(t,x)>0; \end{cases}$

$t\in\mathbf{R}^+$ — время;

$x\in Q\subset\mathbf{R}^n$ — фазовый вектор;

$\varepsilon\in(0,\sigma]$ — малый параметр;

$f_i:\mathbf{R}^+\times Q\to\mathbf{R}^n,\ i=1,2,\ \varphi:\mathbf{R}^+\times Q\times(0,\sigma]\to\mathbf{R}^n,\ \Phi:\mathbf{R}^+\times Q\to\mathbf{R}$ 2π— периодичны по t функции;

$S=\{(t,x)\,|\,\Phi(t,x)=0\}$ — поверхность разрывов правых частей.

Системе (1) поставим в соответствие следующую частично усредненную систему:

$$\dot{\tilde{x}}=\varepsilon[\overline{f}(\tilde{x})+\varphi(t,\tilde{x},\varepsilon)],\quad x(0,\varepsilon)=x_0, \tag{2}$$

где $$\overline{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{I_1(x)} f_1(t,x)dt+\int\limits_{I_2(x)} f_2(t,x)dt\right], \tag{3}$$

$I_1(x)=\{t\in[0,2\pi]\,|\,\Phi(t,x)\le 0\}$, $I_2(x)=[0,2\pi]\setminus I_1(x)$.

Теорема 1 [3]. *Пусть в области* $D=\{t\in\mathbf{R}^+, x\in Q\subset\mathbf{R}^n, \varepsilon\in(0,\sigma]\}$ *выполнены следующие условия:*

1. Функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, $\varphi(t,x,\varepsilon)$ *равномерно ограничены, измеримы и* 2π*-периодичны по* t*, удовлетворяют условию Липшица по* x*;*

2. Функция $\Phi(t,x)$ *кусочно-гладкая и* 2π*-периодична по* t*, локально удовлетворяет условию Липшица по* x *и при* $(t,x)\in S$

$$\left|\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}\right|\ge\delta,\quad \delta>0;$$

3. На отрезке $[0,2\pi]$ *функция* $\Phi(t,x)$ *имеет конечное число* $K(x)$ *простых нулей,* $\max\limits_{x\in D}K(x)=K$*, где* K *— целое положительное число;*

4. Решение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0)=x_0\in Q'\subset Q$ *усредненной системы (2) определено для всех* $t\ge 0$ *и принадлежит области Q вместе с* ρ*-окрестностью при* $\varepsilon\in(0,\sigma]$.

Тогда для любого $L>0$ *найдутся такие* $\varepsilon_0(L)\in(0,\sigma]$ *и* $C(L)>0$*, что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *на отрезке* $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ *будет выполняться неравенство*

$$\left\|x(t)-\tilde{x}(t)\right\|\le C\varepsilon,$$

где $x(t),\tilde{x}(t)$ — решения исходной и усредненной систем с начальными условиями $x(0)=\tilde{x}(0)\in Q'$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы [1, 4].

II. Частичное усреднение уравнений движения в задачах управления с разрывной правой частью

Пусть уравнения движения объекта управления имеют вид

$$\dot{x}=\varepsilon[f(t,x)+A(x)\varphi(t,u)],\quad x(0,\varepsilon)=x_0, \tag{4}$$

где $$f(t,x)=\begin{cases} f_1(t,x) \text{ при } \Phi(t,x)\le 0,\\ f_2(t,x) \text{ при } \Phi(t,x)>0;\end{cases}$$

$t\in\mathbf{R}^+$ — время;

$x\in Q\subset\mathbf{R}^n$ — фазовый вектор;

$u\in U\subset R^m$ — вектор управления;

$\varepsilon\in(0,\sigma]$ — малый параметр;

$f_i:\mathbf{R}^+\times Q\to\mathbf{R}^n, i=1,2,$ $\varphi:\mathbf{R}^+\times U\to\mathbf{R}^m$, $\Phi:\mathbf{R}^+\times Q\to\mathbf{R}$ 2π — периодичны по функции t;

$A(x)$ — функциональная матрица порядка $n\times m$.

$S=\{(t,x)\,|\,\Phi(t,x)=0\}$ — поверхность разрывов правых частей.

Требуется найти допустимое управление $u(t,\varepsilon), t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$, минимизирующее терминальный функционал

$$I[u]=F^0(x(T)), \tag{5}$$

где $T=L\varepsilon^{-1}$, L — постоянная.

Задаче (4), (5) поставим в соответствие следующую частично усредненную задачу:

$$\dot{\tilde{x}}=\varepsilon[\overline{f}(\tilde{x})+A(\tilde{x})\varphi(t,u)],\quad x(0,\varepsilon)=x_0, \tag{6}$$

$$\overline{I}[u] = F_0(\tilde{x}(T)), \qquad (7)$$

где функция $\overline{f}(x)$ определена в (3).

Теорема 2. *Пусть в области* $D = \{t \ge 0, x \in Q, u \in U \subset R^m\}$, *где* U *— компактное множество, выполнены следующие условия:*

1. Функции $f_i(t,x), i = 1,2$ *равномерно ограничены, измеримы и* 2π*-периодичны по* t, *удовлетворяют условию Липшица по* x;

2. Функция $A(x)$ *равномерно ограничена и удовлетворяют условию Липшица по* x;

3. Функция $\varphi(t,u)$ *равномерно ограничена, измерима и* 2π*-периодична по* t, *непрерывна по* u;

4. Функция $\Phi(t,x)$ *кусочно-гладкая и* 2π*-периодична по* t, *локально удовлетворяет условию Липшица по* x *и при* $(t,x) \in S$

$$\left| \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} \right| \ge \delta, \ \delta > 0;$$

4. Функция $F_0(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* μ;

5. На отрезке $[0,2\pi]$ *функция* $\Phi(t,x)$ *имеет конечное число* $K(x)$ *простых нулей* $\max\limits_{x \in D} K(x) = K$, *где* K *— целое положительное число;*

6. Ррешение $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = x_0 \in Q' \subset Q$ *усредненной системы (6) определено для всех* $t \ge 0$ *при всех допустимых* $u(t,\varepsilon) \in U$ *и принадлежит области Q вместе с* ρ*-окрестностью при* $\varepsilon \in (0,\sigma]$.

Тогда для любого $L > 0$ *найдутся такие* $\varepsilon_0(L) \in (0,\sigma]$ *и* $C(L) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *на отрезке* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *будет выполняться неравенство*

$$h(K(t), \tilde{K}(t)) \le C\varepsilon, \ \left| I^* - \overline{I}^* \right| \le C\varepsilon,$$

где $K(t), \tilde{K}(t)$ *— замыкания множеств достижимости систем (4) и (6), соответственно;*

$h(P,Q)$ *— расстояние по Хаусдорфу между множествами* P *и* Q;

I^* *и* $\overline{I}^*$ *– оптимальные значения критерия задач (4), (5) и (6), (7).*

Доказательство. Системы

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t,x) + A(x)\varphi(t,u(t,\varepsilon))], \ \ x(0,\varepsilon) = x_0,$$

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon[\overline{f}(\tilde{x}) + A(\tilde{x})\varphi(t,u(t,\varepsilon))], \ \ \tilde{x}(0,\varepsilon) = x_0$$

удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно,

$$\left\| x(t,\varepsilon) - \tilde{x}(t,\varepsilon) \right\| \le C\varepsilon,$$

где постоянные ε_0 и $C > 0$ не зависят от выбора управления $u(t, \varepsilon)$. Таким образом, справедлива оценка

$$h(K(t), \tilde{K}(t)) \le C\varepsilon. \qquad (8)$$

Очевидно, что

$$I^* = \inf_{x \in K(L\varepsilon^{-1})} F_0(x), \qquad (9)$$

$$\overline{I}^* = \inf_{x \in \tilde{K}(L\varepsilon^{-1})} F_0(x). \qquad (10)$$

Из (8)…(10) и условия 5) теоремы следует, что

$$\left| I^* - \overline{I}^* \right| \le C\varepsilon.$$

Замечание. Запишем уравнения движения (4) и (6) в виде дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \varepsilon[f(t,x) + A(x)\varphi(t,U)], \ \ x(0,\varepsilon) = x_0, \qquad (11)$$

$$\dot{\tilde{x}} \in \varepsilon[\overline{f}(\tilde{x}) + A(\tilde{x})\varphi(t,U)], \ \ \tilde{x}(0,\varepsilon) = x_0. \qquad (12)$$

Очевидно, что дифференциальное включение (12) является частично усредненным по отношению к дифференциальному включению (11), и теорема 2 дает обоснование для дифференциального включения (11) указанной схемы частичного усреднения.

III. Полное усреднение уравнений движения в задачах управления с разрывной правой частью

Задаче (4),(5) поставим в соответствие следующую усредненную задачу:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \bar{f}(\xi) + A(\xi)v, \quad \xi(0)=x_0, \quad \tau=\varepsilon t, \tag{13}$$

$$v \in V = \left\{ v \in \mathbf{R}^m | v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s, u(s))ds, \quad u(s) \in U \right\}, \tag{14}$$

$$I[v]=F_0(\xi(\mathrm{L})). \tag{15}$$

Основание данной схемы полного усреднения проводится с помощью второй схемы частичного усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и схемы частичного усреднения в задачах управления с разрывными характеристиками.

Рассмотрим исходную задачу (4), (5) и соответствующую ей усредненную задачу (13), (14), (15), где v — новый вектор управления.

Так как множество V — выпуклый компакт, то для его построения можно воспользоваться опорной функцией

$$\begin{gathered} c(V,z) = \max_{v\in V}(v,z) = (v(z),z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\varphi(t,U),z)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{u\in U}(\varphi(t,U),z)dt = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi(t, y(t,z)),z)dt = \psi(z). \end{gathered} \tag{16}$$

Если при построении выполняется условие единственности, т.е. при всех z функция $y(t,z)$ в (16) определяется почти при всех $t \in [0, 2\pi]$ единственным образом, то множество V строго выпуклое.

Если по известной опорной функции $\psi(z)$ множества V легко проверяется принадлежность управления v множеству V, то для решения задачи можно воспользоваться усредненным уравнением (13). В противном случае усредненное уравнение строим следующим образом.

Обозначим через ∂V границу множества V. На основании теоремы А.Ф. Филиппова [9] множество достижимости системы (13) при $v \in V$ совпадает с замыканием множества достижимости системы (13) при $v \in \partial V$, т.е. множество решения системы (13) при $v \in \partial V$ всюду плотно в множестве решений при $v \in V$. Следовательно, при приближенном решении задачи оптимального управления можно выбрать $v \in \partial V$.

Рассмотрим случай строго выпуклого множества V. Для строго выпуклых множеств V функция $v(z)$ в (16), ставящая в соответствие опорному вектору z соответствующую точку множества ∂V, является однозначной.

Следовательно, задача (13)…(15) при всех $\nu \in \partial V$ эквивалентна задаче

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \bar{f}(\xi) + A(\xi)v(z), \tag{17}$$

$$\bar{I}[z] = F_0(\xi(L)), \tag{18}$$

где z — новый вектор управления, $\|z\| = 1$,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t, y(t,z))dt.$$

Таким образом, неавтономной системе уравнений движения объекта управления приведенная схема ставит в соответствие автономную систему уравнений движения с некоторым новым вектором управления.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.*

Тогда для любого L>0 найдутся такие $\varepsilon_0(L)$ *и* $C(L)$*, что на отрезке* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы неравенства*

$$h(K(t), \tilde{K}_1(t)) \le C\varepsilon\,,\ \left|I^* - I_1^*\right| \le C\varepsilon\,,$$

$$h(K(t), \tilde{K}_2(t)) \le C\varepsilon\,,\ \left|I^* - I_2^*\right| \le C\varepsilon\,,$$

где $K(t)$, $\tilde{K}_2(t)$ *— замыкания множеств достижимости систем (4) и (17), соответственно;*

$\tilde{K}_1(t)$ *— множество достижимости системы (13);*

I^*, I_1^*, I_2^* *— оптимальные значения критерия для задач (4) и (5), (13)…(15), (17) и (18).*

<u>Доказательство</u>. Запишем системы (6) и (13) в виде дифференциальных включений:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \in \varepsilon[\overline{f}(\tilde{x}) + A(\tilde{x})\varphi(t, U)],\quad \tilde{x}(0) = x_0\,, \tag{19}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \in \varepsilon[\overline{f}(\overline{x}) + A(\overline{x})V],\quad \overline{x}(0) = x_0\,. \tag{20}$$

Включение (20) является усредненным для включения (19). Так как для включений (19), (20) выполнены все условия теоремы об усреднении дифференциальных включений [2], то справедливы оценки

$$h(\tilde{K}_1(t), \tilde{K}(t)) \le C_1\varepsilon\,, \tag{21}$$

$$\left|I_1^* - \overline{I}^*\right| < C_1\varepsilon\,, \tag{22}$$

где $\tilde{K}(t)$ — замыкание множества достижимости системы (6);

$\overline{I}^*$ — оптимальное значение критерия (7).

Так как уравнение (17) эквивалентно дифференциальному включению

$$\frac{d\xi}{d\tau} \in \overline{f}(\xi) + A(\xi)\partial V\,,\ \xi(0) = x_0\,,$$

то согласно теореме А.Ф. Филиппова [5]

$$\tilde{K}_2(t) = \tilde{K}_1(t)\,,\ I_1^* = I_2^*\,. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь задачи (4), (5) и (6), (7). По теореме 2 имеем

$$h(\tilde{K}(t), K(t)) < C_2\varepsilon\,, \tag{24}$$

$$\left|\overline{I}^* - I^*\right| < C_2\varepsilon\,. \tag{25}$$

Из (21)…(25) следует утверждение теоремы.

Литература

1. Плотников, В.А. Асимптотические методы в задачах оптимального управления / В.А. Плотников. — Одесса: ОГУ, 1976. — 102 с.
2. Плотников, В.А. Метод усреднения для дифференциальных включений и его применение к задачам оптимального управления / В.А. Плотников // Диф. уравнения. — 1979. — № 8. — С. 1427 — 1433.
3. Филатов, А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальнх уравнений / А.Н. Филатов. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.
4. Небеснов, В.И. Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов / В.И. Небеснов, В.А. Плотников. — М.: Изд-во ММФ, 1977. — 72 с.
5. Небеснов, В.И. Оптимальное управление ВРШ на волнении / В.И. Небеснов, В.А. Плотников, А.Я. Кузюшин. — М.: Пищевая пром-ть, 1974. — 88 с.
6. Черноусько, Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
7. Плотников, В.А. Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями / В.А. Плотников, Т.С. Зверкова // Диф. уравнения, 1982. — № 6. — С. 1091 — 1093.
8. Витюк, А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью / А.Н. Витюк, А.В. Плотников, В.А. Плотников. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.
9. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-та Плотникова Л.И.

Поступила в редакцию 12 сентября 2009 г.