

УДК 539.3

В.Ф. Оробей, д-р техн. наук, проф.,
В.Н. Пурич, канд. техн. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

ТОЧНОСТЬ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-ВЛАСОВА

В.Ф. Оробей, В.М. Пурич. Точність варіаційного методу Канторовича-Власова. Розглянуто проблему підвищення точності варіаційного методу Канторовича-Власова. Пропонується суттєво спростити методику використання декількох членів ряду даного методу при різноманітних граничних умовах. Представлено розв'язок задач згину ізотропних тонких прямокутних пластин з шарнірним опиранням та жорстким защемленням, де відмічається значне збільшення точності у порівнянні з випадком використання одного члена ряду. Результати розрахунків отримано чисельно-аналітичним варіантом методу граничних елементів в середовищі MATLAB.

Ключові слова: метод Канторовича-Власова, згин пластин, метод граничних елементів, MATLAB.

В.Ф. Оробей, В.Н. Пурич. Точность вариационного метода Канторовича-Власова. Рассмотрена проблема повышения точности вариационного метода Канторовича-Власова. Предлагается существенно упростить методику применения нескольких членов ряда данного метода при различных граничных условиях. Представлены решения задач изгиба изотропных тонких прямоугольных пластин с шарнирным опиранием и жестким защемлением, где отмечается значительное увеличение точности по сравнению со случаем использования одного члена ряда. Результаты расчетов получены численно-аналитическим вариантом метода граничных элементов в среде MATLAB.

Ключевые слова: метод Канторовича-Власова, изгиб пластин, метод граничных элементов, MATLAB.

V.F. Orobey, V.N. Purich. Accuracy of the variational method of Kantorovich-Vlasov. The problem of increasing the accuracy of the variational method of Kantorovich-Vlasov is considered. It is proposed to greatly simplify the method of applying a number of terms of the series of the method under various boundary conditions. The solutions of isotropic bending problems of thin rectangular plates with hinged fixing and rigid support are presented, wherein there is a significant increase in accuracy compared with the case of using one term of the series. The calculation results are obtained by a numerically-analytical variant of the method of boundary elements in the environment of MATLAB.

Keywords: method of Kantorovich-Vlasov, plate bending, method of boundary elements, MATLAB.

Вариационный метод Канторовича-Власова был разработан в середине XX ст. выдающимися советскими учеными академиком АН СССР Л.В. Канторовичем и членом-корреспондентом АН СССР В.З. Власовым. Этот метод, являясь развитием метода разделения переменных Фурье, позволяет получить приближенное аналитическое решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. По этой причине область его применения весьма обширна и он является мощным и эффективным средством решения сложных задач современной науки. В частности, в механике деформируемого твердого тела, строительной механике, динамике и прочности машин и др. с помощью этого метода получены решения многих задач статики, динамики и устойчивости пластинчатых и оболочечных конструкций. Данный метод подвергается критике за то, что в нем весьма сложно учесть два и более членов искомого решения. Исключение составляет только шарнирное опирание объекта. В этой связи предлагается для повышения точности метода использовать несколько членов ряда при различных (не шарнирных) условиях опирания. Данное предложение можно представить на примерах решения задач изгиба изотропных тонких прямоугольных пластин, где впервые был применен метод Канторовича-Власова.

Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластин приводится к виду (уравнение Жермен-Лагранжа) [1]

© В.Ф. Оробей, В.Н. Пурич, 2013

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} = \bar{q}(x, y) / D, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ — прогиб срединной плоскости пластины;

$\bar{q}(x, y)$ — поперечная нагрузка на пластину;

$D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ — цилиндрическая жесткость;

E — модуль упругости 1-го рода;

h — толщина пластины;

μ — коэффициент Пуассона.

Кинематические и статические параметры уравнения (1) представляются функциональными рядами. Например, прогиб и изгибающий момент принимают вид

$$w(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x, y), \quad (2)$$

$$M_y(x, y) = -D \left[W_1''(y)X_1(x) + \mu W_1(y)X_1''(x) \right] - \\ -D \left[W_2''(y)X_2(x) + \mu W_2(y)X_2''(x) \right] - \dots = \sum_{i=1}^{\infty} M_{yi}(x, y), \quad (3)$$

где $X_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$ — заданная система функций от переменной x ;

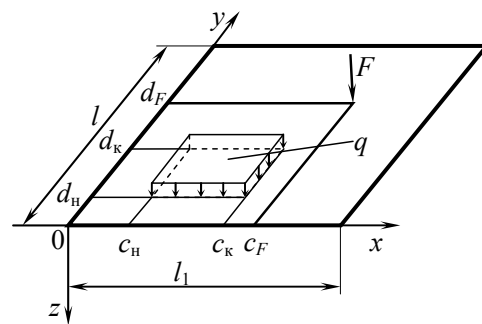
$W_i(y)$, $i = \overline{1, \infty}$ — искомая система функций от переменной y .

Данным представлением различаются два направления пластинки — поперечное, совпадающее с направлением оси Ox , и продольное, совпадающее с направлением оси Oy , (см. рисунок). В качестве заданной системы функций $X_i(x)$ удобно взять формы собственных колебаний балки с опорами, аналогичными условиям опирания продольных кромок пластины [1, 2]. Суть математического преобразования уравнения изгиба пластинки в методе Канторовича-Власова заключается в подстановке ряда (2) в уравнение (1), умножении обеих частей на выбранную систему функций $X_i(x)$ и интегрировании в пределах ширины пластины от 0 до l_1 . Получается система линейных дифференциальных уравнений для искомых функций $W_i(y)$ [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} W_k^{IV}(y) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} W_k''(y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} W_k(y) = q_i(y) / D, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_{ik} = \int_0^{l_1} X_k X_i dx; \quad b_{ik} = \int_0^{l_1} X_k' X_i' dx - \frac{\mu}{2} \left[X_k X_i' + X_k' X_i \right] \Big|_0^{l_1}; \\ c_{ik} = \int_0^{l_1} X_k'' X_i'' dx; \quad q_i(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y) X_i(x) dx. \quad (5)$$



Расчетная схема
прямоугольной пластинки

При шарнирном опирании продольных кромок пластины

$$X_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l_1}, \quad (6)$$

и совместная система линейных дифференциальных уравнений (4) распадается на отдельные уравнения (вследствие свойств функции (6))

$$\begin{aligned} W_1^{IV}(y) - 2r_1^2 W_1''(y) + s_1^4 W_1(y) &= q_1(y) / D; \\ W_2^{IV}(y) - 2r_2^2 W_2''(y) + s_2^4 W_2(y) &= q_2(y) / D; \\ W_3^{IV}(y) - 2r_3^2 W_3''(y) + s_3^4 W_3(y) &= q_3(y) / D; \\ &-----, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} r_i^2 &= -B_i / A_i; \quad s_i^4 = C_i / A_i; \quad q_i(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y) X_i(x) dx / A_i; \\ A_i &= \int_0^{l_1} X_i^2(x) dx; \quad B_i = \int_0^{l_1} X_i''(x) X_i(x) dx; \quad C_i = \int_0^{l_1} X_i^{IV}(x) X_i(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Система функций $W_1(y), W_2(y), W_3(y), \dots$ находится как решение соответствующих уравнений (7) с учетом условий опирания на поперечных кромках пластины.

Суть предложений данной работы заключается в определении системы функций $W_i(y)$ из отдельных уравнений (7) при условии опирания на продольных кромках, отличных от шарнирных.

В этом случае не учитываются побочные коэффициенты совместной системы уравнений (4) и функции $W_i(y)$ будут определены с некоторой погрешностью.

Таким образом, в методе Канторовича-Власова прямоугольная пластина моделируется двумя балками. В направлении оси Ox балка позволяет выбрать функции $X_i(x)$, в направлении оси Oy — найти функции $W_i(y)$ путем решения задачи Коши изгиба балки. Решение задачи Коши для уравнений (7) можно представить в матричной форме (здесь и далее индексы членов ряда опущены) [2, 3]

$$\begin{array}{|c|} \hline DW(y) \\ \hline D\theta(y) \\ \hline M(y) \\ \hline Q(y) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ \hline -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array} + \int_0^y \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(y-\xi) \\ \hline A_{13}(y-\xi) \\ \hline -A_{12}(y-\xi) \\ \hline A_{14}(y-\xi) \\ \hline \end{array} q(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где $W(y), \theta(y), M(y), Q(y)$ — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила условной балки, заменяющей пластину в направлении оси Oy .

Оценим погрешность предлагаемого подхода на конкретных примерах.

Квадратная пластина с шарнирным опиранием по периметру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой $\bar{q}(x, y) = q = \text{const}$ и сосредоточенной силой F в центре. В этом случае $r_i = s_i = i\pi$. Фундаментальные ортонормированные функции и слагаемые от нагрузки имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(y) = y \operatorname{chry}; \quad \Phi_2(y) = \operatorname{chry}; \quad \Phi_3(y) = \operatorname{shry}; \quad \Phi_4(y) = y \operatorname{shry}; \quad \omega_i = i\pi; \\
&X_i(x) = \sin(i\pi x / l_1); \quad A_{11} = \Phi_2(y) - (1-\mu)r \Phi_4(y) / 2; \\
&A_{12} = (1-\mu)\Phi_1(y) / 2 + (1+\mu)\Phi_3(y) / (2r); \quad A_{13} = \Phi_4(y) / (2rA); \\
&A_{14} = (r\Phi_1(y) - \Phi_3(y)) / (2r^3A); \quad A_{21} = r(1+\mu)\Phi_3(y) / 2 - (1-\mu)r^2\Phi_1(y) / 2; \\
&A_{22} = \Phi_2(y) + (1-\mu)r \Phi_4(y) / 2; \quad A_{23} = \Phi_1(y) / (2A) + \Phi_3(y) / (2rA); \\
&A_{31} = -(1-\mu)^2 r^3 A \Phi_4(y) / 2; \quad A_{32} = A \left[(1-\mu)^2 r^2 \Phi_1(y) + (1-\mu)(3+\mu)r \Phi_3(y) \right] / 2; \\
&A_{41} = A \left[(1-\mu)^2 r^4 \Phi_1(y) - (1-\mu)(3+\mu)r^3 \Phi_3(y) \right] / 2; \\
&B_{11} = q \frac{[r\Phi_4(y-d_n)_+ + 2H(y-d_n) - 2\Phi_2(y-d_n)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2r^4 A} - \\
&\quad - q \frac{[r\Phi_4(y-d_k)_+ + 2H(y-d_k) - 2\Phi_2(y-d_k)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2r^4 A} + \\
&\quad + F \gamma_F(\omega) \frac{r\Phi_1(y-d_F)_+ - \Phi_3(y-d_F)_+}{2r^3 A}; \\
&B_{21} = \frac{q[r\Phi_1(y-d_n)_+ - \Phi_3(y-d_n)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2r^3 A} - \\
&\quad - q \frac{[r\Phi_1(y-d_k)_+ - \Phi_3(y-d_k)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2r^3 A} + F \gamma_F(\omega) \frac{\Phi_4(y-d_F)_+}{2rA}; \\
&B_{31} = q \frac{[(1-\mu)r\Phi_4(y-d_n)_+ + 2\mu\Phi_2(y-d_n)_+ - 2\mu H(y-d_n)] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2r^2} - \\
&\quad - q \frac{[(1-\mu)r\Phi_4(y-d_k)_+ + 2\mu\Phi_2(y-d_k)_+ - 2\mu H(y-d_k)] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2r^2} + \\
&\quad + F \gamma_F(\omega) \frac{(1-\mu)r\Phi_1(y-d_F)_+ + (1+\mu)\Phi_3(y-d_F)_+}{2r}; \\
&B_{41} = q \frac{[(3-\mu)\Phi_3(y-d_n)_+ - (1-\mu)r\Phi_1(y-d_n)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2r} - \\
&\quad - q \frac{[(3-\mu)\Phi_3(y-d_k)_+ - (1-\mu)r\Phi_1(y-d_k)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2r} + \\
&\quad + F \gamma_F \left[\Phi_2(y-d_F)_+ - (1-\mu)r\Phi_4(y-d_F)_+ / 2 \right]; \\
&\gamma_{q_i}(\omega) = \int_0^{l_1} X_i(x) dx; \quad \gamma_{F_i}(\omega) = \sin(i\pi c_F / l_1);
\end{aligned} \tag{10}$$

$H(y-d_n)$ — единичная функция Хевисайда со сдвигом в точку d_n ;

$\Phi_4(y-d_n)_+$ — сплайн-функция вида

$$\Phi_4(y-d_n)_+ = \begin{cases} 0, & (y-d_n) < 0; \\ \Phi_4(y-d_n), & (y-d_n) \geq 0. \end{cases}$$

Искомая функция $W(y)$ из уравнения (9) определяется как

$$DW(y) = DW(0) \cdot A_{11}(y) + D\theta(0) \cdot A_{12}(y) - M(0) \cdot A_{13}(y) - Q(0) \cdot A_{14}(y) + B_{11}(y), \tag{11}$$

где начальные параметры можно определить при решении краевой задачи для балки по численно-аналитическому методу граничных элементов [2, 3] ($c_n = 0$; $c_k = l_1$; $d_n = 0$; $d_k = l$; $\mu = 0,3$; $q = 1$; $F = 1$; $d_F = l/2$; $c_F = l_1/2$; $l_1 = l = a = 1$)

$$\begin{array}{cccc|cc|cc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & & \\
 1 & & A_{12} & & -A_{14} & D\theta(l) & & -B_{11}(l) & & \\
 2 & -1 & A_{22} & & -A_{13} & D\theta(0) & & -B_{21}(l) & & \\
 3 & & -A_{32} & & A_{12} & Q(l) & & B_{31}(l) & & \\
 4 & & -A_{31} & -1 & A_{11} & Q(0) & & B_{41}(l) & & \\
 \hline
 & & & & & & = & & &
 \end{array} \quad (12)$$

В табл. 1 представленны результаты вычислений членов ряда (2), (3), где отсутствуют четные члены, так как они практически равны нулю.

Таблица 1

Значения прогибов и моментов в шарнирно опертой пластине

Номер члена ряда	Условия опирания	Нагрузка	Прогиб в центре пластины $w(l_1/2, l/2)$	Изгибающий момент в центре пластины $M_y(l_1/2, l/2)$
1	Шарнирное опирание по периметру	$\bar{q}(x, y) = q$	$41,093 \cdot 10^{-4} qa^4 / D$	$4,920 \cdot 10^{-2} qa^2$
3			$-0,505 \cdot 10^{-4}$	$-0,155 \cdot 10^{-2}$
5			$0,047 \cdot 10^{-4}$	$0,0312 \cdot 10^{-2}$
7			$-0,00778 \cdot 10^{-4}$	$-0,0113 \cdot 10^{-2}$
9			$0,00221 \cdot 10^{-4}$	$0,00531 \cdot 10^{-2}$
Σ			$40,624 \cdot 10^{-4}$	$4,790 \cdot 10^{-2}$
1	Шарнирное опирание по периметру	$\bar{q}(x, y) = F \times \delta(x - l_1/2) \times \delta(y - l/2)$	$107,665 \cdot 10^{-4} Fa^2 / D$	$21,756 \cdot 10^{-2} F$
3			$5,962 \cdot 10^{-4}$	$6,901 \cdot 10^{-2}$
5			$1,290 \cdot 10^{-4}$	$4,138 \cdot 10^{-2}$
7			$0,470 \cdot 10^{-4}$	$2,956 \cdot 10^{-2}$
9			$0,221 \cdot 10^{-4}$	$2,299 \cdot 10^{-2}$
Σ			$115,609 \cdot 10^{-4}$	$38,049 \cdot 10^{-2}$

Погрешности при действии равномерно распределенной нагрузки — по прогибам [4, 5]

$$\Delta_1 = \frac{40,624 - 40,6}{40,6} \cdot 100\% = 0,06\% ; \quad (13)$$

— по изгибающим моментам

$$\Delta_2 = \frac{4,79 - 4,79}{4,79} \cdot 100\% = 0,0\% . \quad (14)$$

При действии сосредоточенной силы в центре пластины — по прогибам

$$\Delta_3 = \frac{115,609 - 116,0}{116,0} \cdot 100\% = 0,34\% . \quad (15)$$

В справочных данных [4] значения изгибающих моментов в центре пластины (точке приложения сосредоточенной силы F) отсутствуют. Видно, что результаты метода практически точные.

Квадратная пластина с жестким защемлением по периметру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой в центре. В этих условиях $|s| > |r|$, частоту

собственных колебаний жестко заземленной балки необходимо искать из уравнения $\cos(\omega) \cdot ch(\omega) = 1$. Элементы уравнения (9) принимают вид [3]

$$\begin{aligned}
 &\Phi_1(y) = ch(\alpha y) \sin(\beta y); \quad \Phi_2(y) = ch(\alpha y) \cos(\beta y); \quad \Phi_3(y) = sh(\alpha y) \cos(\beta y); \\
 &\Phi_4(y) = ch(\alpha y) \sin(\beta y); \quad \alpha = \sqrt{(s^2 + r^2) / 2}; \quad \beta = \sqrt{(s^2 - r^2) / 2}; \\
 &A_{11} = \Phi_2(y) - (1 - \mu)r^2 \Phi_4(y) / (2\alpha\beta); \quad A_{12} = (s^2 - \mu r^2) \Phi_1(y) / (2\beta s^2) + \\
 &+ (s^2 + \mu r^2) \Phi_3(y) / (2\alpha s^2); \quad A_{13} = \Phi_4(y) / (2\alpha\beta A); \quad A_{14} = (\alpha \Phi_1(y) - \beta \Phi_3(y)) / (2\alpha\beta s^2 A); \\
 &A_{21} = (s^2 + \mu r^2) \Phi_3(y) / (2\alpha) - (s^2 - \mu r^2) \Phi_1(y) / (2\beta); \\
 &A_{22} = \Phi_2(y) + (1 - \mu)r^2 \Phi_4(y) / (2\alpha\beta); \quad A_{23} = (\alpha \Phi_1(y) + \beta \Phi_3(y)) / (2\alpha\beta A); \\
 &A_{31} = A \left[\mu r^4 (2 - \mu) - s^4 \right] \Phi_4(y) / (2\alpha\beta); \\
 &A_{32} = A \left[-s^4 + 2(1 - \mu)s^2 r^2 + \mu^2 r^4 \right] \Phi_1(y) / (2\beta s^2) + A \left[s^4 + 2(1 - \mu)s^2 r^2 - \mu^2 r^4 \right] \Phi_3(y) / (2\alpha s^2); \\
 &A_{41} = A \left[-s^4 + 2(1 - \mu)s^2 r^2 + \mu^2 r^4 \right] \Phi_1(y) / (2\beta) - A \left[s^4 + 2(1 - \mu)s^2 r^2 - \mu^2 r^4 \right] \Phi_3(y) / (2\alpha); \\
 &B_{11} = q \frac{\left\{ r^2 \Phi_4(y - d_n)_+ + 2\alpha\beta [H(y - d_n) - \Phi_2(y - d_n)_+] \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2\alpha\beta s^4 A} - \\
 &- q \frac{\left\{ r^2 \Phi_4(y - d_k)_+ + 2\alpha\beta [H(y - d_k) - \Phi_2(y - d_k)_+] \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2\alpha\beta s^4 A} + \\
 &+ F \gamma_F(\omega) \frac{\alpha \Phi_1(y - d_F)_+ - \beta \Phi_3(y - d_F)_+}{2\alpha\beta s^2 A}; \\
 &B_{21} = q \frac{[\alpha \Phi_1(y - d_n)_+ - \beta \Phi_3(y - d_n)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2\alpha\beta s^2 A} - q \frac{[\alpha \Phi_1(y - d_k)_+ - \beta \Phi_3(y - d_k)_+] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2\alpha\beta s^2 A} + \\
 &+ F \gamma_F(\omega) \frac{\Phi_4(y - d_F)_+}{2\alpha\beta A}; \\
 &B_{31} = q \frac{\left\{ 2\mu\alpha\beta r^2 [\Phi_2(y - d_n)_+ - H(y - d_n)] + (s^4 - \mu r^4) \Phi_4(y - d_n)_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2\alpha\beta s^4} - \\
 &- q \frac{\left\{ 2\mu\alpha\beta r^2 [\Phi_2(y - d_k)_+ - H(y - d_k)] + (s^4 - \mu r^4) \Phi_4(y - d_k)_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2\alpha\beta s^4} + \\
 &+ F \gamma_F(\omega) \frac{(s^2 - \mu r^2) \alpha \Phi_1(y - d_F)_+ + (s^2 + \mu r^2) \beta \Phi_3(y - d_F)_+}{2\alpha\beta s^2}; \\
 &B_{41} = q \frac{\left\{ \alpha [2\beta^2 - (1 - \mu)r^2] \Phi_1(y - d_n)_+ + \beta [2\alpha^2 + (1 - \mu)r^2] \Phi_3(y - d_n)_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_n}^{l_1}}{2\alpha\beta s^2} - \\
 &- q \frac{\left\{ \alpha [2\beta^2 - (1 - \mu)r^2] \Phi_1(y - d_k)_+ + \beta [2\alpha^2 + (1 - \mu)r^2] \Phi_3(y - d_k)_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_k}^{l_1}}{2\alpha\beta s^2} + \\
 &+ F \gamma_F(\omega) \left[\Phi_2(y - d_F)_+ - (1 - \mu)r^2 \Phi_4(y - d_F)_+ / (2\alpha\beta) \right]; \\
 &X(x) = \sin(\omega x / l_1) - sh(\omega x / l_1) - a_z [\cos(\omega x / l_1) - ch(\omega x / l_1)]; \\
 &a_z = (\sin \omega - sh \omega) / (\cos \omega - ch \omega); \quad \gamma_q(\omega) = \int_0^{l_1} X(x) dx; \\
 &\gamma_F(\omega) = \sin(\omega c_F / l_1) - sh(\omega c_F / l_1) - a_z [\cos(\omega c_F / l_1) - ch(\omega c_F / l_1)].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Краевая задача жестко защемленной балки примет вид

$$(d_n = 0; d_k = l; c_n = 0; c_k = l_1; d_F = l/2; c_F = l_1/2; \mu = 0,3; q = 1; F = 1; l_1 = l = a = 1)$$

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & -A_{13} & -A_{14} \\ & & -A_{23} & -A_{13} \\ -1 & & A_{22} & A_{12} \\ & -1 & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} M(l) \\ Q(l) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{11}(l) \\ -B_{21}(l) \\ B_{31}(l) \\ B_{41}(l) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (17)$$

В табл. 2 представлены результаты вычислений членов ряда (2), (3) для жестко защемленной пластины. Как и в шарнирно опертой пластине, здесь также четные члены ряда равны нулю.

Таблица 2

Значения прогибов и моментов в жестко защемленной пластине

Номер члена ряда	Условия опирания	Нагрузка	Прогиб в центре пластины $w(l_1/2, l/2)$	Изгибающие моменты	
				В опорном сечении $M_y(l_1/2, 0)$	В центре пластины $M_y(l_1/2, l/2)$
1	Жесткая заделка по периметру	$\bar{q}(x, y) = q$	$129,917 \cdot 10^{-5} qa^4 / D$	$-538,852 \cdot 10^{-4} qa^2$	$245,606 \cdot 10^{-4} qa^2$
3			$-3,386 \cdot 10^{-5}$	$42,306 \cdot 10^{-4}$	$-13,872 \cdot 10^{-4}$
5			$0,367 \cdot 10^{-5}$	$-10,968 \cdot 10^{-4}$	$3,304 \cdot 10^{-4}$
7			$-0,078 \cdot 10^{-5}$	$4,325 \cdot 10^{-4}$	$-1,298 \cdot 10^{-4}$
9			$0,024 \cdot 10^{-5}$	$-2,128 \cdot 10^{-4}$	$0,638 \cdot 10^{-4}$
Σ			$126,844 \cdot 10^{-5}$	$-505,318 \cdot 10^{-4}$	$234,379 \cdot 10^{-4}$
1	Жесткая заделка по периметру	$\bar{q}(x, y) = F \times \delta(x - l_1/2) \times \delta(y - l/2)$	$51,520 \cdot 10^{-4} qa^2 / D$	$-11,897 \cdot 10^{-2} F$	$19,212 \cdot 10^{-2} F$
3			$3,895 \cdot 10^{-4}$	$-0,314 \cdot 10^{-2}$	$6,148 \cdot 10^{-2}$
5			$0,999 \cdot 10^{-4}$	$-0,0096 \cdot 10^{-2}$	$3,877 \cdot 10^{-2}$
7			$0,391 \cdot 10^{-4}$	$-0,000266 \cdot 10^{-2}$	$2,819 \cdot 10^{-2}$
9			$0,191 \cdot 10^{-4}$	$-6,208 \cdot 10^{-8}$	$2,215 \cdot 10^{-2}$
Σ			$56,966 \cdot 10^{-4}$	$-12,221 \cdot 10^{-2}$	$34,272 \cdot 10^{-2}$

Погрешности результатов при действии равномерно распределенной нагрузки — по прогибам

$$\Delta_4 = \frac{126,844 - 126,0}{126,0} \cdot 100\% = 0,67\% ; \quad (18)$$

— по изгибающим моментам

$$\Delta_5 = \frac{505,318 - 513,0}{513,0} \cdot 100\% = 1,50\% , \quad \Delta_6 = \frac{234,379 - 231,0}{231,0} \cdot 100\% = 1,46\% . \quad (19)$$

При действии сосредоточенной силы в центре пластины

— по прогибам

$$\Delta_7 = \frac{56,996 - 56,0}{56,0} \cdot 100\% = 1,78\% ; \quad (20)$$

— по изгибающему моменту

$$\Delta_8 = \frac{12,221 - 12,57}{12,57} \cdot 100\% = 2,78\% . \quad (21)$$

Как ранее указывалось, значения моментов в центре пластины в справочных данных [4, 5] отсутствуют.

Из представленного следует, что точность вариационного метода Канторовича-Власова при использовании нескольких членов ряда (2) существенно возрастает и результаты расчетов практически совпадают с точными значениями. Учитывая, что аналитическое решение задачи Коши дифференциального уравнения в частных производных (например, для прямоугольной пластины это матричное уравнение (9)) в рамках алгоритма численно-аналитического варианта метода граничных элементов имеет значительно более широкое применение, чем просто пластины, то следует заключить, что различные тонкостенные конструкции (неразрезные пластины, цилиндрические складчатые оболочки, плитобалочные системы, полигональные резервуары и т.д.) и краевые задачи для линейных и в частных производных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [6] могут быть рассчитаны в более точной постановке. Сложностей с определением второго и последующих членов ряда (2) нет, так как все расчетные соотношения зависят только от частоты собственных колебаний соответствующих балок [3, 5].

Литература

1. Власов, В.З. Избранные труды / В.З. Власов. — М.: Наука, 1964. — Т.3. — 472 с.
2. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашченко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — В 2 т. — Одесса: ВМВ, 2010. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
3. Строительная механика. Специальный курс. Применение МГЭ / В.А. Баженов, А.Ф. Дашченко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей. — Одесса: Астропринт, 2001. — 288 с.
4. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
5. Оробей, В.Ф. Расчет цилиндрических складчатых систем методом граничных интегральных уравнений / В.Ф. Оробей // Изв. вузов. Строительство. — 1995. — № 2. с. — 31 — 38.
6. Новые методы расчета систем с дискретно-непрерывным распределением параметров / В.С. Дорофеев, А.В. Ковров, Ю.С. Крутий и др. — Одесса: ЭВЕН, 2012. — 375 с.

References

1. Vlasov, V.Z. Izbrannyye trudy [Selected Papers] / V.Z. Vlasov. — Moscow, 1964. — Vol.3. — 472 p.
2. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov [Numerical-Analytical Method of Boundary Elements] / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiets, V.F. Orobey, N.G. Sur'yaninov. — Odessa, 2010. — Vol. 1. — 416 p. — Vol. 2. — 512 p.
3. Stroitel'naya mekhanika. Spetsial'niy kurs. Primenenie MGE [Structural mechanics. Special course. Application of MGA] / V.A. Bazhenov, A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiets, V.F. Orobey. — Odessa, 2001 — 288 p.
4. Timoshenko, S.P. Plastinki i obolochki [Plates and shells] / S.P. Timoshenko, S. Voynovskiy-Kriger. — Moscow, 1959. — 636 p.
5. Orobey, V.F. Raschet tsilindricheskikh skladchatykh sistem metodom granichnykh integral'nykh uravneniy [Calculation of cylindrical fold systems by the method of boundary integral equations] / V.F. Orobey // Izv. Vuzov. Stroitel'stvo [News of Higher Schools. Construction]. — 1995. — # 2. — pp. 31 — 38.
6. Novyye metody rascheta sistem s diskretno-nepreryvnyim raspredeleniem parametrov [New methods of designing systems with discrete-continuous distribution of parameters] / V.S. Dorofeev, A.V. Kovrov, Yu.S. Krutyuy and others. — Odessa, 2012. — 375 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 6 июля 2013 г.