УДК 51(07)

Вікторія Коноплязаказ,
Світлана Гончарова

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

В сучасній літературі є багато матеріалів про числа Фібоначчі, золотий переріз та їх застосування, але в школі ці питання не розкриваються в урочний час, а у вузівській практиці при підготовці вчителя математики дане питання носить лише оглядовий характер. Навчання в педагогічному вузі на математичних спеціальностях має на меті підготовку конкурентоспроможного вчителя, готового до розвитку творчих здібностей учнів, вчителя-математика, який має сформовану на високому рівні математичну компетентність. Тому вчитель математики має володіти знаннями не лише з основних розділів математики, але і бути обізнаним у тих питаннях, які викликатимуть інтерес в учнів до навчання предмету, тоді учні будуть прагнути до самоосвіти, до збагачення рівня своїх знань в позаурочний час.

Математична наука має величезний запас матеріалу, який буде цікавий як студентам-математикам, так і учням школи. Однією з таких тем ми обрали числа Фібоначчі та їх застосування до задач геометрії на прикладі формули Біне. Матеріал можна використати на факультативних заняттях математики або на гуртках для підвищення зацікавленості учнів математикою. Адже числа Фібоначчі та золота пропорція є «діамантами» математики.

У праці Н. Н. Воробйова «Числа Фібоначчі» [1] на високому рівні викладено загальні теоретичні відомості наукових досліджень стосовно чисел Фібоначчі і наведено безліч прикладів з природи та будови тіла людини, де спостерігаються закономірності чисел Фібоначчі та золота пропорція.

У праці О. В. Кужель «Узагальнена формула Біне та її застосування» [3] детально розглянуто властивості чисел Фібоначчі, обґрунтовано формулу Біне, розглянуто аналог формули Біне та застосування формули Біне.

У статті В. Слісаренко [4] на високому рівні викладено загальні теоретичні відомості стосовно введення чисел Фібоначчі за допомогою задачі про кролів, поняття золотої пропорції, історію золотої пропорції, золота пропорція в геометрії та наведено приклади з життя, де спостерігаються числа Фібоначчі та золота пропорція.

Відкритим залишається питання, чому таку цікаву інформацію не вивчають (або згадують про неї дуже стисло) в школі та при підготовці вчителя математики, адже знання про числа Фібоначчі, золотий переріз та їх застосування в природі, науці та мистецтві, безсумнівно можуть збагатити кожного з нас.

Тому, виходячи з пріоритетів сучасної вищої та середньої школи, що націлені на розвиток та виховання перш за все високоосвіченої та творчої особистості, ми вирішили розкрити зв'язок між числами Фібоначчі та геометрією, продемонструвати його на прикладі задач та запропонувати даний матеріал для використання на математичних факультативах та гуртках з метою підвищення зацікавленості учнів математикою.

Мета публікації: Показати приклади застосування чисел Фібоначчі в геометрії і продемонструвати використання формули Біне на факультативних та гурткових заняттях з математики.

Виходячи з власного досвіду викладання різних дисциплін на математичних спеціальностях педагогічного університету, можна, на превеликий жаль, констатувати той факт, що більшість майбутніх учителів лише чули про числа Фібоначчі, а який зміст вони в собі несуть, де мають застосування не знають взагалі. Ці прогалини в знаннях пропонуємо виправити шляхом введення в шкільний курс математики, вивчення теми «Числа Фібоначчі та їх застосування» на факультативних заняттях.

Дана тема охоплює дуже великий обсяг матеріалу, тому в цій статті ми обмежимося лише темою «Застосування чисел Фібоначчі до задач геометрії».

Числами Фібоначчі називають елементи послідовності 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ..., кожен член якої, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Отже, якщо u_n – n-й член послідовності, то $u_1=1$, $u_2=1$ і при $n\geq 2$ елементи u_{n-1}, u_n та u_{n+1} пов'язані рекурентними співвідношеннями $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Такі числа вперше розглядав, досліджуючи питання про розмноження кролів, італійський математик Леонардо Пізанський (біля 1170 – після 1228 рр.), більше відомий як Фібоначчі. Перші 14 чисел Фібоначчі вперше у 1228 р. виписано в рукописі Леонардо Пізанського.

Числам Фібоначчі притаманні цікаві співвідношення:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1,$$

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n},$$

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1,$$

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1},$$

$$u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1} = u_{m+n},$$

$$u^2_{n+1} = u_n u_{n+2} + (-1)^n,\ (u_m, u_n) = u_{(m,n)},$$

де (m, n) – найбільший спільний дільник чисел m та n.

Особливу роль при вивченні властивостей чисел Фібоначчі відіграє формула $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, яку називають формулою Біне (Жак Біне (1786–1856 рр.) – французький математик і астроном).

Існують різні способи обґрунтування цієї формули. Ми ж просто перевіримо, що числа u_n, які визначаються рівністю задовольняють рекурентне співвідношення. Справді, при $n=1$ і $n=2$, $u_1=1$, $u_2=1$. Якщо ж $n>2$, то

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right],$$

де $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$

Але тоді права частина формули дорівнює u_{n+1} і, отже, члени послідовності $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ задовольняють рекурентне співвідношення, тобто збігаються з відповідними членами послідовності чисел Фібоначчі [3].

Золота пропорція. Послідовність Фібоначчі асимптотично (наближається все повільніше і повільніше) прямує до деякого сталого відношення. Проте це відношення ірраціональне, тобто є числом з нескінченною непередбачуваною послідовністю десяткових цифр у дробовій частині. Його неможливо виразити точно.

Якщо який-небудь член послідовності Фібоначчі розділити на попередній (наприклад, *13:8*), то результатом буде число, що наближено дорівнює ірраціональному значенню *1,61803398875...* Але навіть витративши на обчислення все життя, його неможливо знайти до останньої десяткової цифри. Округливши його до тисячних, матимемо *1,618*.

Особливі назви цьому відношенню почали давати ще до того, як Лука Пачолі (середньовічний математик) назвав його золотою пропорцією. Серед його сучасних назв є такі, як золотий переріз та золотий середній. В алгебрі загальноприйняте його позначення грецькою буквою $\varphi = 1,618$.

Асимптотична поведінка послідовності, затухаючі коливання її відношення біля ірраціонального числа φ можуть стати зрозумілішими, якщо показати відношення кількох перших членів послідовності:

1:1 = 1,0000, що менше за φ на *0,6180*;
2:1 = 2,0000, що більше за φ на *0,3820*;
3:2 = 1,5000, що менше за φна *0,1180*;
5:3 = 1,6667, що більше за φ на *0,0486*;
8:5 = 1,6000, що менше за φ на *0,0180*, і т.д.

Виконуючи такі самі дії, бачитимемо, що кожен член ділитиметься на наступний зі все більшим і більшим наближенням до недосяжного φ [4].

Золота пропорція в геометрії. І. Кеплер (1571–1630) говорив, що геометрія має два скарби – теорему Піфагора і золотий переріз. І якщо перше з цих двох скарбів можна порівняти із золотом, то друге – з коштовним каменем. Теорему Піфагора знає кожен школяр, а що таке золота пропорція – далеко не всі.

Людина розрізняє оточуючі її предмети за формою. Інтерес до форми якого-небудь предмета може бути викликаний життєвою необхідністю або красою форми. Форма, в основі побудови якої лежить поєднання симетрії та золотого перерізу, сприяє якнайкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси й гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини знаходяться в певному відношенні один до одного і до цілого. Принцип золотого перерізу – це найвищий прояв структурної та функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці та природі. Золотий переріз – це гармонійна пропорція.

У математиці пропорцією називають рівність двох відношень.

Відрізок прямої *AB* можна розділити точкою С на дві частини такими двома способами:

1) на дві рівні частини *AB: AC = AB: BC;*

2) на дві нерівні частини в будь-якому відношенні (такі частини пропорції не утворюють);

Якщо *AB:AC = AC:BC,* то такий поділ відрізка буде золотим перерізом або діленням відрізка в крайньому та середньому відношенні.

Золотий переріз – це таке пропорційне ділення відрізка на нерівні частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як більша частина відноситься до меншої; або менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього (рис. 1):
$a:b = b:c$ або $c: b= b: a$.

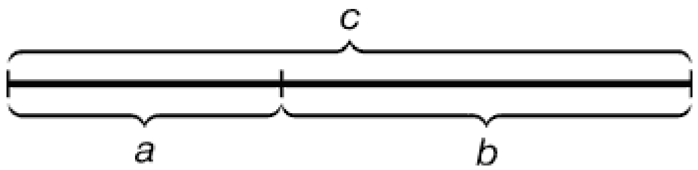

Рис. 1. Золотий переріз

Прямокутник з таким відношенням сторін стали називати золотим прямокутником. Він також має цікаві властивості. Якщо від нього відрізати квадрат, то залишиться знову золотий прямокутник. Цей процес можна продовжувати до нескінченності. А якщо проводити діагоналі попереднього і наступного прямокутника, то точка їх перетину належатиме всім отримуваним золотим прямокутникам.

Є і золотий трикутник. Це рівнобедрений трикутник, у якого відношення довжини бічної сторони до довжини основи дорівнює *1,618.*

Золотий кубоїд – прямокутний паралелепіпед з ребрами, що мають довжини *1,618* і *0,618*.

У зірчастому п’ятикутнику кожна з п’яти ліній, що утворюють фігуру, ділить іншу у відношенні золотого перерізу, а кінці зірки є золотими трикутниками [4].

Розглянемо задачу на використання формули Біне до розв’язування задач геометрії.

Задача. В одиничне півколо вписано коло радіуса $r_0 = 1/2$. Потім послідовно вписуються кола, які дотикаються діаметра півкола, його дуги та попереднього вписаного кола. Нехай $R_n = 1/r_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, де r_n – радіус n-го кола. Довести, що $R_n = 1+\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$. *(1)*

Більш того, як буде показано, $R_n = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]^2$. *(2)*

Розв'язання. Нехай O – центр півкола, O_n – центр n-го вписаного кола, A_n та B_n – точки його дотику до діаметра та дуги півкола і $O_{n+1}C_n \perp O_nA_n$ (рис. 2). З $\Delta O_{n+1}O_nC_n$, враховуючи співвідношення

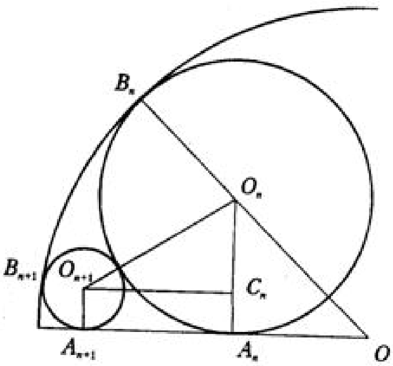

Рис.2. Почергово вписані кола

$A_nA_{n+1} = O_{n+1}C_n$,

$O_{n+1}O_n = r_n + r_{n+1}$,

$O_nC_n = r_n - r_{n+1}$,

отримуємо рівність

$A_{n+1}A_n = \sqrt{\left(r_n+r_{n+1}\right)^2-\left(r_n-r_{n+1}\right)^2} = 2\sqrt{r_nr_{n+1}}$. *(3)*

З іншого боку, розглядаючи ΔA_nO_nO та $\Delta A_{n+1}O_{n+1}O$, бачимо, що

$A_nO = \sqrt{\left(1-r_n\right)^2-r_n^{\,2}} = \sqrt{1-2r_n}$, $A_{n+1}O = \sqrt{1-2r_{n+1}}$.

Але тоді $A_{n+1}A_n = A_{n+1}O - A_nO = \sqrt{1-2r_{n+1}}-\sqrt{1-2r_n}$ *(4)*

Отже, на підставі рівностей *(3)* та *(4)* $\sqrt{1-2r_{n+1}}-\sqrt{1-2r_n} = 2\sqrt{r_nr_{n+1}}$, звідки після піднесення до квадрату маємо

$\sqrt{\left(1-2r_n\right)\left(1-2r_{n+1}\right)} = 1-\left(r_n+r_{n+1}\right)-2r_nr_{n+1}$.

Підносячи обидві частини цієї рівності до другого степеня та зводячи подібні, одержуємо таке співвідношення:

$(1+2r_n)^2r_{n+1}^2 + 2r_n(2r_n-3)r_{n+1}+r_n^2 = 0.$ *(5)*

Ліва частина в *(5)* упорядкована за степенями r_{n+1}. Цей же вираз можна упорядкувати й за степенями r_n :

$(1+2r_{n+1})^2r_n^2 + 2r_{n+1}(2r_{n+1}-3)r_n+r_{n+1}^2 = 0.$ *(6)*

Замінивши в *(6)* n на $n-1$, дістанемо таке співвідношення:

$(1+2r_n)^2r_{n-1}^2 + 2r_n(2r_n-3)r_{n-1}+r_n^2 = 0.$ *(7)*

Розглядаючи рівності *(5)* та *(7)*, бачимо, що r_{n+1} та r_{n-1} є коренями квадратного рівняння $((1+2r_n)^2x^2 + 2r_n(2r_n-3)x+r_n^2 = 0.$

Але тоді за формулами Вієта $r_{n+1}+r_{n-1} = \frac{2r_n\left(3-2r_n\right)}{\left(1+2r_n\right)^2}$, $r_{n+1}r_{n-1} = \frac{r_n^{\,2}}{\left(1+2r_n\right)2}$,

З останніх двох рівностей випливає $r_n(r_{n+1}+r_{n-1})-(6-4r_n)r_{n+1}r_{n-1}$.

Розділимо обидві частини цієї рівності на добуток $r_{n+1}r_{n-1}$. Тоді, враховуючи рівність $R_k = \frac{1}{r_n}$ (див. формулювання задачі), маємо таке співвідношення: $R_{n-1}+R_{n+1} = 6R_n-4 = 6(R_n-1)+2$ *(8)*

Нехай $v_k = R_k-1$. Тоді рівність *(8)* перепишеться у вигляді $v_{n+1} = 6v_n-v_{n-1}$ *(9)*

Отже, $v_0, v_1, v_2,\ldots$ є рекурентною послідовністю другого порядку. Тому загальний член цієї послідовності v_n можемо обчислити за формулою Біне. При цьому $r_0 = \frac{1}{2}$ і, отже, $a=v_0=R_0-1=\frac{1}{r_0}-1=1$

З рівності *(5)* при $n=0$ знаходимо $r_1=\frac{1}{4}$. Тому $b=v_1=3$. Крім того, на підставі *(9)* $\alpha=3$, $\beta=-1$. Але тоді $\gamma=0$ і, отже,

$$v_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right], \quad (10)$$

що й доводить рівність *(1)*.

Щоб обґрунтувати рівність *(2),* досить помітити, що

$$3 \pm 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2, \left(\sqrt{2}+1\right)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^n = 1 \quad (11)$$

Тоді на підставі *(1)* і *(11)*

$$2R_n = 2\left(\sqrt{2}+1\right)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^n + \left(\left(\sqrt{2}+1\right)^n\right)^2 + \left(\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right)^2 = \left[\left(\sqrt{2}+1\right)^n + \left(\sqrt{2}-1\right)^n\right]^2$$

що й доводить рівність *(2)* [3].

Щоб стати успішними людьми, учні мають набути в школі компетентності в різних сферах людського життя, навчитися здобувати знання самостійно і застосовувати їх. Вивчення теми «Застосування чисел Фібоначчі до задач геометрії» дозволить їм не тільки глибше зануритися в математику, а й навчить застосовувати знання на практиці, сприятиме досягненню учнями високого рівня математичної підготовки, який характеризується, в першу чергу, вмінням розв’язувати нестандартні задачі, які розвивають стійкий пізнавальний математичний інтерес; створення умов для інтелектуального, морального розвитку і саморозвитку учнів.

Проведене дослідження застосування чисел Фібоначчі в геометрії дає змогу виокремити напрями подальших досліджень:

– з’ясування методів активізації пізнавальної діяльності учнів шляхом зацікавлення їх вивченням цікавих закономірностей та задач з математики;
– дослідження можливості створення комп’ютерної підтримки навчання шкільної геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1983. – 144 с.
2. Васютинский Н. А. Золотая пропорция / Н. А. Васютинский. – М. : Молодая гвардия, 1990. – 238 с.
3. Кужель О. В. Узагальнена формула Біне та її застосування / О. В. Кужель // У світі математики. – К. : Видавництво: ТВіМС, 1997. – Том 3, випуск 3. – С. 52–59.
4. Слюсаренко В. Числа Фібоначчі та золота пропорція / Віктор Слюсаренко // Математика. – К. : Вид. дім «Шкільний світ», 2008. – № 8(452). – С. 18–24.