УДК 519.6 doi:10.15421/321618

Ж.В. Худа, Є.А. Тонконог
Дніпродзержинський державний технічний університет

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАДАЧІ КОШІ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розроблено сплайн-колокаційну схему розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку, коефіцієнтами якого є функції, що мають скінченну кількість точок розриву першого роду. Схему засновано на нових методах ідентифікації параметрів моделі з використанням сплайнів, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку в порівнянні з розв'язками, які знайдені існуючими методами.

Разработана сплайн-колокационная схема решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, коэффициентами которого являются функции, имеющие конечное число точек разрыва первого рода. Схема основана на новых методах идентификации параметров модели с использованием сплайнов, что позволяет повысить точность приближенного решения по сравнению с решениями, найденными существующими методами.

A spline collocation scheme for solving the Cauchy problem for a second order differential equation. The coefficients of the equation are functions that have a finite number of points of discontinuity of the first order. The scheme is based on new methods of identification of the model parameters with using of splayns. This allows to improve accuracy of the approximate solution compared to solutions that found by existing methods.

Ключові слова: сплайн, колокаційна схема, задача Коші.

Вступ. Процес отримання точного аналітичного розв'язку граничних задач та задач Коші є досить складний. Тому широкого застосування набули наближені методи розв'язання задач, що описують поведінку динамічних систем. Разом із класичними числовими методами широкого застосування набули сплайн-методи для пошуку наближеного розв'язку. Розвиток цього напряму почався з робіт І. Шенберга, А. Уїтні, К. Де Бура. Побудові сплайн-схем для крайових задач, дослідженню питань їх збіжності і точності, а також отриманню конкретних оцінок ухилення сплайн-розв'язку від точного присвячено немало робіт, зокрема роботи Блує, Ю.С. Зав'ялова, Б.І. Квасова, Маранді, В.Л. Мірошниченко, С.Б. Стечкіна, Ю.Н. Субботіна, А.О. Лігуна та багатьох інших.

Питання побудови схем наближеного розв’язку задач із заданими початковими умовами, які мали б більш високу точність у порівнянні зі стандартними кусочно-поліноміальними схемами залишається актуальним.

Постановка задачі. Дана робота присвячена побудові методів ідентифікації параметрів моделі параметричних коливальних процесів і методів пошуку наближеного розв’язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \tag{2}$$

Для $x \in R_+$ коефіцієнти рівняння (1) $-$ $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ можуть мати розриви першого роду в точках τ_i $(i = \overline{1, k},\ k > 1)$,
$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k < T = \tau_{k+1}$ (k- кількість точок розриву), а на інтервалах (τ_i, τ_{i+1}) $q(x)$, $f(x) \in L_\infty^4(\tau_i, \tau_{i+1})$, $\quad p(x) \in L_\infty^5(\tau_i, \tau_{i+1})$.

Потрібно дискретизувати модель (1)-(2), а потім ідентифікувати параметри дискретної моделі так, щоб отриманий наближений розв’язок задачі (1)-(2) мав більш високу точність у порівнянні з методами розв’язання подібних задач, використовуваними раніше. Метод ідентифікації побудований на основі кубічних сплайнів. Критерієм якості ідентифікації є мінімум абсолютної величини максимального відхилення розв’язку побудованої моделі від точного розв’язку задачі Коші.

Метод розв’язання та аналіз одержаних результатів. Спочатку розглянемо розв’язання задачі до першої точки розриву τ_1. Введемо розбиття проміжку $[0, \tau_1]$ $\Delta_{N_1} = \left\{ x_j = jh_1;\ h = \dfrac{\tau_1}{N_1},\ j = \overline{0, N_1} \right\}$. Нехай $S(x)$ – наближений розв’язок задачі (1)–(2), за побудови дискретної моделі поставимо вимогу, щоб він співпадав з точним розв’язком задачі (1)–(2) в точках рівномірного розбиття Δ_{N1}. Отримаємо дискретну модель

$$\begin{cases} S(0) = y_0, \quad S'(0) = y_0' \\ J_i S_i'' + P_i S_i' + Q_i S_i = F_i, \quad (i = \overline{1, N-1}). \end{cases} \tag{3}$$

Таким чином, неперервну модель (1)–(2) замінюємо дискретною моделлю (3). Але будь-яка дискретизація призводить до втрати точності розв'язку. Якщо в моделі (3) параметри $P_i; Q_i; F_i$ покласти такими, що дорівнюють значенням відповідних функцій $p(x); q(x); f(x)$ у вузлах розбиття Δ, отримаємо класичну колокаційну схему, порядок точності якої, як відомо, складає $O(h^2)$. Тому ідентифікуємо параметри моделі (3), що підвищить ступінь адекватності наближеного розв'язку точному.

Позначимо $y_*(x)$ – точний розв'язок задачі (1)–(2). Для ідентифікації скористаємося відомими асимптотичними розвиненнями першої і другої похідних інтерполяційного кубічного сплайна у вузлах розбиття. У результаті модель (3) набуває вигляду

$$\begin{cases} S\ (0) = y_0, \quad S'(0) = y_0' \\ S''(x_i)(1 + \dfrac{h^2}{12}\eta_i) + S'(x_i)(p_i + \dfrac{h^2}{12}\alpha_i) + \\ S(x_i)(q_i + \dfrac{h^2}{12}\beta_i) = f_i + \dfrac{h^2}{12}\theta_i; \qquad (i = \overline{1, N-1}), \end{cases} \tag{4}$$

де $\eta_i = \mu_i(p_i^2 - 2p_i' - q_i)$; $\quad \alpha_i = \mu_i(p_i q_i' + p_i p_i' - p_i'' - 2q_i')$;

$$\beta_i = \mu_i(q_i' p_i - q_i''); \quad \theta_i = \mu_i(p_i f_i' - f_i''); \quad (i \geq 1) \tag{5}$$

$$\mu_1 = \frac{11}{6}; \quad \mu_2 = \frac{4}{6}; \quad \mu_3 = \mu_4 = \ldots = 1.$$

Як наближений розв'язок задачі (1) - (2) $S(x)$ розглянемо кубічний сплайн

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} C_i B_3\left(\frac{x}{h} - i\right), \quad x \in [0, nh], \quad n \in N, \tag{6}$$

де $B_3\left(\dfrac{x}{h} - i\right)$- нормований кубічний В-сплайн.

Для визначення коефіцієнтів сплайну (6) скористаємося відомими значеннями В-сплайну та його похідних у вузлах розбиття. Оскільки сплайн (6) є розв'язком дискретної моделі (4)-(5), то, підставляючи значення В-сплайна та його похідних, отримуємо систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів сплайну C_i:

$$\begin{cases} C_{-1} + 4C_0 + C_1 = y_0, \\ C_1 - C_{-1} = 2h\, y_0', \\ \\ C_1 - 2C_0 + C_1 = h^2 (f_0 - q_0 y_0 - p_0 y_0'), \\ (1 + \eta_i \dfrac{h^2}{12}) \dfrac{C_{i-1} - 2C_i - C_{i+1}}{h^2} + (p_i + \alpha_i \dfrac{h^2}{12}) \dfrac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2h} + \\ +(q_i + \beta_i \dfrac{h^2}{12}) \dfrac{C_{i+1} + 4C_i + C_{i-1}}{6} = f_i + \theta_i \dfrac{h^2}{12}, \qquad (i \geq 1), \end{cases} \tag{7}$$

де поправки η_i , α_i , β_i , θ_i обчислюємо за формулами (5).

Дана схема має таку ж стійкість, як і схема Адамса, у якій другу похідну замінюємо розділеною різницею другого порядку. Але схема Адамса має порядок точності $O(h^2)$. Нижче доведемо, що запропонована схема розв'язку задачі (1)-(2) за виконання умов діагонального переважання у матриці системи дає точність порядку $O(h^4)$.

Після того як розв'язок даної задачі до першої точки розриву знайдено, використовуючи отриманий результат, розглянемо задачу на проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $(i = \overline{1, k}, k > 1)$. На кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $(i = \overline{1, k}, k > 1)$ введемо розбиття

$$\Delta_{N_{i+1}} = \left\{ x_{m_i + j} = jh_i + \tau_i ;\ h_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{N_{i+1}}, \tau_i = x_{m_i} < \ldots < x_{m_i + N_i} = \tau_{i+1} \right\}$$

так, що $h_{i+1} = h_i + O(h_i^2)$, $j = \overline{0, N_{i+1}}$. Розбиття проведемо таким чином, щоб точки розриву τ_i були вузлами колокації.

Розглянемо проміжок $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Маємо $q(x)$, $f(x) \in L_\infty^4(\tau_i, \tau_{i+1})$, $p(x) \in L_\infty^5(\tau_i, \tau_{i+1})$. Розв'язок задачі (1) – (2) шукаємо у вигляді сплайну (6), а початкові умови є обчислені значення сплайну із попереднього проміжку в точці $x_{m_i} = \tau_i$. За допомогою цього підходу отримуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} S(0) = S_3(\tau_i), \quad S'(0) = S_3'(\tau_i) \\ S''(x_j)(1+\eta_i h_i^2) + S'(x_j)(p_i + \alpha_i h_i^2) + S(x_j)(q_i + \beta_i h_i^2) = \\ = f_i + \theta_i h_i^2, \quad (i = \overline{0,\, N_2}). \end{cases} \tag{8}$$

Для визначеності коефіцієнти сплайну $S(x)$ позначимо C_j^i, де $i = \overline{1,k}$ – номер точки розриву, а $j = \overline{0,\, N_{i+1}}$, N_{i+1} – кількість ділянок розбиття відрізка $[\tau_i,\, \tau_{i+1}]$.

Тоді система для визначення коефіцієнтів сплайну $S(x)$ на проміжку $[\tau_i,\, \tau_{i+1}]$ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{C_{-1}^i + 4C_0^i + C_1^i}{6} = y_{m_i} - D_{N_i} h_i^5; \\ C_1^i - C_{-1}^i = 2h_i y'_{m_i} + 2F_{N_i} h_i^5; \\ \dfrac{\Delta^2 C_j^i}{h^2}(1 + \eta_j \dfrac{h_i^2}{12}) + (p_{m_i+j} + \alpha_j \dfrac{h_i^2}{12}) \dfrac{C_{j+1}^i - C_{j-1}^i}{2h_i} + \\ + (q_{m_1+j} + \beta_j \dfrac{h_i^2}{12}) \dfrac{C_{j+1}^i + 4C_j^i + C_{j+1}^i}{6} = f_{m_i+j} + \theta_j \dfrac{h_i^2}{12}, \end{cases} \tag{9}$$

а поправки $\eta_j, \alpha_j, \beta_j$, θ_j - визначені рівністю (5),

$$F_{N_i} = \frac{1}{144} p_{m_i} y_{m_i}^{(4)} - \frac{1}{72} y_{m_i}^{(5)} + F_{N_{i-1}},$$

$$D_{N_i} = \frac{N_i - 3}{144} y_{m_i}^{(4)} p_{m_i} - \frac{N_i + 5}{120} y_{m_i}^{(4)} + N_i F_{N_{i-1}} + D_{N_{i-1}}\,, \tag{10}$$

де $j = \overline{0,\, N_{i+1}}$, p_{m_i+0}, q_{m_i+0}, f_{m_i+0} – значення функцій $p(x), q(x), f(x)$ справа від точки $x_{m_i} = \tau_i$.

Точність побудованої схеми доведено в такій теоремі.

Теорема. Нехай $q(x), f(x) \in L^4_{\infty(\tau_i,\, \tau_{i+1})}$, $p(x) \in L^5_{\infty(\tau_i,\, \tau_{i+1})}$ і h_N $(h_N = \max h_i (i = \overline{1,k}))$ таке, що

$$\left| 1 + \frac{p_v h_N}{2} + \frac{q_v h_N{}^2}{6} + \frac{\eta_v h_N{}^2}{12} + \frac{\alpha_v h_N{}^3}{24} + \frac{\beta_v h_N{}^4}{72} \right| > 0,\ (v = 1, 2, \ldots),$$

тоді, якщо $y_* \in L^6_{\infty(\tau_i,\,\tau_{i+1})}$ - точний розв'язок задачі (1)-(2) і сплайн $S(x)$ подано у вигляді

$$S_3(x) = \sum_{j=-1}^{\infty} C_j^i B_3\left(\frac{x}{h_i} - j\right) \quad , \tag{11}$$

де $C_j^i = (i = \overline{1,\, k};\ j = \overline{-1,\, N_{k+1}})$ є розв'язок системи (9), тоді за $h_N \to 0$ виконується нерівність

$$\left\| y_* - S \right\|_{C\,[0,nh]} \le A h_N^4 + B n h_N^5 + n O(h_N{}^6) \quad (n=1,2..)$$

де

$$A = \left\| \frac{y_*^{(4)}}{384} \right\|_{C\,[0,nh]} ; \quad B = \left\| \frac{y_*^{(5)}}{20} - \frac{1}{72} y_*^{(4)} p + F_N + D_N \right\|_{C\,[0,nh]} .$$

У формулюванні теореми і нижче під записом $-\|\bullet\|$ розуміємо норму, визначену таким чином:

$$\|f\| = \max\{|f(x)|,\ x \in [\tau_i, \tau_{i+1}],\ i = 1,2,\ldots\}.$$

Щоб довести теорему, необхідно отримати формули для обчислення коефіцієнтів сплайну (11) у випадку, коли функції $p(x), q(x), f(x)$ мають скінченну кількість розривів першого роду в точках $x_{m_i} = \tau_i$ $(i = \overline{1,\, k},\ k > 1)$. З цією метою доведемо допоміжне твердження.

Лема. Нехай $q(x),\ f(x) \in L^4_{\infty(\tau_i,\,\tau_{i+1})}$, $p(x) \in L^5_{\infty(\tau_i,\,\tau_{i+1})}$ тоді, якщо $y_* \in L^6_{\infty(\tau_i,\,\tau_{i+1})}$ – точний розв'язок задачі (1) – (2), і коефіцієнти сплайну (11) $C_j^i (i = \overline{1,\, k};\ j = \overline{-1,\, N_{k+1}})$ є розв'язком системи (9), а F_{N_i} і D_{N_i} знаходяться за формулами (10), тоді за $h_N \to 0$ маємо

$$C_j^i = y_{m_{i+j}} - \frac{h^2}{6} y''_{m_{i+j}} + \frac{h^4}{72} y^{(4)}_{m_{i+j}} + \frac{j-3}{144} y^{(4)}_{m_{i+j}} h^5 - \frac{5+j}{144} y^{(5)}_{m_{i+j}} h^5 + \tag{12}$$

$$h^5 (j F_{N_i} + D_{N_i}) + O(h^6).$$

На підставі даної леми доведемо теорему.

Доведення теореми. Нехай $x \in [x_v, x_{v+1}] \subset (\tau_i, \tau_{i+1})$, де $m_i < v < m_{i+1}; i = \overline{1, k}$, $(v - m_i = j)$. Розглянемо сплайн $S(x)$ вигляду (11)

$$\begin{aligned} S(x) = C^i_{v-m_i} B_3(x/h_i - v) + C^i_{v-m_i-1} B_3(x/h_i - (v+1)) + \\ + C^i_{v-m_i+2} B_3(x/h_i - (v+2)) + C^i_{v-m_i-1} B_3(x/h_i - (v-1)) \end{aligned}. \quad (13)$$

Підставляючи значення коефіцієнтів (12) і явний вигляд В-сплайнів у (13), враховуючи, що $t_i = \dfrac{x}{h_i} - v, \quad (t_i \in [0, 1])$, після розвинення y_{v+2}, y_{v+1}, y_{v-1} та їх похідних за формулою Тейлора в околі точки x_v отримаємо

$$S(x) = y_v + y'_v h_i t_i + \frac{1}{2} y''_v h_i^2 t_i^2 + \frac{1}{2} y'''_v h_i^3 t_i^3 - \frac{1}{24} y_v^{(4)} h_i^4 t_i^2 + \frac{y_v^{(4)} h_i^4 t_i^3}{12} +$$

$$+ \frac{1}{72} y_v^{(5)} h_i^5 t_i^3 - \frac{1}{72} y_v^{(5)} h_i^5 t_i + \frac{1}{144} y_v^{(4)} p_v h_i^5 t_i - \frac{5 + v - m_i}{120} y_v^{(5)} h_i^5 + \quad (14)$$

$$\frac{(v - m_i)3}{144} y_v^{(4)} p_v h_i^5 + ((v - m_i) F_{N_i} + D_{N_i}) h_i^5 + F_{N_i} t_i h_i^5 + O(h_N^6).$$

Перейдемо до оцінки норми різниці $y_*(x) - S(x)$. Запишемо розклад $y_*(x)$ за формулою Тейлора в околі точки $x_v \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$. Якщо покласти $x - x_v = t_i \cdot h_i$, ($0 \le t_i \le 1$) для $x \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, тоді з урахуванням (14), після зведення подібних, отримаємо

$$\|y_* - S\| = \left\| h_i^4 y_v^{(4)} \left(\frac{t_i^4}{24} + \frac{t_i^2}{24} - \frac{t_i^3}{12} \right) + y_v^{(5)} h_i^5 \left(\frac{t_i}{72} - \frac{t_i^3}{72} + \frac{1}{24} + \frac{t_i^5}{120} \right) - \right.$$

$$\frac{v - 3 - m_i}{144} y_v^{(4)} p_v h_i^5 - \frac{1}{144} y_v^{(4)} p_v h_i^5 t_i + \frac{v - m_i}{120} y_v^{(5)} h_i^5 -$$

$$\left. - ((v - m_i) F_{N_i} + D_{N_i}) h_i^5 - F_{N_i} t_i h_i^5 + v O(h^6) \right\|.$$

Щоб оцінити норму зверху, знайдемо найбільші значення функцій при четвертій і п'ятій похідних.

Розглянемо функцію $g(t)=\frac{t^4}{24}+\frac{t^2}{24}-\frac{t^3}{12}$, $t\in[0,\,1]$. Найбільше значення функції $g(t)$ на $[0,\,1]$ складає $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{384}$. Також розглянемо функцію $\varphi(t)=\frac{t}{72}-\frac{t^3}{72}+\frac{1}{24}+\frac{t^5}{120}$. Аналогічно знайдемо найбільше значення функції $\varphi(t)$ на відрізку [0, 1] – це $\varphi(1)=\frac{1}{20}$. Скориставшись цими результатами, оцінимо норму різниці $y_*(x)-S(x)$ зверху, застосувавши нерівність трикутника.

$$\|y_*-S\|\le\frac{\left\|y_*^{(4)}\right\|}{384}h^4+h^5\left\|\frac{6+\nu-m_i}{120}y_*^{(5)}-\frac{\nu-m_i-2}{72}y_*^{(4)}p-(\nu-m_i)F_N-D_N\right\|.$$

Таким чином, справедлива така оцінка:

$$\|y_*-S\|\ \le Ah_N^4+Bnh_N^5+O(h_N^5),$$

де $A=\left\|\frac{y_*^{(4)}}{384}\right\|$, $\quad B=\left\|\frac{y_*^{(5)}}{20}-\frac{1}{72}y_*^{(4)}p-F_N\right\|$, $\quad n=\max N_i\,(i=\overline{1,k})$,

$$F_N=\max F_{N_i}\,(i=\overline{1,k}),\quad D_N=\max D_{N_i}\,(i=\overline{1,k}).$$

Отже, теорему доведено.

Висновки. Розроблено методи дискретизації задачі Коші, параметри якої – функції, що мають скінченну кількість точок розриву. Побудовано метод ідентифікації параметрів дискретних моделей, який дозволяє отримати розв’язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю в порівнянні зі звичайними колокаційними методами. Отримано коефіцієнти сплайн-розв’язків моделей з ідентифікованими параметрами. Отримано оцінки точності розв’язків моделей з ідентифікованими параметрами. Доведено, що відхилення отриманого розв’язку від точного не перевищує $O(h^4)$.

Бібліографічні посилання

Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций [Текст]/ Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Надійшла до редколегії 02.04.2016