

Лотюк Ю. Г., к.пед.н., доцент, Соловей Л. Я., ст. викладач
(Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка
Степана Дем'янчука, м. Рівне)

**ВИКОРИСТАННЯ СИМВОЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ
ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У НАВЧАЛЬНОМУ
ПРОЦЕСІ ВНЗ (НА ПРИКЛАДІ ПАКЕТУ MATHCAD).**

***Анотація.** У статті досліджено можливості застосування засобів символічної математики математичного пакету MathCAD у навчальному процесі та їх вплив на зміст практичних занять з дисциплін математичного циклу. Детально розглянуто всі засоби символічних перетворень математичного пакету MathCAD. Проведено аналіз та педагогічну оцінку кожного із засобів. Запропоновано педагогічні прийоми та методи автоматизації символічного розв'язування математичних задач за допомогою математичного пакету MathCAD. Акцентовано особливу увагу на відмінності чисельного та символічного розв'язків.*

***Ключові слова:** символічна математика, символічні операції, символічний розв'язок, символічні математичні системи, навчальний процес, навчання математики.*

***Аннотация.** В статье исследованы возможности применения средств символической математики математического пакета MathCAD в учебном процессе и их влияние на содержание практических занятий по дисциплинам математического цикла. Подробно рассмотрены все средства символических преобразований математического пакета MathCAD. Проведен анализ и педагогическая оценка каждого из способов. Предложены педагогические приемы и методы автоматизации символического решения математических задач с помощью математического пакета MathCAD. Акцентировано особое внимание на различиях числового и символического решений.*

***Ключевые слова:** символическая математика, символические операции, символическое решение, символические математические системы, учебный процесс, обучение математике.*

***Annotation.** The article investigates the possibility of using of symbolic mathematical tools of mathematic package MathCAD in the learning process and their impact on the content of practical training in the disciplines of mathematical cycle. All means of character transformations of mathematical package MathCAD are considered in detail. The analysis and evaluation of*

teaching each of the tools is done. The authors offer teaching techniques and methods for automated symbolic solving mathematical problems using mathematical package MathCAD. Special attention is paid to the differences in numerical and symbolic solutions.

Keywords: *symbolic mathematics, symbolic operations, symbolic solutions, symbolic mathematical systems, learning process, teaching Mathematics.*

Розробка комп'ютерної підтримки курсів засобами мов програмування потребує дуже великих витрат часу та коштів, необхідність залучення професійного програміста. Створені таким чином програми придатні лише для розв'язання досить вузького класу задач. Ці розробки важко адаптувати до змін у навчальному плані. При цьому близько третини навчального часу відводиться на розгляд власне наукової проблеми, а інший час використовувався не раціонально – на побудову алгоритму, програмування, оптимізацію програми описаною мовою високого рівня.

З початком використання символічних математичних пакетів з'явилася можливість швидко розв'язувати поставлені задачі без кодування алгоритму, в їх математичному поданні, причому аналітично.

Також слід відмітити принципову різницю між чисельними та символічними методами. Результат роботи чисельних систем завжди конкретний – це число, вектор, матриця або графік – набір точок. Таким чином, за межами можливостей використання чисельних математичних систем залишилися великі розділи математики, пов'язані з проведенням аналітичних розрахунків – від простих підстановок до аналітичного опрацювання математичних виразів і функцій та введення у комп'ютер нових математичних закономірностей і співвідношень, тобто розділи символічних перетворень.

Дуже часто через нагромодження похибок, що є результатом заокруглення, чисельні методи дають неправильні результати, або навіть взагалі розбігаються. Умови, при яких це відбувається, не завжди відомі або їхня оцінка значно перевищує за складністю саму задачу, що розв'язується.

У першій половині 60–х років XX століття почався етап створення програм символічної математики для комп'ютерів [1]. З'явився новий науковий напрямок – комп'ютерна алгебра [2]. Він, безумовно, зацікавив математиків – розробників систем комп'ютерної алгебри.

Помітний розвиток одержали мови програмування для символічних обчислень Reduce і система muPAD для малих ЕОМ. В Україні була створена мова Аналітик [3]. Надалі почали створюватися інтегровані системи символічної математики [5] для персональних комп'ютерів Derive, MathCAD [4], Mathematica, Maple V тощо.

Проте не повністю досліджено педагогічні умови застосування символічної математики. В Україні над цим питанням працює школа

доктора педагогічних наук, професора, академіка НАПН України, заслуженого діяча науки і техніки України Жалдака Мирослава Івановича. Як відмічає акад. М. І. Жалдак: «Використання подібних програм дає можливість студентові розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. Студент, розв'язуючи задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їхньою будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує інші комп'ютерні програми, не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані, які теоретичні положення покладено в їхню основу» [6].

Введення в навчальний процес школи та ВНЗ засобів символної математики суттєво вплине на зміст практичних занять, в першу чергу, з математичного аналізу та алгебри. Зараз багато часу приділяється знаходженню інтегралів, похідних, сум та добутків, границь, якщо цей процес буде автоматизовано, то звільниться час для інших видів робіт.

Мета та завдання дослідження: розглянути можливості використання математичного пакету MathCAD у навчальному процесі школи та ВНЗ для символного розв'язування математичних задач.

Пакет MathCAD є найбільш зручним для використання у навчальному процесі як вищої, так і середньої школи. Символьні операції пакету MathCAD можна умовно розділити на дві групи: команди символної математики, які викликаються з меню Symbolics, або задаються ключовим словом з Symbolics keyword palette та режим оптимізації обчислень, який задається у пункті меню Math \Rightarrow Optimization, або за допомогою операторів Optimize та Literally.

На рис. 1 показані всі можливі варіанти розміщення результату при виконанні символних операцій. Для того, щоб відкрити вікно Evaluation Style, треба звернутися до верхнього меню Symbolics \Rightarrow Evaluation Style. Серед трьох радіокнопок «Vertically, inserting lines», «Vertically, without inserting lines», «Horizontally». Незалежні кнопки «Show Comments» та «Evaluate In Place» означають відповідно «показати коментар», тобто вказати, яке перетворення виконується, та «обчислити на місці», тобто замістити вираз результатом.

Розглянемо команди символної математики пакету MathCAD:

1) Символьне спрощення виразів (Simplify).

Команда «спростити» здійснює спрощення алгебраїчних виразів, застосовуючи основні алгебраїчні тотожності, та тригонометричних виразів, застосовуючи тригонометричні рівності і відношення між взаємно оберненими функціями. Для того, щоб скористатися цією командою, треба виділити вираз або підвираз, після чого звернутися до пункту меню Symbolics \Rightarrow Simplify.

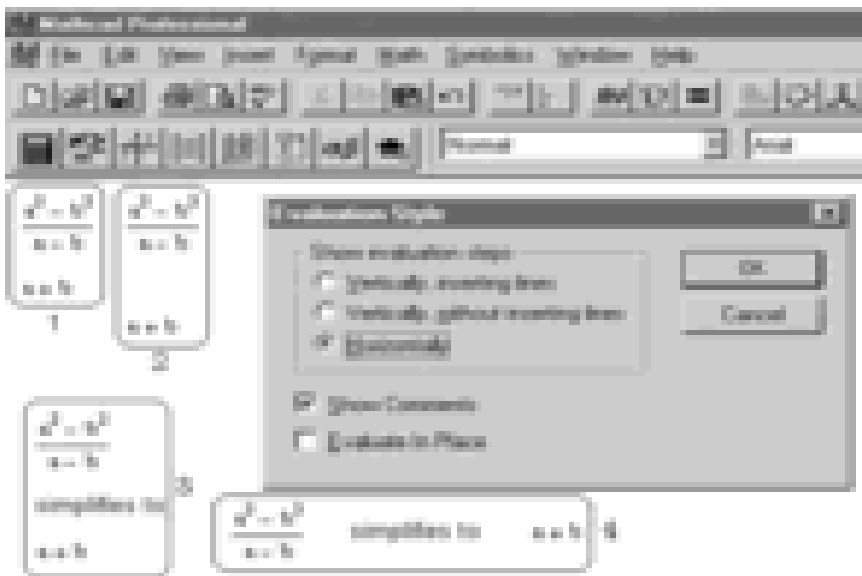


Рис. 1. Розміщення результату при виконанні символьних операцій

Значимо, що внесення змін у вираз після спрощення не впливає на результат, тому треба виділити новий вираз та повторити дії, описані вище. Зокрема, можна скористатись палітрою ключових слів Symbolics keyword palette, виділивши вираз, який підлягає спрощенню, викликати палітру ключових слів, вибрати з неї пункт. Для того, щоб спростити матрицю, потрібно окремо спростити кожен елемент матриці зазначеним вище чином.

2) Розкриття дужок (Expand Expression).

Ця команда розкладає вираз по степенях, перемножуючи співмножники при розкритті дужок. Для того, щоб використати цю команду потрібно виділити вираз до якого застосовуємо команду та звернутися до пункту меню Symbolics \Rightarrow Expand.

Якщо скористатися для розкриття дужок палітрою ключових слів Symbolics keyword palette, то необхідно буде вказати після ключового слова Expand змінну по якій треба проводити розклад.

3) Розклад на множники (Factor Expression).

Команда «розкласти на множники» намагається знайти представлення виділеного виразу у вигляді співмножників. Для того, щоб розкласти вираз на множники потрібно виділити цей вираз та звернутися до пункту меню Symbolics \Rightarrow Factor.

Потрібно відмітити, що Mathcad намагається розкласти на множники весь виділений вираз. Спроби розкладу на співмножники підвиразів не проводяться. Mathcad не розкладає на множники вираз, якщо він має константи з десятковими дробами.

4) Зведення спільних членів (Collect on Subexpression).

Команда «розкласти по під виразу» застосовується для перетворення виразів до вигляду многочлена по виділеній змінній.

Для того, щоб використати цю команду потрібно спочатку виділити ім'я змінної чи ім'я функції разом з аргументами, по яких буде утворюватися многочлен. Після вибору команди у пункті меню Symbolics \Rightarrow Collect, MathCad переписує вираз у вигляді многочлена по змінній чи функції.

Приклад застосування вищеописаної команди за допомогою палітри ключових слів Symbolics keyword palette :

$$(x^2 + 12) \cdot (x - 1) \cdot y + 100y \cdot x - 10x \text{ collect, } x \rightarrow y \cdot x^3 - y \cdot x^2 + (112y - 10) \cdot x - 12y$$

5) Знаходження коефіцієнтів многочлена (Polynomial Coefficients).

Якщо вираз представлений у вигляді многочлена відносно якої-небудь змінної чи якого-небудь підвиразу, можна знайти коефіцієнти цього многочлена. Для того, щоб знайти коефіцієнти, потрібно: виділити змінну чи підвираз, по яким буде побудований многочлен, вибрати команду «поліноміальні коефіцієнти» із меню «символіка». Mathcad створить вектор, який містить коефіцієнти відповідного многочлена. Першим елементом вектора є вільний член многочлена. Фактично дана команда виконує ті самі дії, що й попередня, але представлення результату дещо інше.

6) Символьне диференціювання (Differentiate on Variable).

Існує два способи знаходження символьного виразу для похідної: ввести вираз, що підлягає диференціюванню, виділити змінну і вибрати команду диференціювати за змінній Symbolics \Rightarrow Variable \Rightarrow Differentiate, або ввести з клавіатури «?» для того, щоб створити оператор диференціювання («Ctrl» + «Shift» + «?») для обчислення похідних вищих порядків), після чого ввести вираз, що підлягає диференціюванню, і змінну диференціювання у відповідні поля вводу.

Змінні, відмінні від змінної диференціювання, вважаються сталими.

Приклад диференціювання складного виразу :

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) \cdot e^{\frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}} \rightarrow 2 \cdot x \cdot \exp\left[\frac{(x^2 + y^2)}{(y \cdot x)}\right] + (x^2 + y^2) \cdot \left[\frac{2}{y} - \frac{(x^2 + y^2)}{(y \cdot x^2)}\right] \cdot \exp\left[\frac{(x^2 + y^2)}{(y \cdot x)}\right]$$

7) Символьне інтегрування (Integrate on Variable).

Існує два способи обрахунку інтегралу від деякого виразу: виділити змінну і вибрати команду інтегрувати за змінною Symbolics \Rightarrow Variable \Rightarrow Integrate, або ввести з клавіатури комбінацію клавіш Ctrl+i для того, щоб створити оператор обрахунку невизначеного інтегралу, чи «&» для створення оператора визначеного інтегралу, заповнити поля вводу для підінтегрального виразу і змінної інтегрування і обчислити інтеграл. Якщо символічний процесор не може знайти невизначений інтеграл або точне числове значення визначеного інтегралу, то інтеграл переписується без змін. У другому рядку береться невизначений інтеграл, а у третьому – невизначений інтеграл, у якого межі є символічними виразами за допомогою створення оператора обрахунку невизначеного інтегралу.

8) Символьний розв'язок одного рівняння (Solve for Variable).

Команда «розв'язати відносно змінної» використовується, щоб знайти точний розв'язок рівняння вигляду $f(x)=g(x)$, виражений через раціональні числа і константи π та e або числовий розв'язок з високою точністю.

Щоб розв'язати рівняння, потрібно: ввести ліву частину рівняння; ввести знак рівності комбінацією клавіш «Ctrl» + «=»; в утворене, після введення «Ctrl» + «=» поле, ввести праву частину рівняння; виділити змінну, відносно якої потрібно розв'язати рівняння; вибрати команду «розв'язати відносно змінної». Нерівності розв'язуються точно таким же методом, за виключенням того, що замість знака рівності «Ctrl» + «=» потрібно використовувати знаки нерівності «>», «<», «Ctrl» + «(«чи «Ctrl» +)».

9) Оптимізація.

Режим оптимізації обчислень задається у пункті меню Math \Rightarrow Optimization для всього документу, або ж, якщо треба почати застосування оптимізації з деякої частини документу, застосовується оператор Optimize. Всі вирази, розташовані нижче цього оператора, будуть оптимізовані. Оператор Literally відміння оптимізацію наступного за ним виразу при включеному режимі Optimize.

При виключеному режимі оптимізації обчислення проводяться строго згідно тих формул, які ввів користувач. При включеному режимі оптимізації символічний процесор пакету MathCad аналізує кожну формулу, та намагається її оптимізувати, тобто замінити більш простим виразом. Якщо символічному процесору вдалося оптимізувати вираз, то праворуч виразу з'являється червона шестикутна зірочка. Тепер розрахунки ведуться не за вказаною користувачем формулою, а за оптимізованою формулою, яку вдалося знайти пакету. На рис. 2 показано оптимізацію двох виразів.

Цю оптимізовану формулу можна побачити два рази клацнувши мишкою на зірочці. Відкривається вікно Optimized Result, у якому зображена формула. Цю формулу можна перенести в основний документ, наприклад, для того, щоб явно замінити стару формулу.

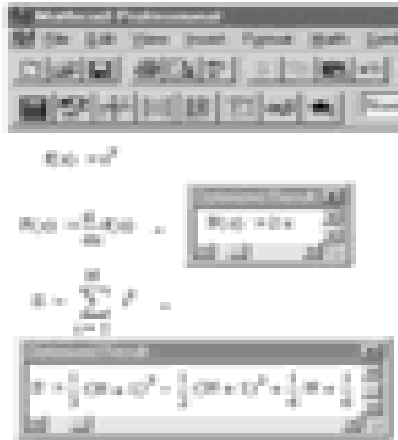


Рис. 2. Оптимізація двох варіантів обчислень

Висновки. Математика безупинно розвивається, і жодна людина не в змозі запам'ятати всі математичні закони і правила, створені за всю історію математики. Немає нічого страшного в тім, що обчислення похідних чи первісних функцій в аналітичному вигляді буде автоматизоване.

Підводячи підсумок проведеного дослідження, зазначимо, що математичні системи – не більш, ніж зручний і потужний інструмент для педагога, інженера, науковця. Як його застосовувати у методичному, науковому і практичному відношенні, залежить вже від користувача системи. Наприклад, використовуючи системи символічної математики, студенти легше долають психологічний бар'єр в реальному застосуванні математики, особливо вищої, а інженери та вчені автоматизують процес розв'язування складних математичних задач.

1. Барри Саймон. Символическая математика: новые времена – новые формы. PC Magazine // Russian Edition. – 1992. – № 5. – С. 42–50.
2. Акритас А. Основы компьютерной алгебры. Пер. с англ. Е. В. Панкратьева. – М. : Мир, 1994. – 150 с.
3. Глушков В. М. Аналитик – алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований / В. М. Глушков, В. Г. Бондарчук, Т. А. Гривченко // Кибернетика. 1971. № 3.
4. Дьяконов В. П. Система MathCAD. Справочник. – М. : Радио и связь, 1993. – 250 с.
5. Дьяконов В. П. Как выбрать математическую систему? Монитор–Аспект. – 1993. – № 2.
6. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К. : Техніка, 1997. – 303 с.: іл.

Рецензент: д.пед.н., професор І. В. Поташнюк.