УДК 517.911

Т.А. Комлева, канд. физ.-мат. наук, доц.,
А.В. Плотников, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры,
Л.И. Плотникова, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Т.О. Комлєва, А.В. Плотніков, Л.І. Плотнікова. **Усереднення диференціальних включень з нечіткою правою частиною на скінченному проміжку.** Доводиться можливість використання повної схеми усереднення для диференціальних включень з нечіткою правою частиною на скінченому проміжку.

Т.А. Комлева, А.В. Плотников, Л.И. Плотникова. **Усреднение дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке.** Доказывается возможность применения полной схемы усреднения для дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке.

T.A. Komleva, A.V. Plotnikov, L.I. Plotnikova. **Averaging of differential inclusions with a fuzzy right-hand side on the final interval.** The possibility of application of the full averaging scheme for differential inclusions with a fuzzy right-hand side on the final interval is proved.

В 1990 г. J.P. Aubin и V.A. Baidosov ввели в рассмотрение дифференциальные включения с нечеткой правою частью [1...3]. Их подход к разрешению таких уравнений основан на сведении последних к обычным дифференциальным включениям. В дальнейшем были рассмотрены свойства решений данных дифференциальных включений [4…7] и управляемые дифференциальные включения с нечеткой правой частью и некоторые задачи управления [8…13].

Докажем возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $u: R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

— u полунепрерывно сверху, т.е. для любого $\tilde{\chi} \in R^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\chi, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|\chi - \tilde{\chi}\| < \delta$ справедливо неравенство $u(\chi) < u(\tilde{\chi}) + \varepsilon$;

— u нормально, т.е. существует вектор $\chi_0 \in R^n$ такой, что $u(\chi_0) = 1$;

— u нечетко выпукло, т.е. для любых $\chi_1, \chi_2 \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2) \ge \min\{u(\chi_1), u(\chi_2)\}$;

— замыкание множества $\{\chi \in R^n \; : \; u(\chi) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является элемент $0(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = 0, \\ 0, & \chi \in R^n \setminus 0. \end{cases}$

Введем обозначение $[u]^\alpha = \begin{cases} \{\chi \in R^n \; : \; u(\chi) \ge \alpha\}, & 1 \ge \alpha > 0, \\ cl\{\chi \in R^n \; : \; u(\chi) > \alpha\}, & \alpha = 0. \end{cases}$

Определим в пространстве E^n метрику $D: E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(u,v) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Легко показать, что $D(u+w, v+w) = D(u,v)$, $D(ku, kv) = kD(u,v)$ для всех $u, v, w \in E^n$ и $k \ge 0$.

Теорема. Метрическое пространство $(E^n,\ D)$ является полулинейным полным метрическим пространством [14].

Пусть задано дифференциальное включение с нечеткой правой частью, содержащее малый параметр

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $X: R \times R^n \to E^n$ — 2π-периодично по t;

$\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Определение. Нечетким *R*-решением дифференциального включения (1) называется непрерывное нечеткое отображение $R: R \to E^n$ такое, что для всех $\alpha \in [0,1]$ почти всюду выполняется соотношение

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} h\left([R(t+\Delta)]^\alpha, \bigcup_{x \notin [R(t)]^\alpha} \left\{ x + \varepsilon \int_t^{t+\Delta} [X(s,x)]^\alpha \right\} \right) = 0.$$

Поставим в соответствие включению (1) следующее усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\chi} \in \varepsilon \bar{X}(\chi), \quad \chi(0) = x_0, \tag{2}$$

где $\bar{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t,x)\,dt$.

Теорема. Пусть в области $Q = \{t \ge 0, \quad x \in D \subset R^n\}$ выполнены следующие условия:

— отображение $X(t,x)$ является непрерывным, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ, равномерно ограниченым с постоянной M;

— для всех $x_0 \in D' \subset D$ и $t \geq 0$ решения включения (2) вместе с некоторой ρ-окрестностью лежат в области D.

Тогда для любого $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon^0(L) > 0$ и $C(L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$

$$D(R(t), \bar{R}(t)) \leq C\varepsilon, \tag{3}$$

где $R(t)$ и $\bar{R}(t)$ нечеткие *R*-решения соответственно систем (1) и (2).

Доказательство. Докажем сначала справедливость включения

$$R(t) \subset S_{C\varepsilon}(\bar{R}(t)). \tag{4}$$

Возьмем произвольное $\alpha \in [0,1]$. Пусть $x(t)$ — произвольное решение включения

$$\dot{x} \in \varepsilon [X(t,x)]^{\alpha}, \qquad x(0) = x_0,$$

т.е.

$$x(t) = x(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t} v(\tau)\, d\tau, \qquad x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $t_i = 2\pi i$, $v(t) \in [X(t,x)]^{\alpha}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots$.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t} \tilde{v}(\tau)\, d\tau, \qquad \tilde{x}(0) = x_0, \tag{6}$$

где $\|v(t) - \tilde{v}(t)\| = \min\limits_{\tilde{v} \in [X(t, \tilde{x}(t_i))]^{\alpha}} \|v(t) - \tilde{v}\|$.

Из (5) и (6) следует, что

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x(t_i) - \tilde{x}(t_i)\| + \varepsilon \int_{t_i}^{t} \|v(\tau) - \tilde{v}(\tau)\|\, d\tau. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$\|x(t) - \tilde{x}(t_i)\| \leq \|x(t) - x(t_i)\| + \|x(t_i) - \tilde{x}(t_i)\| \leq \delta_i + \varepsilon M(t - t_i),$$

$$h([X(t,x(t))]^{\alpha},\ [X(t,\tilde{x}(t_i))]^{\alpha}) \leq \lambda[\delta_i + \varepsilon M(t - t_i)],$$

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\| \leq \lambda[\delta_i + \varepsilon M(t - t_i)],$$

где $\delta_i = \|x(t_i) - \tilde{x}(t_i)\|$.

Следовательно, из (7) имеем

$$\delta_{i+1} \leq \delta_i + \varepsilon 2\lambda\pi(\varepsilon M\pi + \delta_i), \quad \delta_0 = 0, \quad i = 0,1,\ldots. \tag{8}$$

Так как $2\pi(i+1) \leq L\varepsilon^{-1}$, то из (8) получим

$$\delta_{i+1} \leq \varepsilon M\pi(e^{\lambda L} - 1). \tag{9}$$

Учитывая, что при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ справедливы неравенства

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq 2\varepsilon\pi M, \qquad \|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)\| \leq 2\varepsilon\pi M, \tag{10}$$

из (9),(10) получим

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon\pi M(e^{\lambda L} + 3). \tag{11}$$

Запишем функцию $\tilde{x}(t)$ в точках t_{i+1}

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{v}(\tau)\, d\tau = \tilde{x}(t_i) + \varepsilon v_i 2\pi. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\chi}(t)=\tilde{\chi}(t_i)+\varepsilon v_i(t-t_i), \quad \tilde{\chi}(0)=x_0, \quad t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{13}$$

Из (10)...(13) имеем

$$\left\|\tilde{x}(t)-\tilde{\chi}(t)\right\|\le 2\varepsilon\pi M . \tag{14}$$

Так как при $t\in[t_i,t_{i+1}], \quad i=0,1,...$

$$\left\|\tilde{\chi}(t)-\tilde{\chi}(t_i)\right\|\le 2\varepsilon\pi M, \qquad h([\bar{X}(\tilde{\chi}(t_i))]^{\alpha},\ [\bar{X}(\chi(t))]^{\alpha})\le 2\varepsilon\lambda\pi M,$$

то

$$\beta\left(\frac{d\tilde{\chi}(t)}{dt},\varepsilon[\bar{X}(\tilde{\chi}(t))]^{\alpha}\right)\le 2\lambda\pi M\varepsilon^2. \tag{15}$$

Из неравенства (15) следует, что существует решение $\chi(t)$ дифференциального включения $\dot{\chi}\in\varepsilon[\bar{X}(\chi)]^{\alpha}, \quad \chi(0)=x_0$, такое, что

$$\left\|\chi(t)-\tilde{\chi}(t)\right\|\le\varepsilon^2 2\pi\lambda M\int_0^t e^{\varepsilon\lambda\tau}d\tau\le 2\varepsilon\pi M(e^{\lambda L}-1). \tag{16}$$

Из неравенств (11), (14) и (16) получим

$$\left\|x(t)-\chi(t)\right\|\le C_1\varepsilon, \tag{17}$$

где $C_1=3\pi M(e^{\lambda L}+1)$.

Так как мы выбирали произвольное $\alpha\in[0,1]$ и оценка от α не зависит, то, таким образом, первая часть теоремы доказана.

Взяв произвольное $\alpha\in[0,1]$ и решение $\chi(t)$ включения $\dot{\chi}\in\varepsilon[\bar{X}(\chi)]^{\alpha}, \quad \chi(0)=x_0$, и проделав выкладки, аналогичные предыдущим, можно построить решение $x(t)$ включения $\dot{x}\in\varepsilon[X(t,x)]^{\alpha}, \quad x(0)=x_0$ такое, что справедливо неравенство вида (17) с некоторой постоянной C_2. Выбирая $C=\max\{C_1,C_2\}$ и $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы решения $x(t)$ не выходили за ρ-окрестность решений $\chi(t)$, получим справедливость утверждения теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Данная статья обобщает результат, полученный В.А. Плотниковым для обычных дифференциальных включений [15] на случай дифференциальных включений с нечеткой правой частью.

Литература

1. Aubin, J.P. Fuzzy differential inclusions / J.P. Aubin // Problems of Control and Inform. Theory. — 1990. — Vol.19, № 1. — P. 55 — 67.
2. Baidosov, V.A. Differential inclusions with fuzzy right-hand sides / V.A. Baidosov // Soviet Mathematics. — 1990. — Vol. 40, № 3. — P. 567 — 569.
3. Baidosov, V.A. Fuzzy differential inclusions / V.A. Baidosov // J. of Appl. Math. and Mech. — 1990. — Vol. 54, № 1. — P. 8 — 13.
4. Hullermeir, E. An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems / E. Hullermeir // Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Systems. — 1997. — № 5. — P. 117 — 137.
5. Lakshmikantham, V. Interconnection between set and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham, S. Leela, A.S. Vatsala // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 54. — P. 351 — 360.
6. Lakshmikantham, V. Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. — Vasundhara Devi: Cambridge Scientific Publishers, 2006. — 204 p.
7. Lakshmikantham, V. Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham, A.A. Tolstonogov // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 55. — P. 255 — 268.
8. Васильковская, В.С. Интегро-дифференциальные системы с нечеткими помехами / В.С. Васильковская, А.В. Плотников // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 10. — С. 1323 — 1331.
9. Молчанюк, И.В. Линейные системы управления с нечетким параметром / И.В. Молчанюк, А.В. Плотников // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 1. — С. 63 — 73.
10. Молчанюк, И.В. Две задачи встречи N нечетких управляемых объектов / И.В. Молчанюк, А.В. Плотников // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. — 2007. — Т. 12, вип. 7. Математика і механіка — С. 121 — 129.

11. Молчанюк, И.В. Необходимые и достаточные условия оптимальности в задачах управления с нечетким параметром / И.В. Молчанюк, А.В. Плотников // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 3. — С. 384 — 390.
12. Plotnikov, A.V. Linear Problems of Optimal Control of Fuzzy Maps / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva // Intelligent Information Management (Scientific Research Publishing, Inc., USA). — 2009. — Vol. 1, № 3. — P. 139 — 144.
13. Plotnikov, A.V. Linear Control Problems of the Fuzzy Maps / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, I.V. Molchanyuk // J. Software Engineering & Applications (Scientific Research Publishing, Inc., USA). — 2010. — Vol. 3, № 3. — P. 191 — 197.
14. Puri, M.L. Differential of fuzzy functions / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — № 91. — P. 552 — 558.
15. Плотников, В.А. Метод усреднения в задачах управления / В.А. Плотников — К.; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 21 апреля 2010 г.