УДК 614.84

А.С. Кирилюк, к.т.н., доцент, НУГЗУ,
О.В. Кулаков, к.т.н., доцент, зам. нач. каф., НУГЗУ,
А.Н. Катунин, к.т.н., с.н.с., преподаватель, НУГЗУ

МОДЕЛИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КАБЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАРАБОТКИ

(представлено д-ром техн. наук Чубом И.А.)

Предложены математические модели, позволяющие рассчитывать показатели долговечности, в частности, пожаробезопасного остаточного ресурса (ПОР) для кабельных линий (КЛ) со случайной величиной расходуемого ресурса за заданную календарную продолжительность эксплуатации изделия. При проведении расчетов предполагается, что наработка до ресурсного отказа распределена по нормальному закону, а суммарная наработка – по равномерному закону.

Ключевые слова: закон распределения, ресурс, кабельное изделие.

Постановка проблемы. В современных условиях продолжает оставаться актуальной задача совершенствования системы технического обслуживания и ремонта КЛ, в составе которых эксплуатируются кабельные изделия (КИ), с целью обеспечения заданного уровня надежности их работы и снижения затрат на поддержание работоспособного состояния. Одним из путей решения этой задачи является разработка и внедрение технического обслуживания и ремонта КЛ по фактическому состоянию. Для этого необходимо решить задачу оценки показателей ПОР конкретной КЛ по эксплуатационным данным.

Анализ последних достижений и публикаций. В работе [1] получены расчетные соотношения показателей ПОР в общем виде и сделан вывод о том, что расчеты показателей ПОР конкретной КЛ необходимо проводить для календарных продолжительностей эксплуатации изделия и соответствующих им законам распределения суммарной наработки КЛ. В работе [2] получены расчетные соотношения показателей ПОР для КЛ при распределении наработки до ресурсного отказа по закону Вейбулла; при этом суммарная наработка распределена по равномерному закону. В работе [3] получены расчетные соотношения при распределении наработки до ресурсного отказа по закону Вейбулла, при этом суммарная наработка распределена по нормальному закону. Продолжим исследования, проведенные в работах [1-3].

Постановка задачи и ее решение. Получим расчетные соотношения показателей ПОР КЛ в предположении, что наработка до ресурсного отказа распределена по нормальному закону, а суммарная наработка – по равномерному закону.

Пусть наработка до ресурсного отказа распределена по нормальному закону, т.е. $\xi \sim N\ (\mu_1,\ \sigma_1)$, а суммарная наработка $r(\tau)$ – по равномерному закону в интервале [a, b], т.е. $r(\tau) \sim R\ (a(\tau)\ ,b(\tau))$, где параметры закона a и b определяются типом изделия и величиной τ.

Подставим $\overline{F}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$ и $g(x,\tau) = \frac{1}{b - a}$ в формулы (4), (5) из работы [1]. Тогда получим

$$P\{\xi > r(\tau)\} = \frac{1}{b - a}\int_a^b \Phi\left(\frac{\mu_1 - x}{\sigma_1}\right)dx, \tag{1}$$

$$P\{\xi > r(\tau) + t\} = \frac{1}{b - a}\int_a^b \Phi\left(\frac{\mu_1 - x - t}{\sigma_1}\right)dx, \tag{2}$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

Найдем интеграл $\int_a^b \Phi\left(\frac{\mu_1 - x - t}{\sigma_1}\right)dx$ в (2).

Запишем его в виде

$$\int_a^b \Phi\left(\frac{\mu_1 - x - t}{\sigma_1}\right)dx = \int_a^b \left[1 - \Phi\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)\right]dx = \int_a^b \Phi^*\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)dx, \tag{3}$$

где $\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ [4].

Из определения интеграла Φ^* (u) следует, что

$$\int_a^b \Phi^*\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)dx = \int_a^\infty \Phi^*\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)dx - \int_b^\infty \Phi^*\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)dx. \tag{4}$$

Для нахождения интеграла $\int_a^\infty \Phi^*\left(\frac{x - \mu_1 + t}{\sigma_1}\right)dx$ сделаем замену переменных: $\dfrac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}=\tau, \quad dx=\sigma_1 d\tau.$ Тогда

$$\int_a^{\infty} \Phi^*\left(\frac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)dx=\sigma_1 \int_{\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}}^{\infty} \Phi^*(\tau)\,d\tau. \qquad (5)$$

Проинтегрируем выражение (5) по частям, положив $\Phi^*(\tau)=u$,

$d\tau=dv, \quad v=\tau, \quad du=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau.$ Тогда

$$\sigma_1 \int_{\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}}^{\infty} \Phi^*(\tau)d\tau=\sigma_1\left[\tau\Phi^*(\tau)\Big|_{\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}}^{\infty}-\int_{\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}}^{\infty}\tau\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau\right]= \qquad (6)$$
$$\sigma_1\varphi\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)-(a-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right),$$

где $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Интеграл $\Phi^*\left(\dfrac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)dx$ в выражении (4) найдем, рассуждая аналогичным образом, т.е.

$$\int_b^{\infty} \Phi^*\left(\frac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)dx=\sigma_1\varphi\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)-(b-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}\right). \qquad (7)$$

Тогда разность интегралов в (4) равна:

$$\int_a^{b} \Phi^*\left(\frac{x-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)dx=\sigma_1\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)\right)- \qquad (8)$$
$$-(a-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)+(b-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right).$$

Подставим в (8) t = 0, в результате получим

$$\int_a^b \Phi^*\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)dx = \sigma_1\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)- \\ -(a-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)+(b-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right). \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в формулы (1), (2), получим расчетные соотношения для искомых вероятностей:

$$P\{\xi > r(\tau)\} = \frac{\sigma_1}{\mathrm{b-a}}\times \\ \times\left[\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)-(a-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)+(b-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]. \tag{10}$$

$$\mathrm{P}\{\xi > \mathrm{r}(\tau)+\mathrm{t}\} = \frac{\sigma_1}{\mathrm{b-a}}\times \\ \times\left[\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)\right)-(a-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)+ \right. \\ \left. +(b-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)\right]. \tag{11}$$

Подставим (10), (11) в выражение (3) из [1], в результате получим

$$\mathrm{P}\{\xi(\mathrm{R}(a,b)) > \mathrm{t}\} = \\ \left[\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)\right)-(a-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)+ \right. \\ \left. +(b-\mu_1+t)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1+t}{\sigma_1}\right)\right]\times\left[\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)- \right. \\ \left. -(a-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)+(b-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^{-1}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) t = $T_{ор\gamma}(R(a,b))$ получим уравнение для нахождения гамма-процентного ПОР:

$$\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))}{\sigma_1}\right)\right)-$$
$$-\left(a-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))\right)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))}{\sigma_1}\right)+$$
$$+\left(b-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))\right)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1+T_{op\gamma}(R(a,b))}{\sigma_1}\right)= \qquad (13)$$
$$=0{,}01\gamma\left(\left(\varphi\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\varphi\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)-(a-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\right.$$
$$\left.+(b-\mu_1)\Phi^*\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right).$$

Нелинейное уравнение (13) целесообразно решать, применяя известные методы [4], например, графический, хорд и др.

Выводы. Предложенные математические модели позволяют проводить расчеты показателей ПОР для конкретных КЛ со случайной величиной расходуемого ресурса за заданную календарную продолжительность эксплуатации изделия, в том числе и за назначенный срок службы изделия. Для проведения таких расчетов должны быть известны законы распределения наработки до ресурсного отказа и суммарной наработки КЛ к назначенному сроку службы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирилюк А.С. Математические модели для расчета показателей пожаробезопасного остаточного ресурса кабельних линий/ А.С. Кирилюк, О.В. Кулаков // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. НУГЗ Украины. – 2013. – Вып. 33. – С. 69-74.

2. Кирилюк А.С. Расчет показателей пожаробезопасного остаточного ресурса кабельних линий при разных законах распределения наработки / А.С. Кирилюк, О.В. Кулаков, А.Н. Катунин // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. НУГЗ Украины. – 2013. – Вып. 34. – С. 78-82.

3. Кирилюк А.С. Расчет показателей пожаробезопасного остаточного ресурса кабельних линий при определенных законах распределения наработки / А.С. Кирилюк, О.В. Кулаков, А.Н. Катунин // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. НУГЗ Украины. – 2014. – Вып. 35. – С. 88-92. – Режим доступу до журн. : http://nuczu.edu.ua/ sciencearchive/ProblemsOfFireSafety/vol35/ kireev.pdf.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 720с.

А.С. Кирилюк, О.В. Кулаков, А.Н. Катунин

Розрахунок показників довготривалості кабельних ліній при визначених законах розподілення наробітку

Запропоновані математичні моделі, що дозволяють проводити розрахунки показників довготривалості, зокрема, пожежонебезпечного залишкового ресурсу для кабельних ліній з випадковою величиною ресурсу, що витрачається, за задану календарну тривалість експлуатації виробу. При проведенні розрахунків вважається, що наробіток до ресурсної відмови розподілено за нормальним законом, а сумарний наробіток – по рівномірному закону.

Ключові слова: закон розподілу, ресурс, кабельний виріб.

A.C. Kyrylyuk, O.V. Kulakov , A.N. Katunin

Computation of indexes of cable lines long life at definite laws of distributing of work

Mathematical models, that allow to expect indexes of long life, are offered, in particular, fire-safety remaining resource for cable lines with the accidental size of the expended resource for the set calendar duration of exploitation of good. During conducting of computations, it is assumed that work to the resource refusal is distributed on a normal law, and total work – on an even law.

Keywords: law of distributing, resource, cable.