

УДК 539.384

В.В. Грибова, канд. физ.-мат. наук, Одес. нац. политехн. ун-т

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ МЕТОДОМ МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ПО ЭНЕРГИИ

*В.В. Грибова. Розв'язання задачі про вигини защемленої по контуру пластини з тонким лінійним включенням методом мінімізації похибки за енергією.* Розглянуто задачу дослідження деформації пластин з тонкими включеннями. Розв'язання задачі розшукується у вигляді лінійної комбінації спеціальної системи бігармонійних функцій. Невідомі коефіцієнти розшуковуються методом мінімізації похибки за енергією.

*Ключові слова:* система бігармонійних функцій; метод граничної коллокації; клас функцій з особливостями, що не інтегруються; вигини пластини; метод мінімізації похибки за енергією.

*В.В. Грибова. Решение задачи об изгибе защемленной по контуру пластины с тонким линейным включением методом минимизации погрешности по энергии.* Рассмотрена задача исследования деформации пластин с тонкими включениями. Решение задачи разыскивается в виде линейной комбинации специальной системы бигармонических функций. Неизвестные коэффициенты отыскиваются методом минимизации погрешности по энергии.

*Ключевые слова:* система бигармонических функций; метод граничной коллокации; класс функций с неинтегрируемыми особенностями; прогибы пластины; метод минимизации погрешности по энергии.

*V.V. Gribova. Solution to the problem of bending of a clamped along the contour plate with a thin linear inclusion by minimizing the energy error.* The problem of investigating the deformation of plates with subtle inclusions is considered. Solution of the problem is sought as a linear combination of a special system of biharmonic functions. The unknown coefficients are found by the method of minimizing the energy error.

*Keywords:* system of biharmonic functions; boundary collocation method; class of functions with nonintegrable singularities; deflections of the plate; method of minimizing the energy error.

Рассматривается задача об изгибе пластины с тонким линейным включением. Известно, что наличие в конструкциях подкрепляющих стержней, опор, прямолинейных дефектов типа трещин и включений значительно усложняет расчет пластин, т.к. перечисленные элементы являются концентраторами напряжений. Традиционным методом решения таких задач является метод, основанный на сведении задач к интегральным уравнениям относительно контактных усилий [1...4].

Предлагается дальнейшая разработка и детализация методов решения задач изгиба конечных пластин с линейными включениями, где решение задачи разыскивается в виде линейной комбинации полной системы бигармонических функций, учитывающих наличие включения. Для нахождения неизвестных коэффициентов линейной комбинации впервые предлагается метод минимизации погрешности по энергии. Для контроля результатов неизвестные коэффициенты находились также методом граничной коллокации.

Рассматривается прямоугольная пластина ( $|x| \leq a, |y| \leq b$ ), внутри которой на отрезке  $y = 0, |x| \leq c$  расположено тонкое жесткое включение. Считая, что вне включения на пластину не действует распределенная нагрузка, можно прийти к бигармоническому уравнению относительно прогибов пластины [1]

$$\Delta^2 \omega(x, y) = 0, \quad |x| \leq a, |y| \leq b, \text{ кроме } y = 0, |x| \leq c, \quad (1)$$

где  $\omega(x, y)$  — прогибы пластины.

Включение перемещается вертикально под действием приложенной к нему нагрузки  $R$ . В математической постановке включение можно рассматривать как разрез с берегами  $y = \pm 0, |x| \leq c$ . На берегах разреза выполняются условия

$$\omega(x, \pm 0) = W_0, \quad |x| \leq c, \quad (2)$$

$$\omega'_y(x, \pm 0) = 0, \quad |x| \leq c. \quad (3)$$

На сторонах пластины заданы условия защемления

$$\omega(\pm a, y) = \omega'_x(\pm a, y) = 0, \quad |y| \leq b, \quad (4)$$

$$\omega(x, \pm b) = \omega'_y(x, \pm b) = 0, \quad |x| \leq a. \quad (5)$$

Требуется найти распределение прогибов  $\omega(x, y)$ , изгибающих моментов  $M_x, M_y$ , обобщенных перерывающих сил  $V_x, V_y$ .

С учетом четности задачи по  $x$  и  $y$ , приближенное представление прогиба  $\omega_N(x, y)$  можно записать в виде [1]

$$\omega_N(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(x, y), \quad (6)$$

где  $u_0(x, y) = \text{Re} \left( \ln(z + (z^2 - 1)^{1/2}) - z(z^2 - 1)^{1/2} \right)$ ;

$$u_1(x, y) = \text{Re} \left( (z\bar{z} - 1) \ln(z + (z^2 - 1)^{1/2}) \right);$$

$$u_{4n-2}(x, y) = \text{Re} \left( z^{2n-1} (z^2 - 1)^{3/2} \right), \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n-1}(x, y) = \text{Re} \left( 2iyz^{2n-2} (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n}(x, y) = \text{Re} z^{2n-2}, \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n+1}(x, y) = \text{Re} \bar{z} z^{2n-1}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Неизвестные коэффициенты  $a_n (n = \overline{0, N})$  предлагается находить методом минимизации погрешности по энергии пластины. Данный метод является близким в идейном отношении к методам [2]...[4]. Идея метода минимизации погрешности по энергии излагается на примере краевой задачи для уравнения изгиба пластин в области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ :

$$\Delta^2 \omega(x, y) = q(x, y), \quad ((x, y) \in \Omega), \quad (7)$$

в случае защемления пластины по границе  $\Gamma$

$$\omega|_{\Gamma} = f_0(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = f_1(x, y), \quad ((x, y) \in \Gamma = d\Omega). \quad (8)$$

Пусть  $\omega(x, y)$  — точное, а  $\omega_N(x, y)$  — приближенные решения задачи (7), (8). Согласно [1],  $\omega_N(x, y)$  можно представить в виде

$$\omega_N(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i u_i(x, y) + \omega_q(x, y), \quad (9)$$

где  $u_i(x, y), (i = \overline{1, N})$  — полная система решений уравнения (7) в области  $\Omega$  [1];

$\omega_q(x, y)$  — частное решение уравнения (7).

Потенциальная энергия изгиба тонкой пластины  $W(u)$  [5]

$$W(u) = \int_{\Omega} ((\Delta u)^2 - 2(1-\nu)(u''_{xx}u''_{yy} - (u''_{xy})^2)) d\Omega, \quad (10)$$

где  $u$  — прогиб пластины,

$\nu$  — коэффициент Пуассона.

Билинейная форма, связанная с потенциальной энергией  $W(u)$  изгиба пластины

$$E(u) = \iint_{\Omega} \left[ \Delta u \Delta v + (1-\nu) \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] d\Omega. \quad (11)$$

Очевидно,

$$E_{\Omega}(u, u) = W(u). \quad (12)$$

В основе метода лежит тождество [5], позволяющее вычислить  $E_{\Omega}(u, v)$  для неизвестного внутри  $\Omega$  точного решения  $u(x, y)$  и известной бигармонической функции  $v(x, y)$  ( $\Delta^2 v = 0$ ):

$$E_{\Omega}(u, v) = E_{\Gamma}(u, v), \quad E_{\Gamma}(u, v) = \iint_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} Mv - uVv \right) dS + \int_{\Omega} u \Delta^2 v d\Omega, \quad (13)$$

где  $Mv = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v$ ,

$$Vv = -D \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v,$$

$D$  — цилиндрическая жесткость,

$\nu$  — коэффициент Пуассона,

$n$  — нормаль,

$s$  — касательная к границе  $\Gamma = \partial\Omega$ .

При краевых условиях (8) неизвестные коэффициенты  $a_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) могут быть найдены из условия минимума функционала энергии погрешности

$$F(a_1, \dots, a_N) = E(\omega - \omega_N, \omega - \omega_N), \quad (14)$$

где  $\omega$  — неизвестное точное,  $\omega_N$  — приближенные решения задачи (7), (8).

После минимизации  $F$  и записи условия существования экстремума

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \quad (15)$$

получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_n$

$$\sum_{n=1}^N a_n E(u_n, u_m) = b_m \quad (m = \overline{1, N}), \quad (16)$$

$$b_m = E(\omega - \omega_q, u_m).$$

Правые части  $b_m$  в (16) зависят от неизвестной функции  $\omega$ , однако с помощью известного тождества (13) получено выражения для  $b_m$  с помощью известных значений  $\omega$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  на границе области  $\Omega$

$$b_m = \iint_{\Gamma} \left[ (f_1(s) - \frac{\partial \omega_q}{\partial n}) M u_m - (f_0(s) - \omega_q) V u_m \right] ds. \quad (17)$$

Формулы (17) справедливы, если граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  является гладкой. Если граница  $\Gamma$  является кусочно-гладкой, выражения (17) необходимо уточнить.

Пусть граница  $\Gamma$  состоит из  $n$  гладких кусков и точки излома границы  $(x_j, y_j)$  ( $j = \overline{1, n}$ ). В выражениях (17) следует учесть скачки соответствующих величин в данных точках, после чего (17) примет вид

$$b_j = \sum_{i=1}^N \left( \int_{\Gamma} \left( f_1(s) - \frac{\partial \omega_q}{\partial n} \right) Mu_j - (f_0(s) - \omega_q) Vu_j \right) ds + \left( f_1(x, y) - \frac{\partial \omega_q(x, y)}{\partial n} \right) \langle Mu_j \rangle - \left( (f_0(x, y) - \omega_q(x, y)) \langle Vu_j \rangle \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \right), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (18)$$

где  $\langle u \rangle = u(x_j(-0), y_j(-0)) - u(x_j(+0), y_j(+0))$ ,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle = \frac{\partial u}{\partial n}(x_j(-0), y_j(-0)) - \frac{\partial u}{\partial n}(x_j(+0), y_j(+0)),$$

$$\langle Mu \rangle = Mu(x_j(-0), y_j(-0)) - Mu(x_j(+0), y_j(+0)),$$

$$\langle Vu \rangle = Vu(x_j(-0), y_j(-0)) - Vu(x_j(+0), y_j(+0)), \quad (i = \overline{1, N}; j = \overline{1, n}).$$

Реализация метода минимизации погрешности по энергии в задаче (1)...(5), с учетом представления прогибов пластины в виде (6) и формул (16), (18), приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_i$ , ( $i = \overline{0, N}$ ):

$$\sum_{i=0}^N a_i E(u_i, u_j) = b_j, \quad (j = \overline{0, N}), \quad (19)$$

$$b_j = E(\omega, u_j).$$

где  $E(u, v) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} M_n v - u V_n v \right) ds - W_0 \langle V_n v \rangle \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$ ,

$$\Gamma = \{(x = a, 0 \leq y \leq b) \cup (y = b, 0 \leq x \leq a)\},$$

$$b_j = W_0 \int_0^c V_y u_j(x, \pm 0) dx,$$

$$M_n = -D \left( \frac{\partial}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial}{\partial s^2} \right),$$

$$V_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right).$$

В дальнейшем для упрощения принимается  $c=1$ .

Для проверки правильности результатов задача (1)...(5) была решена также методом граничной коллокации. При этом использовалось представление прогиба в виде (6). Для нахождения неизвестных коэффициентов  $a_i$  на границе области  $\Omega$   $\Gamma = \{(y = \pm 0, 0 \leq x \leq 1) \cup (x = a, 0 \leq y \leq b) \cup (y = b, 0 \leq x \leq a)\}$ , выбирались  $M$  точек коллокации.  $M=N+1$ . Точки выбирались со сгущением к концам промежутков, а именно:

$$y = 0, x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{4n_1}\right), k = \overline{1, n_1}, \quad (20)$$

$$x = a, y_k = b \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{4n_2}\right), k = \overline{1, n_2},$$

$$y = b, x_k = a \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{4n_3}\right), k = \overline{1, n_3}, n_1 + n_2 + n_3 = M.$$

Реализация граничных условий (2)...(5) в точках коллокации (20) приводит к системе  $N+1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N+1$  неизвестных  $a_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ).

Расчеты были проведены для квадратных пластин ( $a=b$ ) при относительной длине включения  $\varepsilon = c/a$ , равной 0,66; 0,5; 0,2; 0,1. Распределения прогибов, изгибающих моментов, обобщенных перерывающих сил и равнодействующих контактных усилий, полученные с помощью обоих изложенных методов, практически совпали.

Приведено распределение прогибов для пластины с размерами  $a=b=2$ ,  $\varepsilon=0,5$  (рис. 1). Прогибы максимальны на включении, где они равны  $W_0=1$ , и уменьшаются до нуля на контуре пластины, что свидетельствует о хорошем удовлетворении условиям (2)...(5) обоих методов.

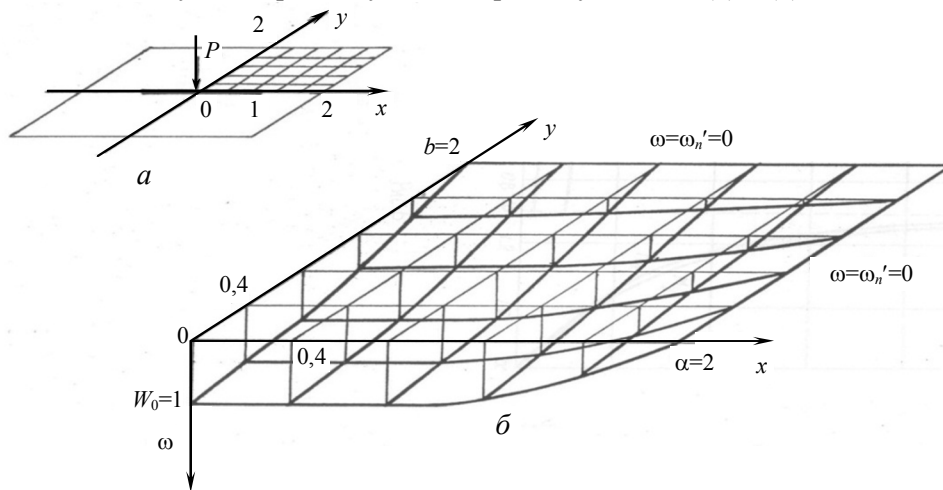


Рис. 1. Распределение прогибов  $\omega$  пластины с размерами  $a=b=2$

Оптимальное, с точки зрения удовлетворения граничным условиям (2)...(5), расположение точек коллокации приведено в табл. 1, где  $n_1$  — количество точек коллокации при  $y=+0, 0 \leq x \leq 1$ ;  $n_2$  — при  $x=a, 0 \leq y \leq a$ ;  $n_3$  — при  $y=a, 0 \leq x \leq a$ .

Вычислена равнодействующая контактных усилий  $P$

$$D^{-1}P = a_0 \int_0^1 \left( \frac{16}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{16}{(1-x^2)^{3/2}} \right) dx + \sum_{k=0}^N 8a_k P_k; \quad (21)$$

$$P_k = \int_0^1 (1-x^2)^{-3/2} \left[ 2k(2k+1)x^{2k+2} - (8k^2+1)x^{2k} + 2k(2k-1)x^{2k-2} \right] dx.$$

Для определения  $P_k$  можно воспользоваться следующими регуляризованными значениями расходящихся интегралов

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = 0, \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} = -\pi, \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{(1-x^2)^{3/2}} = -\pi \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} (k \geq 2), \quad (22)$$

получаемым из формулы [3]

$$\int_0^1 x^{2k} (1-x^2)^\lambda dx = \frac{1}{2} B(k + 1/2, \lambda + 1), \lambda = -3/2. \quad (23)$$

В итоге

$$P_k = 0, D^{-1}P = 8\pi a_0$$

Механическая интерпретация первого из равенств (22) известна [3, 4].

Значение безразмерного коэффициента  $\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW_0$  при разных значениях  $\varepsilon$  приведено в табл. 2. Как видно, при уменьшении относительной длины включения  $\varepsilon$  значения приближаются к соответствующему значению для сосредоточенной силы  $\alpha=5,60$  [6].

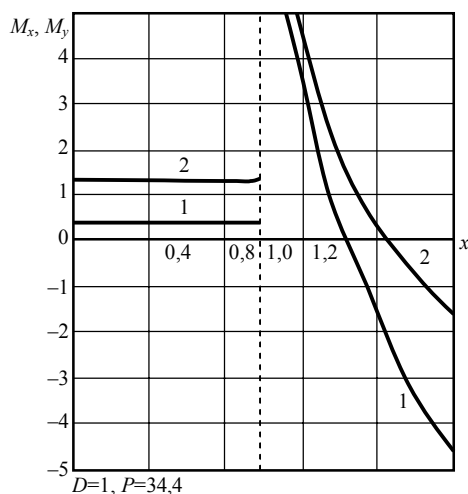


Рис. 2. Графики изгибающих моментов  $M_x$  (1),  $M_y$  (2) вдоль линии  $y = +0, 0 \leq x \leq a$

Таблица 1

Количество точек коллокации

$\varepsilon$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
0,66	4	3	3
0,5	4	3	3
0,2	4	3	3
0,1	3	3	3

Таблица 2

Значения безразмерного коэффициента  $\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW$

$\varepsilon$	$\alpha$
0,66	0,76
0,5	1,81
0,2	4,05
0,1	4,90

Получены графики изгибающих моментов  $M_x, M_y$  вдоль линии  $y = +0, 0 \leq x \leq a$  (рис 2).

При  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$   $M_x, M_y \rightarrow \infty$  как  $r^{-1/2}$ ,  $r = ((x-1)^2 + y^2)^{1/2}$ . Для описания этого факта [6] введено понятие коэффициента интенсивности напряжений

$$K_x = \lim \frac{M_x r^{1/2}}{P c^{1/2}}, K_y = \lim \frac{M_y r^{1/2}}{P c^{1/2}} \quad (24)$$

Эпюры величин  $K_x, K_y$  при  $r=10^{-4}$  приведены на рис. 3. Качественная картина аналогична результатам [6] для бесконечных пластин.

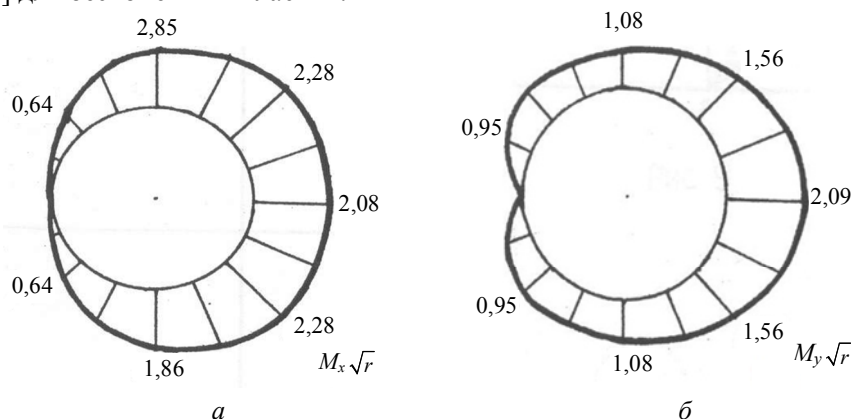


Рис. 3. Эпюры  $K_x$  (а), и  $K_y$  (б)

Полученные данные показывают, что метод минимизации погрешности по энергии является достаточно эффективным методом решения бигармонических задач для пластин с включениями, защемленных по контуру.

### Литература

1. Грибова, В.В. Об одном методе решения бигармонических задач для областей с разрезами, основанном на использовании специальной системы бигармонических функций / В.В. Грибова // Респ. науч. конф. “Дифференц. и интегр. уравнения и их приложения”: Тез. докл. — Одесса: ОГУ, 1987. — Ч. 2. — С. 74 — 75.
2. Бирман, М.Ш. Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Трэффца / М.Ш. Бирман // Вестн. Ленингр. ГУ № 3. Серия “Математика, механика и астрономия” / — Л., Вып. 3. 1956. — С. 69 — 89.
3. Попов, Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
4. Онищук, О.В. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями / О.В. Онищук, Г.Я. Попов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 4. — С. 141 — 150.
5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Т. 1: Механика. — М.: Наука, 1973. — 208 с.
6. Бережницкий, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. — К.: Наук. думка, 1979. — 400 с.

### References

1. Gribova, V.V. Ob odnom metode resheniya bigarmonicheskikh zadach dlya oblastey s razrezami, osnovannom na ispol'zovanii spetsial'noy sistemy bigarmonicheskikh funktsiy [On a Method for Solving Biharmonic Problems for Domains with Slits, Which is Based on the Use of a Special System of Biharmonic Functions] / V.V. Gribova // Resp. науч. конф. “Differents. i integr. uravneniya i ikh prilozheniya”: Tez. dokl. [Repub. sci. conference “Differ. and Integral Equations and Their Applications”: Proc. Reports] — Odessa, 1987. — Part 2. — pp. 74 — 75.
2. Birman, M.Sh. Variatsionnye metody resheniya kraevykh zadach, analogichnye metodu Trefftza [Variational Methods for Solving Boundary Value Problems Similar to the Thefftz' method] // Vestn. Leningr. GU, №3, seriya matem., mekh. i astr. [Herald of Leningrad State Univ. Number 3. Series “Mathematics, Mechanics and Astronomy”], Issue. 3, 1956. — pp. 69 — 89.
3. Popov, G.Ya. Koncentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniye [Concentration of Elastic Stresses Nearby Punches, Cuts, Thin Inclusions and Reinforcements] / G.Ya. Popov. — Moscow, 1982. — 342 p.
4. Onishchuk, O.V. O nekotorykh zadachah izgiba plastin s treshchinami i tonkimi vklyucheniymi [On Some Problems of Bending of Plates with Cracks and Thin Inclusions] / O.V. Onishchuk, G.Ya. Popov // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Proc. of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. — 1980. — # 4. — pp.141 — 150.
5. Landau, L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics]. Vol. 1. Mechanics. — Moscow, 1973. — 208 p.
6. Berezhnitskiy, L.T. Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin [Bending of Thin Plates with Defects Such as Cracks]. / L.T. Berezhnitskiy, M.V. Delyavskiy, V.V. Panasyuk — Kiev, 1979. — 400 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 23 марта 2012 г.