УДК 528.111:519.281

Джунь Й. В. д.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем’янчука, м. Рівне)

НОТАТКИ ДО КРИТЕРІЮ КРАМЕРА-УЕЛЧА

Анотація. *У статті критично розглянуто походження такої статистичної процедури як критерій Крамера-Уелча. Показано, що ця процедура є не чим іншим як рішенням елементарної і давно відомої класичної теорії помилок.*
Ключові слова: *критерій Крамера-Уелча, теорія помилок, нормальний розподіл.*

Аннотация. *В статье критически рассмотрено происхождение такой статистической процедуры как критерий Крамера-Уэлча. Показано, что эта процедура является не чем иным как решением элементарной и давно известной классической теории ошибок.*
Ключевые слова: *критерий Крамера-Уэлча, теория ошибок, нормальное распределение.*

Annotation. *The author carried out the critical analysis of the origin of such statistical procedure as the Cramer-Walsh criterion. It is shown that this procedure is the solution of the elementary classical theory of errors.*
Keywords: *Cramer-Walsh criterion, theory of errors, normal distribution.*

Проблемам теорії методів аналізу даних присвячено біля 10^6 наукових статей і книг. Дослідники, які працюють в цій галузі, звичайно не можуть ознайомитись з усією науковою інформацією з аналізу даних. В результаті деякі давно відомі процедури перевідкриваються заново або публікуються під новою назвою. Однією із таких процедур є критерій Крамера-Уелча.

Мета і завдання нашого дослідження показати, що цей критерій є нічим іншим як давно відомою в теорії помилок процедурою .

Критерій Крамера-Уелча (можливо Уолша – Walsh J.E. [1, с. 896]) наполегливо рекомендується до використання в двох статтях доктора технічних наук, професора О.І.Орлова, які надруковані в досить популярному серед дослідників журналі «Заводская лаборатория» [2; 3]. Це критерій рівності математичних сподівань у випадку коли дисперсії двох нормальних вибірок не є однаковими.

Зазначимо також, що автор роботи [2] увесь арсенал прикладних статистичних методів розділяє на три категорії: високі статистичні технології; класичні статистичні технології; низькі статистичні технології.

Критерій Крамера-Уелча згаданий вище автор відносить до високих статистичних технологій.

Пропонуючи цей критерій О.І.Орлов посилається на книгу видатного шведського математика Г. Крамера [4]. Проте, навіть при щирому бажанні, неможливо розшукати критерій під такою назвою у згаданій праці Крамера. Його просто там нема. Та і чи міг такий математик як Крамер, наукова скромність якого є загальновідомою, щось називати своїм іменем, та ще у власній книзі? Ніякої згадки про критерій Крамера-Уелча немає і в інших відомих довідниках і працях з математичної та прикладної статистики, наприклад, в [5; 6; 7], які є сучасними виданнями. Немає відомостей про згаданий критерій і у фундаментальному двотомному довіднику [8].

Проте, на с. 492 в [4] Г. Крамер коротко, мимохідь і без будь-яких заголовків дійсно викладає те, що складає суть критерію Крамера-Уелча за О. І. Орловим, але описує цю процедуру як загальновідому операцію: «Якщо середні значення $\overline{x}$ і $\overline{y}$ розглядаються як нормальні, відповідно $(m_1, \frac{S_1}{\sqrt{n_1}})$ і $(m_2, \frac{S_2}{\sqrt{n_2}})$, то різниця $\overline{x} - \overline{y}$ нормальна $\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right)$ і будь-яку гіпотезу про значення різниці $\overline{x} - \overline{y}$ можна перевірити вказаним вище методом». Цю елементарну процедуру О. І. Орлов відносить до «високих статистичних технологій», тим самим збуджуючи досить широкий інтерес серед науковців.

В своїй статті «Высокие статистические технологии» [2], О. І. Орлов пише: «…преимущество одного технологического приема над другим можно продемонстрировать как с помощью критерия Крамера-Уэлча проверки равенства математических ожиданий (что правильно), так и с помощью двухвыборочного критерия Стьюдента (что, вообще говоря, неверно, т.к обычно не выполняются условия применимости этого критерия – нет ни нормальности распределения, ни равенства дисперсий). Кроме того, приходится выдерживать натиск невежд, защищающих свои ошибочные работы…» [2, с. 58].

З наведеного вислову зрозуміло, що автор роботи [2] критерій Стьюдента відносить до «низьких статистичних технологій» згідно з його ж класифікацією. Не боячись потрапити в коло згаданих «невежд», все-таки посміємо заперечити шановному пану О. І. Орлову – чи можна відносити до якихось «низьких статистичних технологій» класичний *t*-критерій Стьюдента, умови застосування якого чітко визначені, а саме: нормальність і рівність дисперсій двох вибірок. Якщо ці умови не виконуються, то необхідно застосовувати інші методи в міру своєї компетенції, не вішаючи ярлики непотрібності на математично бездоганний метод.

По-друге і критерій Крамера-Уелча також вимагає нормальності двох вибірок. А по-третє саме слово технології навряд чи варто прилаштовувати до математичних обчислень. Тут доречніше застосувати слово «алгоритм», а про останній вже не скажеш, що він може бути високим чи низьким. В математиці, де все має бути чітко визначеним, мусять існувати не розпливчасті поняття «високий» чи «низький», а точно визначені математичні чи числові категорії.

Тому висунуті паном О. І. Орловим поняття «високі статистичні технології», «низькі статистичні технології», на наш погляд, і математично, і гносеологічно не є доречними.

Дослідники в галузі прикладної математики зачаровані словами «високі статистичні технології» не завжди швидко можуть розібратись, що ж то таке за критерій Крамера-Уелча, настільки сучасний і новий, що навіть в довідниках про нього ще не встигли щось написати.

Розглянемо більш детально цей критерій, як він викладений в роботі [3], що виконана при підтримці Російського фонду фундаментальних досліджень (проект 97-06-80033). Як видно із [3], критерій Крамера-Уелча оснований на статистиці:

$$T = \frac{\sqrt{mn}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{mS_x^2 + nS_y^2}} \quad , \tag{1}$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ – середні арифметичні двох вибірок; m і n відповідно їх обсяги, S_x^2, S_y^2 - вибіркові оцінки їх дисперсій.

Перетворимо деяким чином формулу (1):

$$T = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}} \tag{2}$$

Ми бачимо, що у знаменнику формули (2) не що інше, як середня квадратична похибка різниці $(\bar{x} - \bar{y})$, а тому значущість цієї різниці можна дуже просто оцінити давно відомими методами класичної теорії помилок.

Основним результатом нашого дослідження є наступне: формула [2] показує що, критерій Крамера-Уелча є не чим іншим, як рішенням елементарної задачі теорії помилок, яка без труднощів вирішується навіть будь-яким пересічним студентом, що ознайомлений, з будь-яким підручником з «Теорії помилок» [9] чи з аналізу даних.

Виникає питання, навіщо рутинну процедуру подавати у вигляді критерію Крамера-Уелча? Чому потрібно тривіальну задачу іменувати таким мудрим чином, посилаючись на солідні джерела, де цей критерій не означений? Тим більше віднесення елементарної процедури до «високих статистичних технологій» звучить також вкрай непереконливо для фахівців в галузі математичної та прикладної статистики. То для кого ж слово «высокие» здатне прозвучати досить переконливо? Про це можна лише здогадуватись. Можливо тільки для шановних розпорядників Російського фонду фундаментальних досліджень, які, може, не дуже розуміються в математиці та прикладній статистиці, проте здатні позитивно зреагувати на активні зусилля творців «високих статистичних технологій».

У такому разі можна лише висловити співчуття шановним російським колегам, які спасаючи свою науку від повного розвалу і добиваючись хоч якихось асигнувань, вимушені вибудовувати «потьомкінські села» тепер уже в науці і у вигляді аж надто вже «високих технологій».

1. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973. – 900 с. **2.** Орлов А. И. Высокие статистические технологи / А. И. Орлов // Заводская лабораторія. – 2003. – Т. 69. – № 11. – С. 55-60. **3.** Орлов А. И. О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Заводская лаборатория, 2003. – Т. 69. – № 1. – С. 55-60. **4.** Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер / Изд-е 2-е. М.: Мир, 1975. – 648 с. **5.** Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. Пер. с англ. В. С. Занадворова. Под ред. и с предисл. Е. М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с. **6.** Брандт З. Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. – 686 с. **7.** Лагутин Н. Б. Наглядная математическая статистика: Учебное пособие / Н. Б. Лагутин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 472 с. **8.** Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Пер. с англ. Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю. Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989, 1990, – 510 с. и 526 с. **9.** Бугай П. Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів / П. Т. Бугай. – Вид-во Львівського університету. Львів, 1960. – 368 с.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А. П.