УДК 519.8 doi: 10.15421/3220012

С.И. Полюга
Запорожский областной институт последипломного педагогического образования

МЕТОД ПРЫГАЮЩИХ ЛЯГУШЕК ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОЙ КЛИКЕ ГРАФА

В статье предложена фрагментарная модель для классической экстремальной задачи на графах – задаче о максимальной клике. Показана достижимость оптимального решения этой задачи в рамках фрагментарной модели. Предложен вариант метода перемешанных прыгающих лягушек для этой задачи.

Ключевые слова: задача о максимальной клике графа, фрагментарная структура, фрагментарный алгоритм, алгоритм перемешанных прыгающих лягушек.

С.І. Полюга
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

МЕТОД СТРИБАЮЧИХ ЖАБ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНУ КЛІКУ ГРАФУ

Задача пошуку максимальної кліки в графі виникає в багатьох додатках теорії графів. Незважаючи на простоту формулювання ця задача відноситься до розряду задач, що важко розв'язуються в обчислювальному сенсі. Тому для цієї задачі виправдане застосування метаеврістік. У статті описана оригінальна метаеврістіка, яка заснована на фрагментарній моделі задачі про максимальну кліку. Наводиться визначення та основні поняття теорії фрагментарних структур. Дається загальний опис фрагментарного алгоритму. Доведено, що задача про максимальну кліку може бути зведена до задачі пошуку оптимальної перестановки вершин графа.

Для цієї мети пропонується фрагментарна модель задачі про максимальну кліку. Показано, що будь-який оптимальний розв'язок задачі можна досягти в рамках цієї моделі. Алгоритм пошуку субоптимальних рішень будується як комбінація фрагментарного алгоритму на фрагментарній структурі і алгоритму перемішаних стрибаючих жаб. Пропонований підхід до вирішення задачі про максимальну кліку є універсальним. Він може бути легко поширений і на інші класи задач комбінаторної оптимізації, що важко розв'язуються.

Ключові слова: задача про максимальну кліку графа, фрагментарна структура, фрагментарний алгоритм, алгоритм перемішаних стрибаючих жаб.

S.I. Poliuga
Zaporizhia Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education

JUMPING FROG METHOD FOR PROBLEM OF THE MAXIMAL CLIQUE OF THE GRAPH

The task of finding the maximum clique in a graph arises in many applications of graph theory. Despite the simplicity of the formulation, this problem belongs to the category of problems that are difficult to solve in a computational sense. Therefore, the use of me

taheuristics is justified for this task. The article describes the original metaheuristics, which is based on a fragmented model of the maximum click problem. The definition and basic concepts of the theory of fragmentary structures are given. A general description of the fragmented algorithm is given. It is proved that the maximum clique problem can be reduced to the problem of finding the optimal permutation of graph vertices.

For this purpose, a fragmented model of the maximum click problem is proposed. It is shown that any optimal solution to the problem is achievable within the framework of this model.

The algorithm for finding suboptimal solutions is constructed as a combination of a fragmented algorithm on a fragmented structure and an algorithm of mixed jumping frogs.

The proposed approach to solving the maximum click problem is universal. It can be easily extended to other classes of hard-to-solve combinatorial optimization problems.

Keywords: maximum clique graph problem, fragmented structure, fragmented algorithm, algorithm of mixed jumping frogs.

Введение. В настоящей статье исследуется проблема выделения подмножества вершин графа с определенными экстремальными свойствами. А именно: задача о максимальной клике графа (далее задача о клике). Эта задача имеет важные приложения в теории синтеза схем, производственной психологии, часто возникают в приложениях, связанных с транспортными, телекоммуникационными и другими сетями.

На сегодняшний день неизвестен полиномиальный алгоритм выделения максимальной клики в произвольном графе. Известные приближенные алгоритмы не имеют точных оценок, а точные алгоритмы в той или иной форме осуществляют перебор вариантов.

Поэтому при решении практических задач разумно использовать метаэвристики. Предлагается гибридный подход к поиску решения задачи об оптимальной клике на основе комбинации фрагментарного алгоритма и метода перемешанных прыгающих лягушек.

Обзор имеющихся результатов. Задача о максимальной клике была впервые сформулирована в [1]. Эта задача относится к классу NP-полных задач [2] в области теории графов. Благодаря простоте формулировки задача привлекала многочисленных исследователей. На сегодня известны классы графов, для которых задача о клике является полиномиально разрешимой, например, планарные графы.

Однако в общей постановке для произвольных графов на сегодня неизвестны алгоритмы поиска с полиномиальной трудоемкостью. Поэтому в общей постановке задачи оправдано применение метаэвристик. В настоящей работе будет показано, что задача о клике может быть сформулирована как задача на фрагментарной структуре [3].

Это позволяет свести задачу о максимальной клике к задаче оптимизации на множестве перестановок. В свою очередь многие известные метаэвристики могут быть модифицированы для задачи поиска оптимальной перестановки в пространстве с метрикой Кендалла [4]. В частности, речь идет о известной метаэвристике – методе перемешанных прыгающих лягушек [5,6], которая позволяет достаточно эффективно отыскивать субоптимальные решения задач оптимизации как в пространстве R_n, так в некоторых дискретных задачах.

Следует отметить, что к задаче о клике полиномиально сводятся многие прикладные задачи теории графов. В частности, одним из современных приложений задачи о клике являются социальные сети [7]. Рассмотрим социальную сеть, где вершины графа представляют людей, а ребра графа – отношение знакомства. Тогда клика представляет собой подмножество людей, любые два из которых знакомы друг с другом. А алгоритмы поиска клики могут быть использованы, чтобы обнаружить эти группы взаимных друзей. Наряду с приложениями в социальных сетях, задача о клике также имеет множество применений в области биоинформатики [8] и вычислительной химии.

Формулировка целей. Целью настоящей работы является построение гибридной метаэвристики на основе комбинации фрагментарного алгоритма и метода перемешанных прыгающих лягушек для задачи о клике. При этом алгоритм прыгающих лягушек переносится на метрическое пространство перестановок без всяких ограничений, что делает его универсальным для всех задач имеющих фрагментарную структуру. Для задачи о клике доказывается, во-первых, возможность постановки задачи как задачи с фрагментарной структурой, во-вторых, доказывается достижимость оптимальных решений в рамках фрагментарной модели. Таким образом, предлагаемый подход может эффективно использоваться для отыскания субоптимальных решений задачи о клике в графах больших размерностей.

Постановка задачи о максимальной клике. Пусть $G=(V,E)$ – неориентированный граф без петель, кратных ребер и изолированных вершин, V – множество вершин, $|V|=n$; E – множество ребер, $|E|=m$. При этом ребро определяется как неупорядоченная пара вершин; то есть, если $e\in E$, то $e=(i,j), i\in V, j\in V$.

Определение 1. [9, 10]. Кликой графа $G=(V,E)$ называется множество вершин $V'\subset V$, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежные.

Размером клики называется число содержащихся в ней вершин. Например, на рис 1. вершины {2,3,4,6} образуют максимальную клику размерности 4.

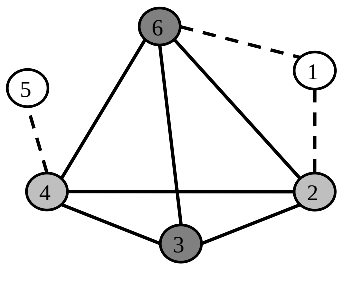


Рис. 1. Максимальная клика

Задача отыскания в графе клики максимальной мощности называется задачей о максимальной клике (ЗМК). Доказано, что эта задача NP – полна [1,2].

Фрагментарная структура и фрагментарный алгоритм.

В соответствии с [11] *Фрагментарной структурой* (X, E) на конечном множестве *X* называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ такое, что $\forall E_i \in E$, $E \neq \varnothing$ $\exists e \in E_i : E_i \setminus \{e\} \in E$.

Элементы из множества *E* будем называть допустимыми фрагментами.

Таким образом, для любого допустимого фрагмента E_i существует нумерация его элементов $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ...e_{is_i}\}$ такая, что $\forall k = 1, 2, ...s_i$ $\{e_{i1}, e_{i2}, ...e_{ik}\} \in E$.

Определение 2. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами.

Определение 3. Допустимый фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Очевидны следующие свойства.

1) Пустое множество является фрагментом, $\varnothing \in E$.

2) Пусть мощность допустимого фрагмента фрагментарной структуры равна $\max\limits_{i=1,n} |E_i| = M$. Тогда в *E* найдутся элементы, мощности которых будут равны соответственно *M, M-1,M-2,…,0.*

Теорема 1. Если (X, E) – фрагментарная структура на множестве *X*, то для любого непустого множества $A \in E$ существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ такая что $\forall k, k = \overline{1,n}$ множество $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in E.$

Любой максимальный фрагмент может быть построен с помощью следующего «жадного» алгоритма:

а) элементы множества *X* линейно упорядочиваются;

б) на начальном шаге выбирается пустое множество: $X_0 = \varnothing$;

в) на шаге с номером $k+1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$, такой, что $X_k \bigcup \{x\} \in E$;

г) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Приведенный выше алгоритм построения максимального фрагмента во фрагментарной структуре будем называть фрагментарным алгоритмом. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве *X, то есть перестановкой его элементов*. Пусть $A \in E$. Условие для элемента $x \in X$, при котором $A \bigcup \{x\} \in E$; будем называть условием присоединения элемента *x*.

Пусть на множестве *E* задана функция-критерий $F : E \to R^1$ со следующим свойством: $\forall A, B \subseteq E$ из условия $A \subseteq B$ вытекает, что $F(A) \leq F(B)$. Тогда максимум этой функции достигается на одном из максимальных фрагментов.

Многие задачи дискретной оптимизации можно представить как задачи на фрагментарной структуре. Причем решением задачи является максимальный фрагмент. К таким задачам, в частности, относится рассматриваемая ниже задача о клике.

Фрагментарная модель и фрагментарный алгоритм для задачи о клике.

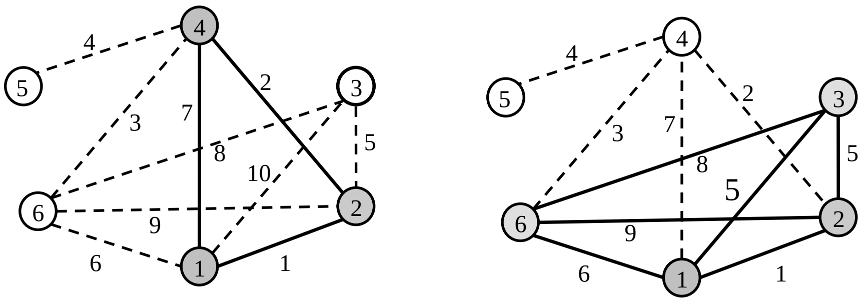
Для задачи о максимальной клике выберем в качестве множества элементарных фрагментов множество V всех вершин графа, элементы которого нумеруются числами $1,2,...,n$. Условие присоединения элементарного фрагмента к уже выбранному набору – присоединяемая вершина смежная с каждой из вершин этого набора.

Рассматриваются произвольные упорядочения вершин графа. Каждое из этих упорядочений описывается перестановкой из группы перестановок S_n. По каждой перестановке чисел 1,2,…,n строится максимальный фрагмент следующим алгоритмом:

- составляется список элементарных фрагментов (вершин) упорядоченный в соответствии с некоторой перестановкой чисел 1,2,…n. Множество выделенных вершин на начальном этапе состоит из одной вершины – первой вершине этого списка;
- выбирается очередная по порядку вершина из списка. Если эта вершина смежная ко всем выделенным вершинам, то она добавляется к множеству выделенных вершин;
- алгоритм заканчивает работу, когда весь список вершин будет просмотрен.

Множество выделенных вершин есть множество вершин клики в графе G.

Результат работы фрагментарного алгоритма изображен на рис. 2. Для списка вершин 1,5,4,3,2,6 получаем клику размерности 3 (рис.2.а), а для списка 6,5,3,4,1,2 получаем клику размерности 4 (рис.2.б), которая является максимальной.



1,5,**4**,3,**2**,6; W={1,2,4}.
а)

6,5,**3**,4,**1**,**2;** W={1,2,3,6}.
б)

Рис. 2. Результат работы фрагментарного алгоритма для ЗМК

Теорема 2. Любое решение задачи о максимальной клике может быть получено с помощью фрагментарного алгоритма при надлежащем выборе перестановки элементарных фрагментов.

Доказательство. Пусть некоторое подмножество вершин $V_1 \subseteq V$ является множеством вершин максимальной клики в графе G. Перенумеруем элементы этого множества числами $V_1 = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Вершины множества $V \setminus V_1$ занумеруем числами k+1,k+2,…,n. Фрагментарный алгоритм по указанной перестановке элементарных фрагментов построит множество вершин максимальной клики V_1.

Приближенные алгоритмы поиска оптимальных решений на фрагментарных структурах.

Таким образом, соответствующая задача поиска экстремального множества вершин в графе сводится к поиску максимального фрагмента во фрагментарной структуре. То есть, задача сводится к комбинаторной задаче $F(s) \xrightarrow[s \in S_n]{} \max$ отыскания некоторой экстремальной перестановки на множестве перестановок. Причем любая перестановка является допустимой.

Поставим каждой перестановке в соответствие значение критерия на соответствующем ей максимальном фрагменте – число вершин клики.

На множестве перестановок можно предложить несколько простых алгоритмов приближенного поиска оптимальной перестановки. Опишем некоторые из них.

Наиболее простой алгоритм поиска приближенного решения является метод случайного поиска. А именно, генерируется случайным образом некоторое множество перестановок, для каждой из которых, вычисляются значения критерия. В качестве приближенного решения выбирается то, у которого значение критерия наибольшее.

Множество перестановок может рассматриваться как метрическое пространство с некоторой метрикой [4]. Определяется метрика $\rho : S_n \times S_n \to R_+^1$ на множестве перестановок. Выбирается начальная перестановка и ищется оптимальная перестановка в ε-окрестности данной перестановки. Эта найденная перестановка является базовой для следующего шага.

Условие остановки алгоритма: в ε-окрестности уже не существует перестановки с лучшим критерием. В качестве ε можно брать любое натуральное число 1,2,… .

Очень хорошие результаты дает эволюционная модель на фрагментарной структуре [12].

Метод перемешанных прыгающих лягушек.

Алгоритм метода перемешанных прыгающих лягушек прост для понимания и реализации, имеет небольшое количество параметров, успешно применялся для решения задач комбинаторной и непрерывной оптимизации [5,6].

Суть алгоритма прыгающих лягушек для поиска оптимальной перестановки сводится к следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Инициализировать начальную популяцию лягушек, как множество точек пространства перестановок S_n с метрикой Кендалла.

Шаг 2. Вычислить значение критерия оптимальности для каждой перестановки из начальной популяции.

Шаг 3. Упорядочить решения в порядке убывания значения критерия оптимальности.

Шаг 4. Разделить виртуальных лягушек (решения) на блоки-мемплексы таким образом, что первая в отсортированном списке виртуальная лягушка попадает в первый мемплекс, вторая заносится во второй мемплекс и т.д.

Шаг 5. Так продолжается пока все лягушки не будут распределены в указанное количество мемплексов.

Шаг 6. В каждом мемплексе с номером $k \in \{1, 2, ..., K\}$ найти лучшее s_{k1} и худшее s_{k2} решение.

Шаг 7. Попытаться улучшить положение худшей виртуальной лягушки путем случайного перемещения ее в направлении лучшей лягушки. Это происходит применения оператора кроссовера $s = Cross(s_{k2}, s_{k1})$.

Шаг 8. Если предыдущая операция не улучшает решение, то попытаться улучшить положение худшей виртуальной лягушки путем перемещения ее в направлении глобально лучшей лягушки $s = Cross(s_{k2}, s_{11})$.

Шаг 9. Если и последняя операция не приводит к улучшению позиции виртуальной лягушки, то взамен ее случайным образом создать в области поиска новую лягушку - перестановку.

Шаг 10. Объединить виртуальных лягушек всех мемплексов в одну группу.

Шаг 11. Если условия завершения алгоритма не выполнены, то – переход к Шагу 3.

Шаг 12. Последняя глобально лучшая виртуальная лягушка соответствует субоптимальному решению задачи.

Опишем теперь этот алгоритм формально с учетом параметров.

Параметры метода следующие:

1) количество классов лягушек Q $(Q \geq 2)$;
2) количество элементов r в каждом классе (предполагается, что размеры классов одинаковы и $r \geq 2$);
3) максимальное число шагов K алгоритма;
4) количество D лучших лягушек в классе, причем $0 < D < r$.

В соответствии с заданными параметрами размер N популяции лягушек (множества допустимых решений) определяется формулой $N = Qr$. На начальном шаге алгоритма создается исходная популяция лягушек $P^{(0)}$ путем генерации случайных перестановок $s^j = (i_{j1}, i_{j2}, .., i_{jn})$, $j = 1, 2, ..., N$.

Выбирается лучшая по функции цели перестановка вершин, которая задает перестановку $s^* = (i_1, i_2, ..., i_n)$ и вычисляется значение целевой функции $F(x^*)$ на этой перестановке:

Шаг k ($1 \leq k \leq K$). Упорядочивается множество $P^{(k-1)}$ по значению целевой функции, то есть $F(s^k) \geq F(s^{k-1}),\quad k = 2, 3, ..., N-1$. Разбивается популяция $P^{(k-1)}$ на Q классов одинаковой мощности r

$$P_q^{(k-1)} = \{s^{(qi)} \mid s^{(qi)} = x^j,\ j = q + (i-1)Q,\ i = 1, 2, .., r,\ q = 1, 2, ..., q\}.$$

Определяется лучшее решение $s^* = s^1$ по значению целевой функции на всей популяции. В каждом классе $P_q^{(k-1)}$ определяются «лучшее» $s^{(q1)}$ и «худшее» $s^{(qr)}$ по значению целевой функции решения. В каждом классе $P_q^{(k-1)}$ меняются положения (последовательности обхода вершин графа) лягушек с номерами от $D+1$ до r. Для каждого значения индекса $i \in \{D+1, 2, ..., r\}$ определяется новое положение i-й лягушки (последовательность обхода вершин) в классе с номером q по следующему правилу: вычисляется случайная перестановка s^c из отрезка между перестановками » $s^{(q1)}$ и $s^{(qr)}$ в метрике Кендалла.

Если $F(s^c) < F(s^{(qi)})$, то полагаем $s^{(qi)} = s^c$. Если $F(s^c) \geq F(s^{(qi)})$, то выбирается случайная перестановка s^c в отрезке между s^* и $s^{(qr)}$. Если $F(s^c) < F(s^{(qi)})$, то полагаем $s^{(qi)} = s^c$. В противном случае выбираем в качестве $s^{(qi)}$ случайно сгенерированную перестановку.

Полагаем $P^{(k)} = \bigcup_{q=1}^{Q} P_q^{(k-1)}$ и переходим к очередному шагу алгоритма.

Алгоритм заканчивает работу, когда проведено заданное число шагов. Текущая перестановка s^*, определенная на последнем шаге берется в качестве оптимального решения задачи.

Заметим, что описанный выше алгоритм решает задачу отыскания оптимальной перестановки из n элементов на множестве всех перестановок с целевой функцией $F(s)$, которая задана на множестве перестановок. При этом конкретный вид целевой функции не имеет значения. Поэтому рассмотренный выше алгоритм может использоваться для отыскания субоптимальных решений задач оптимизации на множестве перестановок с произвольными целевыми функциями.

Выводы. В работе предлагается новый подход для решения экстремальных задач на графах, в частности для поиска решений задачи о клике. В основе метода лежит построение фрагментарной модели для задачи на графах. Как следствие, задача поиска оптимального решения сводится к поиску оптимальной перестановки на множестве перестановок. Для таких задач эффективным является применение универсальных метаэвристик на фрагментарных моделях. В работе приводится модификация метода прыгающих лягушек. Показано, что оптимальные решения задачи о клике достижимы в рамках фрагментарной модели.

Таким образом, гибридный алгоритм на основе комбинации метода перемешанных прыгающих лягушек и фрагментарного алгоритма может быть обобщен на широкий класс дискретных оптимизационных задач, а именно на задачи, имеющие фрагментарную структуру.

Библиографические ссылки

1. **Karp, R. M.** Reducibility among combinatorial problems [Text] // Complexity of Computer Computations: Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds., The IBM Research Symposia Series, New York, NY: Plenum Press, 1972, pp. 85-103.
2. **Гэри, М.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гэри, Д. Джонсон; пер. А. Фридман. – М. : Мир. – 1982. – 416 с.
3. **Kozin, I. V.** Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems [Text] / I. V. Kozin, N. K. Maksyshko,V. A. Perepelitsa Cybernetics and Systems Analysis November 2017, Volume 53, Issue 6, pp 931–936.
4. **Деза, Е. И**. Энциклопедический словарь растояний [Текст] / Е.И. Деза, М.М.Деза. – М. : Наука, 2008. – 432 с.
5. **Карпенко, А.П.** Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : учебное пособие для вузов [Текст] / А. П. Карпенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 446 с.
6. **Narimani, M.R**. A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath [Text] // World Applied Sciences Journal. 2011. – P. 803–814
7. **Luce, R. Duncan**, Albert D. Perry. A method of matrix analysis of group structure [Text] // Psychometrika. – 1949. – Т. 2, вып. 14. – С. 95 – 116. – doi:10.1007/BF02289146. – PMID 18152948.
8. **Ben-Dor, Amir.** Clustering gene expression patterns [Text] / Amir Ben-Dor, Ron Shamir, Zohar Yakhini.// Journal of Computational Biology. – 1999. – Т. 6, вып. 3-4. – С. 281—297. – doi:10.1089/106652799318274. – PMID 10582567.
9. **Пападимитриу, Х.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность [Текст] / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
10. **Касьянов, В.Н.** Графы в программировании: обработка визуализация и применение [Текст] / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. СПб.: БХВ-Петербург, – 2003. – 1104 с.
11. **Козин, И.В.** О свойствах фрагментарных структур [Текст] / И. В. Козин, С. И. Полюга // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – №1. – С.99 – 106.
12. **Козин, И.В.** Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы [Текст] / И. В. Козин // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць / [ред. кол. : О. М. Кисельова (головний редактор) та ін.]. – 2008. – С. 138-146.

Поступила в редколлегию 10.08. 2020.