

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА БАЛОК С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.Ф. Оробей, В.П. Белоус. **Чисельний аналіз згину балок з розподіленими параметрами.** Запропоновано методику дослідження напружено-деформованого стану (НДС) балок при згині у випадку довільних законів зміни за її довжиною жорсткості, маси, навантаження та інших чинників. Алгоритм розв'язання подібних задач базується на заміні системи рівнянь з розподіленими параметрами безліччю систем рівнянь з постійними коефіцієнтами. До розв'язання останніх залучено технології чисельно-аналітичних методів граничних та скінченних елементів. Наведено приклад і подано порівняння отриманих характеристик НДС з результатами метода узагальнених початкових параметрів.

В.Ф. Оробей, В.П. Белоус. **Численный анализ изгиба балок с распределенными параметрами.** Предложена методика исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) балок при изгибе в случае произвольных законов изменения по ее длине жесткости, массы, нагрузки и других факторов. Алгоритм решения подобных задач базируется на замене системы уравнений с распределенными параметрами множеством систем уравнений с постоянными коэффициентами. К решению последних применены технологии численно-аналитических методов граничных и конечных элементов. Приведен пример и дано сравнение полученных характеристик НДС с результатами метода обобщенных начальных параметров.

V.F. Orobey, V.P. Belous. **The numerical analysis of bending of beams with the distributed parametres.** The design procedure of the deflected mode (DM) of beams in bending is offered in case of arbitrary laws of variation of rigidity, weight, loading and other factors on its length. The algorithm for solving similar problems was based on replacement of the system of the equations with the distributed parametres by a set of systems of the equations with constant factors. To the solution of the latter the technologies of numerical-analytical methods of boundary and final elements have been applied. The example is cited and comparison of the received characteristics of the DM with the results of the method of the generalised initial parametres is given.

В строительстве и различных отраслях машиностроения широко используются конструктивные элементы балочного типа, у которых по соответствующим законам изменяются по длине изгибная жесткость, погонная масса, характеристики упругого основания (при его наличии), нагрузка и другие параметры. Соппротивление подобных балок изгибу описывается уравнениями с переменными коэффициентами (или, как часто их называют, квазидифференциальными уравнениями). Как правило, получить аналитическое решение этих уравнений не удается, а решение в рядах сопровождается существенными математическими трудностями. Что касается численного решения методом конечных элементов (МКЭ), то оно требует доказательств сходимости и достоверности результатов.

Отмеченные сложности расчета характеристик НДС балок с переменной топологией не присущи численно-аналитическому методу граничных элементов (МГЭ). Применительно к стержневым системам МГЭ достаточно полно изложен [1, 2]. Целью настоящей статьи является описание методики на базе МГЭ численно-аналитического анализа изгиба балок с одновременно изменяющимися по длине изгибной жесткостью и нагрузочными характеристиками с последующими качественными выводами относительно ее эффективности в линейных задачах механики твердого деформируемого тела.

Суть предлагаемого подхода к решению квазидифференциальных уравнений состоит в следующем. Интервал интегрирования (в данном случае это длина балки l) разбивается на n частей, и в пределах каждой части все параметры объекта (балки) принимаются постоянными величинами, значения которых могут быть как несколько завышены, так и несколько занижены по отношению к их средним значениям в пределах данной n -й части. Очевидно, что наиболее точные решения уравнений с переменными коэффициентами можно будет получить при условии, что соответствующие ступенчатые зависимости будут максимально близко описывать изменение заданных параметров. Так, например, при линейных зависимостях для этих коэффициентов значения постоянных величин логично принимать как отмеченные средние значения. В пределах каждой части можно будет получить решение соответствующего дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. решение задачи Коши.

На краях интервала интегрирования, соответствующих опорным сечениям балки, необходимо удовлетворить краевым условиям, а во внутренних граничных сечениях обеспечить непрерывность параметров вектора НДС объекта. Учитывая реализацию этих условий в МГЭ, формируем краевую задачу для граничных параметров объекта с корректным выполнением исходных условий вида [2]

$$A_* X_* = -B, \quad (1)$$

где A_* — квазидиагональная матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами;

X_* — вектор начальных и конечных параметров всех частей объекта;

B — вектор внешней нагрузки.

Порядок системы алгебраических уравнений (1) равен $m \cdot n$, где m — порядок дифференциального уравнения. Решение системы (1) не вызывает затруднений, поскольку матрица коэффициентов A_* весьма сильно разрежена и накопление погрешностей округления практически не происходит. Поэтому при большом числе n можно получить достаточно точное решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Основная доля погрешности результатов предлагаемого подхода обусловлена тем, что в математической модели рассматриваемой задачи (1) коэффициенты дифференциального уравнения изменяются скачкообразно. Очевидно, что при малых скачках мала и погрешность решения.

В качестве примера рассмотрим расчет статически неопределимой балки постоянной единичной толщины [3] (рис. 1, а).

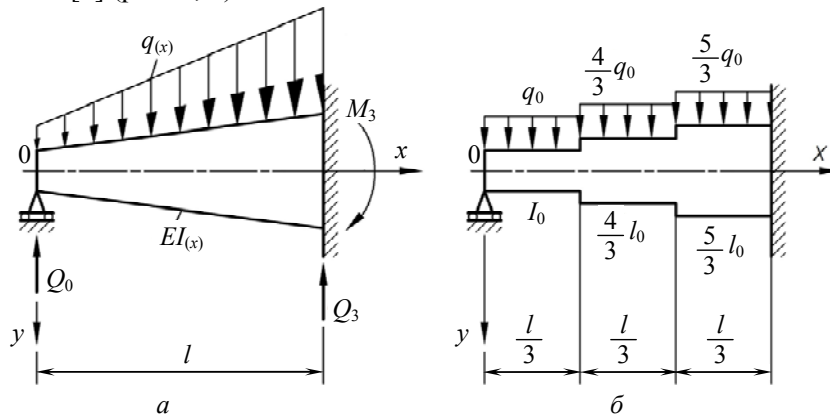


Рис. 1. Расчетные схемы нагружения балки с распределенными параметрами

Изгибная жесткость балки EI и интенсивность распределенной нагрузки q изменялись по ее длине в соответствии с линейными зависимостями

$$EI(x) = EI_0 \left(\frac{5}{6} + \frac{x}{l} \right); \quad q(x) = q_0 \left(\frac{5}{6} + \frac{x}{l} \right), \quad (2)$$

где E — модуль упругости первого рода материала балки;

I — момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси z , перпендикулярной плоскости xOy .

Здесь ограничились разбиением балки на три части (рис. 1, б) и в пределах каждой жесткость EI и интенсивность q считались постоянными [3]. Тогда очевидно, что для крайней левой части имеем

$$I_0 = \frac{6}{5} I(0); \quad q_0 = \frac{6}{5} q(0).$$

Для прогиба балки $w(x)$ в пределах k -го участка использовалось дифференциальное уравнение

$$EI_k w^{IV}(x) = q_k,$$

которое в матричной форме имело вид

$$W'(x) = A_k W(x) + B_k, \quad (3)$$

$$\text{где } W(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix}; \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_k \end{bmatrix}.$$

Здесь $\theta(x)$ — функция угла поворота поперечного сечения балки;

$M(x)$ — функция изгибающего момента;

$Q(x)$ — функция поперечной силы.

Учитывая, что, согласно крайним условиям шарнирного опирания и жесткой заделки,

$$w_0 = 0; \quad M_0 = 0; \quad w_C = 0; \quad \theta_C = 0,$$

на базе уравнения (3) [3] при использовании обобщенного метода начальных параметров были получены такие граничные характеристики:

$$\bar{w}_0 = 0\bar{q}_0 = 0; \quad \bar{\theta}_0 = 0,65\frac{\bar{q}_0}{EI_0}; \quad \bar{Q}_0 = -1,25\bar{q}_0; \quad \bar{M}_C = 1,59\bar{q}_0; \quad \bar{Q}_C = 2,75\bar{q}_0,$$

$$\text{где } \bar{q}_0 = q_k \left(\frac{l}{3}\right)^4.$$

В настоящей работе пролет балки разбивался на n равных частей. Тогда длина каждой части $x_i = l/n$. В пределах каждой части по формулам (2) вычислялись значения q_i и EI_i при среднем значении аргумента x . При таком подходе получаем постоянные значения коэффициентов на каждом участке балки, а диагональные блоки матрицы A_* и грузовые члены матрицы B соответствуют ее классическому изгибу. Для упрощения условия непрерывности вектора НДС балки $W(x)$ во внутренних граничных сечениях внесем параметры жесткости в исходные матрицы. В результате последние принимают вид

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & -\frac{x_i^2}{2EI_i} & -\frac{x_i^3}{6EI_i} \\ & 1 & -\frac{x_i}{EI_i} & -\frac{x_i^2}{2EI_i} \\ & & 1 & x_i \\ & & & 1 \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{-q_i x_i^4}{24EI_i} \\ \frac{-q_i x_i^3}{6EI_i} \\ \frac{-q_i x_i^2}{2EI_i} \\ -q_i x_i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Если требуется решить другие задачи расчета балки с распределенными параметрами, то необходимо поменять содержимое матриц (4).

Результаты решения краевой задачи (1), сформированной из матриц (4), для балки длиной $l=3$ м в безразмерном варианте абсолютных значений представлены в таблице.

Граничные характеристики НДС балки при использовании МГЭ и МКЭ

Число участков балки n	Угол поворота в масштабе жесткости $\theta^* = EI_0 \bar{\theta}_0 / \bar{q}_0$	Реакция левой опоры $Q_0^* = \bar{Q}_0 / \bar{q}_0$	Изгибающий момент в заделке $M_3^* = \bar{M}_3 / \bar{q}_0$	Реакция в заделке $Q^* = \bar{Q}_3 / \bar{q}_0$
Результаты МГЭ				
3	0,5633	1,2203	1,6726	2,7797
10	0,5548	1,1890	1,6905	2,8110
20	0,5540	1,1867	1,6919	2,8133
30	0,5539	1,1862	1,6922	2,8138
40	0,5538	1,1861	1,6922	2,8138
50	0,5538	1,1860	1,6923	2,8140
Результаты обобщенного метода начальных параметров [3] и их сравнение (Δ) с результатами МГЭ				
3	0,65 ($\Delta = 15,4\%$)	1,25 ($\Delta = 2,43\%$)	1,59 ($\Delta = 5,19\%$)	2,75 ($\Delta = 1,08\%$)

Результаты МКЭ (SolidWorks Simulation)				
3	0,5844	1,2102	1,7025	2,7904
10	0,6154	1,1813	1,7136	2,8187
20	0,5740	1,1803	1,7112	2,8198
30	0,5738	1,1798	1,7115	2,8203
40	0,5737	1,1796	1,7117	2,8204
50	0,5736	1,1795	1,7118	2,8205

Эпюры характеристик НДС ($n=50$) приведены на рис. 2.

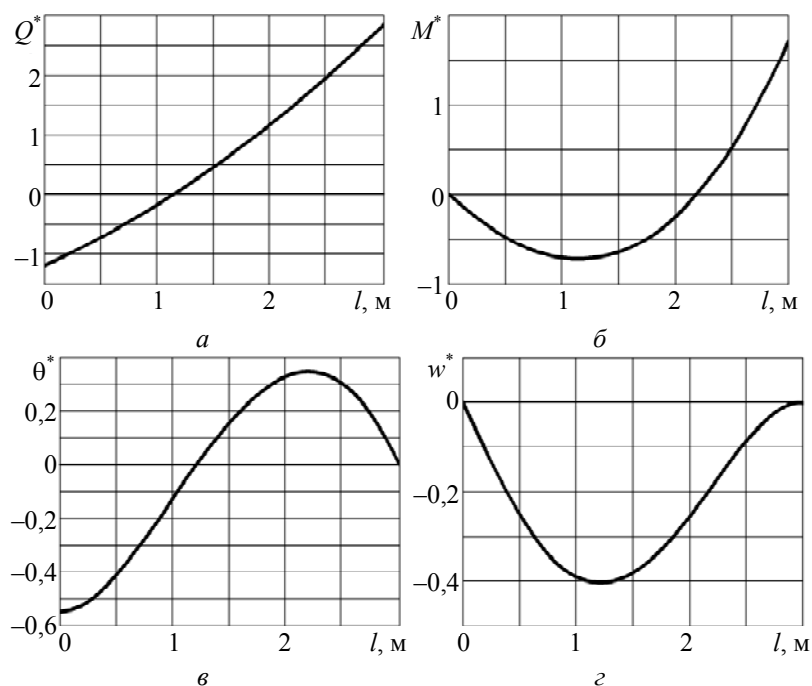


Рис. 2. Эпюры безразмерных характеристик НДС балки: поперечной силы Q^* (а); изгибающего момента M^* (б); угла поворота θ^* (в); прогиба $w^* = \bar{w}/\bar{q}_0$ (г)

Согласно полученным значениям следует, что разделение балки на 30 частей приемлемо по точности (до трех значащих цифр) для практических инженерных приложений, и дальнейшее увеличение числа участков уже не приведет к заметному уточнению решения. При решении задачи устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных балок получены аналогичные выводы [4]. Сравнение с результатами обобщенного метода начальных параметров показывает, что расхождения в значениях Δ при использовании МГЭ даже при весьма малом $n = 3$ довольно незначительно, особенно по силовым характеристикам НДС. Следует, однако, отметить, что применимость метода начальных параметров весьма ограничена, т. к. рекуррентные зависимости данного метода содержат произведения матриц (4), которые существенно способствуют накоплению погрешностей округления и при увеличении числа n увеличивается погрешность результата. Данный недостаток отсутствует в численно-аналитическом МГЭ. Добавим также, что результаты МГЭ, в отличие от метода начальных параметров, практически точно удовлетворяют уравнениям равновесия рассмотренной балки.

При решении данной задачи был также использован МКЭ. На первом этапе была создана геометрическая модель балки с использованием программного продукта SolidWorks. При этом учитывалось, что при дальнейшем расчете характеристик НДС тела типа балки при помощи цифрового модуля COSMOSWorks на ее участках возможно приложение лишь равномерно распределенной нагрузки.

На втором этапе на базе созданной геометрической 3D-модели при разном числе участков n решалась краевая задача статического изгиба при помощи отмеченного цифрового модуля. Предварительно были заданы нагрузки на участках балки, краевые условия, соответствующие шарнирной опоре и жесткой заделке, а также учтена характеристика материала балки – модуль упругости первого рода.

Результаты расчетов, полученные при использовании МКЭ, представлены в таблице и свидетельствуют, что и в этом случае значения характеристик НДС практически не зависят от числа участков при $n > 30$ и близко совпадают со значениями, полученными при реализации МГЭ. Таким образом, подтвердилась высокая эффективность предложенной методики численно-аналитического анализа изгиба балок с переменной по длине топологией на базе таких двух нашедших широкое инженерное приложение численных методов, как МГЭ и МКЭ.

Следует отметить, что предложенная методика является универсальной по отношению к физическому содержанию задачи, так как использованный в ней алгоритм позволяет решать любые линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, которые описывают физические явления не только задач механики, но и других наук.

Литература

1. Численные методы в механике / Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В. и др. — Одесса: Стандарт, 2005. — 563 с.
2. Решение задач сопротивления материалов, теоретической и строительной механики в среде MATLAB / Дашенко А.Ф., Кириллов В.Х., Коломиец Л.В. и др. — Одесса: Стандарт, 2009. — 551 с.
3. Постнов, В.А. Строительная механика корабля и теория упругости / В.А. Постнов, В.П. Сулов. — Л.: Судостроение, 1987. — Т. 1. — 287 с.
4. Оробей, В.Ф. Численно-аналитическое решение краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / В.Ф. Оробей, Г.В. Кострова // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2007. — Вып. 1(27). — С. 23 — 30.

Рецензент д-р техн наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 26 июля 2009 г.