УДК 621.391

Ю.К. Филипский, д-р техн. наук, проф.,
С.В. Семенюк, магистр,
Одес. нац. политехн. ун-т

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОТКЛИКА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю.К. Філіпський, С.В. Семенюк. **Застосування операторного методу до визначення відгуку динамічних систем.** Розглянуто можливості визначення динамічних характеристик ланцюгів на підставі стаціонарного коефіцієнту передачі, виключаючи імпульсний відгук. Проведено аналіз фільтра нижніх частот Батерворта третього порядку. Одержано вирази динамічного коефіцієнту передачі і динамічної похибки.

Ю.К. Филипский, С.В. Семенюк. **Применение операторного метода к определению отклика динамических систем.** Рассмотрены возможности определения динамических характеристик цепей на основании стационарного коэффициента передачи, исключая импульсный отклик. Проведен анализ фильтра нижних частот Баттерворта третьего порядка. Получены выражения динамического коэффициента передачи и динамической погрешности.

Yu.K. Filipsky, S.V. Semenyuk. **Application of operational method to determination of the dynamic systems response.** Possibilities of determining the dynamic characteristics of circuits on the basis of stationary gain, except for a pulse response, are considered. The analysis of the Butterworth low, pass filter of the third order is carried out. Expressions of both the dynamic gain and the dynamic error are obtained.

В современной радиоэлектронике и ее приложениях часто встречаются задачи исследования различных по форме процессов в реальном масштабе времени. При решении стационарных задач предполагается существование сигнала на всем интервале времени от минус до плюс бесконечности. При этом используются стационарные частотные характеристики, а также преобразования Фурье и Лапласа [1].

В реальных условиях любой процесс или сигнал имеют начало и конец и, кроме этого, исследуемый сигнал может менять свои параметры в процессе развития. В таких случаях необходимо переходить к частотно-временным методам анализа и динамическим характеристикам цепи, которые в последнее время получили широкое развитие.

К частотно-временным методам анализа относятся: метод динамического коэффициента передачи (ДКП) [2], применение текущего и мгновенного спектров [3], оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование [4].

Динамический коэффициент передачи предполагает использование известной импульсной характеристики цепи в соответствии с выражением

$$K(j\omega,t)=\int_0^t h(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{1}$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика цепи;

ω — круговая частота.

В этом случае можно определить закон изменения огибающей радиосигнала на любой частоте при быстром изменении амплитуды, частоты, фазы либо др. параметров.

Недостатком таких вычислений является необходимость определения импульсной характеристики цепи.

Для цепей выше второго порядка определить импульсную характеристику цепи $h(t)$ чаще всего затруднительно.

Предлагается развитие метода ДКП путем использования коэффициента передачи в операторной $K(p)$ или комплексной $K(j\omega)$ формах с коэффициентами, зависящими от параметров цепи.

Коэффициент передачи в операторной форме

$$K(p)=\frac{M(p)}{N(p)},$$

где $M(p)$, $N(p)$ — полиномы переменной p с действительными коэффициентами.

Для этого импульсную характеристику цепи следует представить обратным преобразованием Фурье или обратным преобразованием Лапласа, которое вычисляется с помощью вычетов, взятых в полюсах стационарного коэффициента передачи, в виде

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}K(p)e^{pt}dp=\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)}e^{p_i t}, \tag{2}$$

где p_i — i-й корень знаменателя $N(p)$.

После подстановки (2) в (1) ДКП

$$K(p,t)=\int_0^t h(t)e^{-pt}dt=\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)}e^{-(p-p_i)t}dt=\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p-p_i)}[1-e^{-(p-p_i)t}]. \tag{3}$$

Выражение (3) преобразуется к виду

$$K(p,t)=K(p)-\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p-p_i)}e^{-(p-p_i)t}, \tag{4}$$

где первое слагаемое является стационарным коэффициентом передачи, а второе — динамической погрешностью.

Согласно выражению (4), переходя к комплексной частоте, получим ДКП

$$K(j\omega,t)=K(j\omega)-e^{-j\omega t}\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)(j\omega-p_i)}e^{p_i t}. \tag{5}$$

Для цепи второго порядка ($n=2$) при $p_{1;2}=-\alpha\pm j\omega_c$ ДКП приобретает вид

$$K(j\omega,t)=K(j\omega)[1-e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t})], \tag{6}$$

где α — затухание цепи;

ω_c — частота собственных колебаний цепи.

В формуле (6) для определенности использованы сопряженные корни, что справедливо для колебательного контура с потерями.

Второй сомножитель в (6) содержит два слагаемых с частотами $\omega\pm\omega_c$. Суммарная составляющая находится далеко за пределами полосы пропускания контура и ее можно исключить. В результате

$$K(j\omega,t)=K(j\omega)(1-e^{-\alpha t}e^{-j\Delta\omega t}),$$

где $\Delta\omega=\omega-\omega_c$ — расстройка по частоте.

Этот результат, а также анализ динамических характеристик колебательного контура полностью совпадают с известными данными, где в качестве исходного соотношения была использована импульсная характеристика контура [2].

Выражение (5) относится к цепям произвольного порядка. Так, при анализе нормированного фильтра Баттерворта 3-го порядка с коэффициентом передачи

$$K(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

и с корнями $p_1=-1=-\beta_1$ и $p_{2;3}=-0{,}5\pm j0{,}866=-\beta_2\pm j\Omega_c$ ДКП фильтра согласно выражению (5) принимает вид

$$K(j\Omega,y)=K(j\Omega)\left[1-e^{-jy\Omega}\left[(1+j\Omega-\Omega^2)e^{-y\beta_1}+e^{-\frac{y\beta_1}{2}}(1+j\Omega)\left[\left(\frac{j\Omega+2}{\sqrt{3}}\right)\sin(\Omega_c y)-j\Omega\cos(\Omega_c y)\right]\right]\right],$$

где $\Omega=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ — нормированная частота;

$\omega_0=1$ — частота среза;

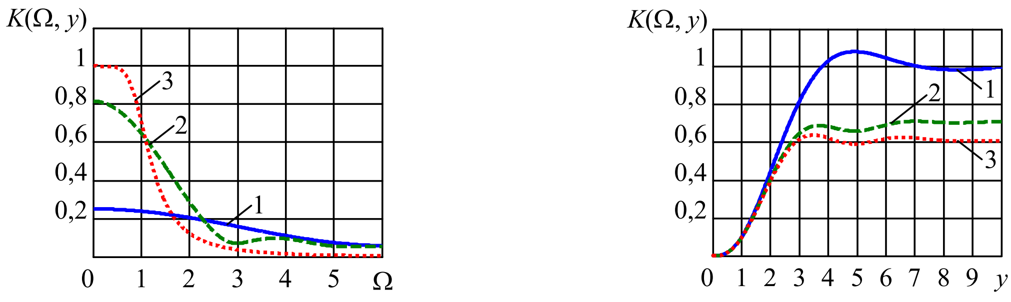
$y=t$ — нормированное время;

$\beta_1=1$ и $\beta_2=0{,}5$ — затухание нормированного фильтра;

$\Omega_c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866$ — собственная нормированная частота;

$K(j\Omega)=\dfrac{1}{1-2\Omega^2+j\Omega(2-\Omega^2)}$ — нормированный стационарный коэффициент передачи.

Переходя к модулю этого выражения, строим два семейства ДКП: первое как функцию частоты, второе как функцию времени (рис. 1 *а*, *б*, соответственно).



а *б*

Рис. 1. ДКП как функция частоты при y=1,5 (1); 3 (2); 20 (3) (а) и как функция времени для значений Ω=0 (1); 1 (2); 1,1 (3) (б)

Динамические резонансные характеристики ДКП (кривые 1 и 2) заметно отличаются от стационарной характеристики (кривая 3), а временная зависимость ДКП приобретает колебательный характер (см. рисунок 1, *б*).

Динамическая погрешность в (5)

$$\Delta K(j\omega,t)=e^{-j\omega t}\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)(j\omega-p_i)}e^{p_i t} \qquad (7)$$

характеризует динамическую погрешность при определении отклика электрических фильтров.

Для нормированного фильтра Баттерворта третьего порядка на основании (7) динамическая погрешность

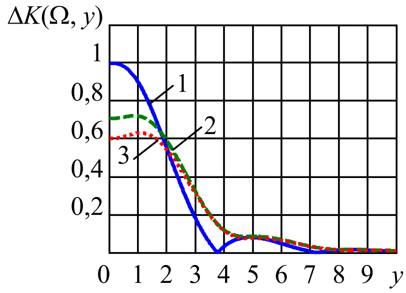


Рис. 2. Динамическая погрешность ФНЧ Баттерворта 3-го порядка для значений Ω=0 (1); 1 (2); 1,1 (3)

$$\Delta K(j\Omega,y)=K(j\Omega)e^{-jy\Omega}\left[(1+j\Omega-\Omega^2)e^{-y\beta_1}+e^{-\frac{y\beta_1}{2}}(1+j\Omega)\left[\left(\frac{j\Omega+2}{\sqrt{3}}\right)\sin(\Omega_c t)-j\Omega\cos(\Omega_c t)\right]\right]. \qquad (8)$$

Разность модулей ДКП $K(\omega,t)$ и модуля стационарного коэффициента передачи $K(\omega)$ является мерой искажений сигнала на выходе фильтра. Зависимость (8) приведена в нормированном виде (рис. 2).

Таким образом, применение операторного метода исключает необходимость интегрирования при вычислении ДКП. Становится возможным анализировать цепь практически любой сложности. Исходными данными при анализе могут быть либо сама принципиальная схема фильтра с его параметрами, либо операторный коэффициент передачи, заданный в виде отношения двух полиномов. В любом случае остается определить лишь корни знаменателя, что при наличии программы расчета корней является простой технической задачей.

Литература

1. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — [5-е изд.]. — М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
2. Філіпський, Ю.К. Динаміка сигнальних перетворень: навч. посіб. для студентів ВНЗ / Ю.К. Філіпський. — Одеса: ОДПУ, 2006. — 104 с.
3. Харкевич, А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич. — М.: Физматгиз, 1962. — 236 с.
4. Воробьев, В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. — СПб.: ВУС, 1999. — 204 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Ситников В.С.

Поступила в редакцию 6 апреля 2010 г.