

УДК 539.3

В.А. Сало, д-р техн. наук,
 П.И. Литовченко, канд. техн. наук,
 И.В. Чижиков

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С ОТВЕРСТИЕМ

Постановка проблемы и анализ последних исследований. Упругие оболочки, ослабленные отверстиями, являются одними из наиболее ответственных элементов, от прочности которых нередко зависят работоспособность и надежность исследуемой конструкции в целом. Ввиду тенденции расширения области применения многосвязных оболочек в современной технике разработка научно обоснованных методов получения достоверных результатов расчетов на прочность и жесткость оболочек с концентраторами напряжений является актуальной и практически значимой научной задачей. Обзор и анализ современного состояния проблемы определения напряженно-деформированного состояния в оболочках с отверстиями произвольных форм и размеров позволяет сделать вывод о том, что существующие методы расчета таких оболочек обычно основаны на упрощенных математических моделях.

Предлагаемый вариационный метод исследований. В научной монографии [1] предложен научно обоснованный и численно реализованный автором эффективный RVR-метод решения в трехмерной постановке краевых задач определения напряженно-деформированного состояния статически нагруженных упругих оболочек, ослабленных одним, несколькими, периодическими или двоякопериодическими системами отверстий. Указанный метод применим для оболочек произвольной толщины и основан на использовании вариационного принципа Рейсснера [2], теории R-функций [3] и метода И.Н. Векуа [4].

Постановка краевой задачи и метод ее решения. Покажем эффективность использования RVR-метода в задаче исследования напряженно-деформированного состояния ослабленной по технологическим соображениям прямоугольным вырезом с закруглениями упругой цилиндрической панели равномерно вращающегося ротора. Рассматриваемый ротор конструктивно выполнен из жестких цилиндрических элементов, соединенных между собой тонкостенными планками (цилиндрическими панелями). Основной нагрузкой, воспринимаемой вращающейся панелью, является равномерно распределенная нагрузка от центробежных сил интенсивности

$$q = \rho \omega^2 R h, \quad (1)$$

где ρ и ω - плотность материала и угловая скорость вращения упругой оболочки; h и R - толщина оболочки и радиус кривизны ее срединной поверхности.

Рассмотрим упругое равновесие цилиндрической панели, положение точки в которой определяем цилиндрической системой координат X, Y, Z , введенной на срединной поверхности оболочки (координатная ось X направлена вдоль образующей цилиндра). В плане исследуемая упругая область представляет собой прямоугольную пластину (рис. 1), определение напряженно-деформированного состояния которой сводится (ввиду симметрии панели относительно плоскостей $x = 0, y = 0$) к расчету периодического участка $ABCDEF$.

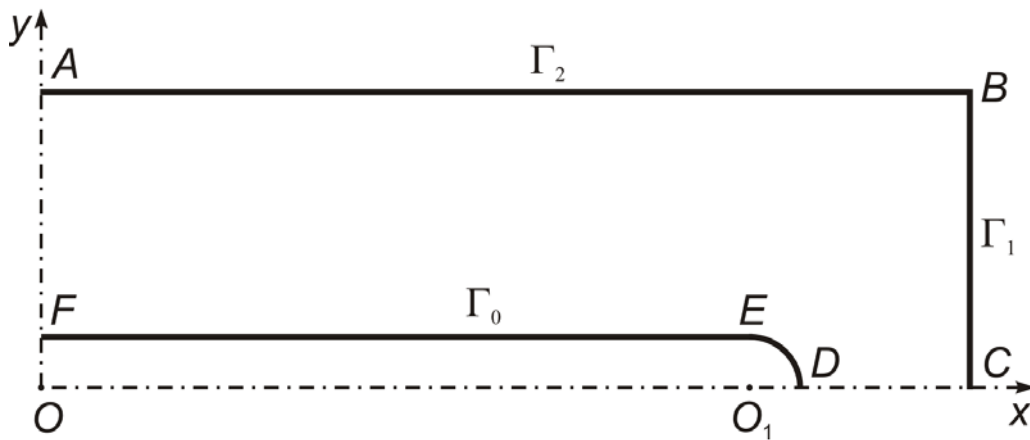


Рисунок 1 – Исследуемая область периодического участка панели

Пусть $AB = a, BC = b, OO_1 = c, O_1D = r_1, O_1E = d = r_2$. Разобьем границу расчетной упругой области $ABCDEF$ на элементы Γ_0 (контур отверстия DEF), Γ_1 (контур BC) и Γ_2 (контур AB). При этом функции ω_1 и ω_2 , определяющие уравнения границ Γ_1 и Γ_2 соответственно, имеют вид

$$\omega_1 = 1 - (x/a)^2; \quad \omega_2 = 1 - (y/b)^2, \quad (2)$$

а функция ω_0 ($\omega_0 = 0$ - уравнение контура Γ_0 прямоугольного выреза с закруглениями) определяется с помощью R -операций [3] по формуле

$$\omega_0 = \omega_3 \vee_0 \omega_4 \wedge_0 (\omega_5 \omega_6), \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= (x/c)^2 - 1; & \omega_5 &= [(x-c)/r_1]^2 + (y/r_2)^2 - 1; \\ \omega_4 &= (y/d)^2 - 1; & \omega_6 &= [(x+c)/r_1]^2 + (y/r_2)^2 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Структура решений краевой задачи исследуемой панели. Для приближенного решения поставленной краевой задачи воспользуемся обобщенным вариационным принципом Рейсснера, в котором независимо друг от друга варьируются как вектор перемещений \mathbf{u} , так и тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. В качестве искомым функций в случае использования теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [5] рассмотрим независимые между собой обобщенные перемещения и обобщенные усилия:

$$u, v, w, \gamma_1, \gamma_2 \text{ и } N_x, N_y, S, M_x, M_y, H, Q_x, Q_y, \quad (5)$$

где u, v, w - перемещения точки срединной поверхности упругой оболочки; γ_1 и γ_2 - углы поворота нормального к срединной поверхности волокна в плоскостях (xz) и (yz) ; N_x, N_y и S - нормальные и сдвигающее усилия; M_x, M_y и H - изгибающие и крутящий моменты; Q_x, Q_y - перерезывающие усилия.

Считая контуры Γ_0 и Γ_2 свободными от внешних усилий и моментов, а контур Γ_1 жестко защемленным, запишем граничные условия рассматриваемой краевой задачи, сформулированные через обобщенные перемещения и усилия (5), в виде

$$\text{на контуре } \Gamma_0 \quad N_{vv} = N_{v\tau} = M_{vv} = M_{v\tau} = Q_n = 0; \quad (6)$$

$$\text{на контуре } \Gamma_1 \quad u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad (7)$$

$$\text{на контуре } \Gamma_2 \quad N_y = S = M_y = H = Q_y = 0. \quad (8)$$

Формулы, связывающие приведенные в условиях (6) внутренние усилия и моменты $N_{vv}, N_{v\tau}, \dots, Q_n$ в наклонных сечениях контура Γ_0 (рис. 1) и сечениях $x = \text{const}, y = \text{const}$ (обобщенные усилия N_x, N_y, \dots, Q_y), имеют согласно работе [1] вид

$$\left. \begin{aligned} N_{vv} &= f_1^2 N_x + 2f_1 f_2 S + f_2^2 N_y; \\ N_{v\tau} &= f_1 f_2 (N_y - N_x) + (f_1^2 - f_2^2) S; \\ M_{vv} &= f_1^2 M_x + 2f_1 f_2 H + f_2^2 M_y; \\ M_{v\tau} &= f_1 f_2 (M_y - M_x) + (f_1^2 - f_2^2) H; \\ Q_n &= f_1 Q_x + f_2 Q_y. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь функции f_1 и f_2 , которые являются направляющими косинусами направленной внутрь отверстия нормали ν контура границы Γ_0 , определяются аналитическими выражениями

$$f_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial x}; \quad f_2 = \frac{\partial \omega_0}{\partial y}. \quad (10)$$

Структура решения краевой задачи, точно удовлетворяющего сформулированным граничным условиям (6) – (8), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{1m} P_{2i+1} P_{2j}; \\ v &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{2m} P_{2i} P_{2j+1}; \\ w &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{3m} P_{2i} P_{2j}; \\ N_x &= f_2^2 \Phi_1 \omega_2 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{1m} P_{2i} P_{2j}; \\ N_y &= f_1^2 \Phi_1 \omega_2 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{2m} P_{2i} P_{2j}; \\ S &= -f_1 f_2 \Phi_1 \omega_2 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{3m} P_{2i+1} P_{2j+1}; \\ &\dots \\ Q_x &= f_2 \Phi_3 \omega_2 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{7m} P_{2i+1} P_{2j}; \\ Q_y &= -f_1 \Phi_3 \omega_2 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{8m} P_{2i} P_{2j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выражения для искоемых функций $\gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H$ в структуре (11) будут такими же, как и выражения для u, v, N_x, N_y, S , если в последних $A_{1m}, A_{2m}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, \Phi_1$ соответственно заменить на $A_{4m}, A_{5m}, B_{4m}, B_{5m}, B_{6m}, \Phi_2$. Функции ω_j ($i = 0, 1, 2$) имеют вид (2) и (3), функции f_1 и f_2 вычисляются по формулам (10):

$$f_3 = 1 - f_1^2; \quad f_4 = 1 - f_2^2. \quad (12)$$

При этом $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{5m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{8m}$ - постоянные, подлежащие определению; P_i и P_j - ортогональные полиномы Лежандра степени i и j относительно переменных x и y соответственно; $m = i(n_2 + 1) + j + 1$; вид координатных последовательностей Φ_k ($k = \overline{1, 3}$) определяется формулой

$$\Phi_k = \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_4} \Phi_{kt} P_{2i} P_{2j}, \quad (13)$$

где Φ_{kt} - постоянные, подлежащие определению; $t = i(n_4 + 1) + j + 1$.

После подстановки структуры решений (11) в вариационное уравнение Рейсснера [2] и вычисления по квадратурным формулам Гаусса соответствующих интегралов решение сформулированной краевой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно искоемых постоянных.

Результаты расчета конкретной прикладной задачи. Компьютерный расчет выполнен для цилиндрической изотропной панели ротора со следующими физико-геометрическими параметрами:

$$\left. \begin{aligned} E_x = E_y = 19,4 \text{ ГПа}; & \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,3; \\ G_{xy} = 0,5E_x / (1 + \nu_1); & \quad \rho = 7,85 \text{ г/см}^3; \\ h = 4 \text{ мм}; \quad b = 17,5 \text{ мм}; & \quad r_1 = r_2 = 2 \text{ мм}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Численные расчеты выполнены для двух вариантов:

$$1. R = 9,2 \text{ см}; \quad a = 6,25 \text{ см}; \quad c = 5 \text{ см}. \quad (15)$$

$$2. R = 10,3 \text{ см}; \quad a = 8,5 \text{ см}; \quad c = 7,3 \text{ см}. \quad (16)$$

В табл. 1 для вариантов (15) и (16) представлены значения безразмерного напряжения

$$\sigma_{\max}^* = \max \left\{ \left| \sigma_1^* \right|, \left| \sigma_2^* \right| \right\} \quad (17)$$

в точках A, B, C, D, E, F (рис. 1) на внешней (числитель) и внутренней (знаменатель) поверхностях расчетного участка упругой цилиндрической панели.

Приведенные главные напряжения σ_i^* ($i = 1, 2$) имеют вид

$$\sigma_i^* = \frac{h}{qR} \sigma_i. \quad (18)$$

Таблица 1 – Значения напряжения σ_{\max}^* в некоторых точках панели

Номер варианта	A	B	C	D	E	F
1	$\frac{4,174}{12,49}$	$\frac{8,398}{22,89}$	$\frac{9,660}{8,577}$	$\frac{3,089}{6,034}$	$\frac{6,886}{3,735}$	$\frac{5,783}{2,229}$
2	$\frac{7,368}{20,72}$	$\frac{14,49}{37,19}$	$\frac{14,64}{12,91}$	$\frac{5,111}{11,60}$	$\frac{12,31}{6,355}$	$\frac{10,22}{5,826}$

На рис. 2 для варианта 1 (15) построена упругая поверхность расчетного участка. По оси Z отложены значения прогиба W , а возле точек A, D и F приводятся числа (при $n = 1000$ об/мин), соответствующие значениям W (в микронах) в этих точках для вариантов 1 (числитель) и 2 (знаменатель).

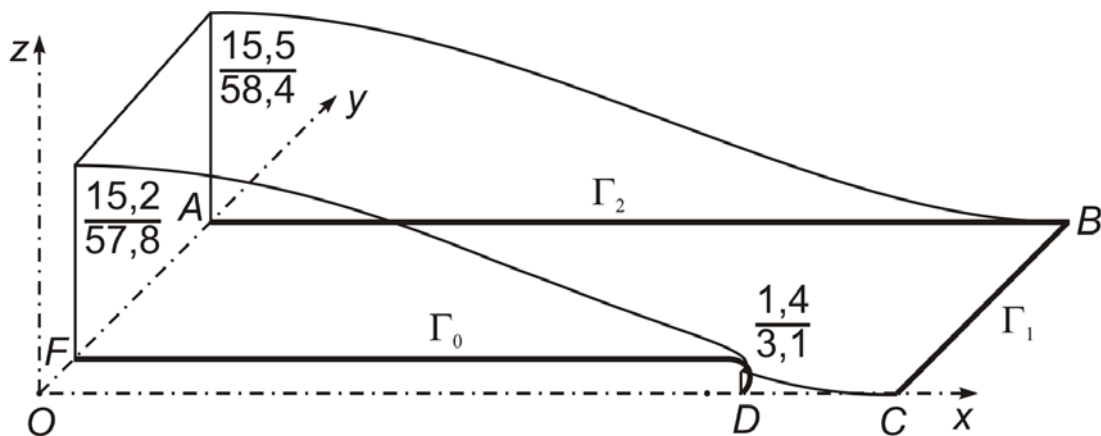


Рисунок 2 – Упругая поверхность расчетного участка панели

Выполненные расчеты показали, что окрестность угловой точки B жестко заземленного контура Γ_1 - наиболее напряженная область исследуемого участка упругой панели. В точке B на внутренней поверхности панели главное напряжение σ_1 (при $\sigma_1 \geq \sigma_2, \sigma_3 = 0$) и в точке A прогиб W достигают своих максимальных значений. Так, в табл. 2 в числителях и знаменателях для вариантов (15) и (16) соответственно при-

ведены значения W_{\max} (микроны) и $\sigma_{1\max}$ (МПа) при различных величинах угловой скорости n вращения исследуемого ротора.

Таблица 2 – Значения W_{\max} и $\sigma_{1\max}$ при различных величинах n

n , об/мин	1000	2000	3000	4000	5000
W_{\max} , мк	$\frac{15,50}{58,35}$	$\frac{62,00}{233,4}$	$\frac{139,5}{525,2}$	$\frac{248,0}{933,6}$	$\frac{387,5}{1459}$
$\sigma_{1\max}$, МПа	$\frac{16,9}{34,4}$	$\frac{67,5}{137}$	$\frac{152}{309}$	$\frac{270}{540}$	$\frac{422}{860}$

Ввиду линейной постановки задачи искомые функции (11) пропорциональны квадрату угловой скорости (1), поэтому, имея результаты для конкретного значения n , довольно просто получить количественную информацию о напряженно-деформированном состоянии оболочки для произвольной величины угловой скорости n .

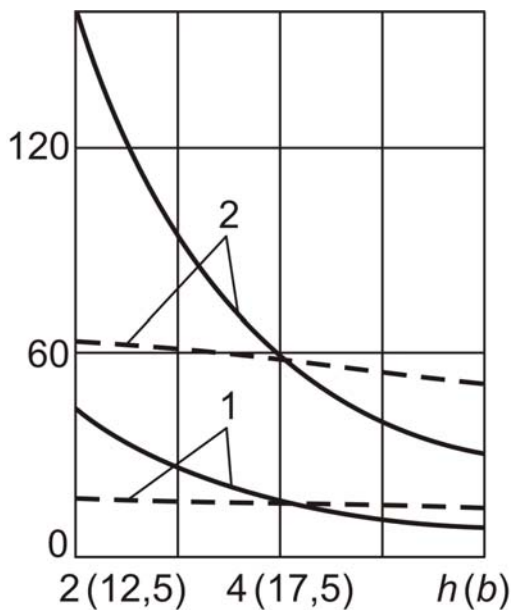


Рисунок 3 – Графики зависимости максимального прогиба W_{\max}

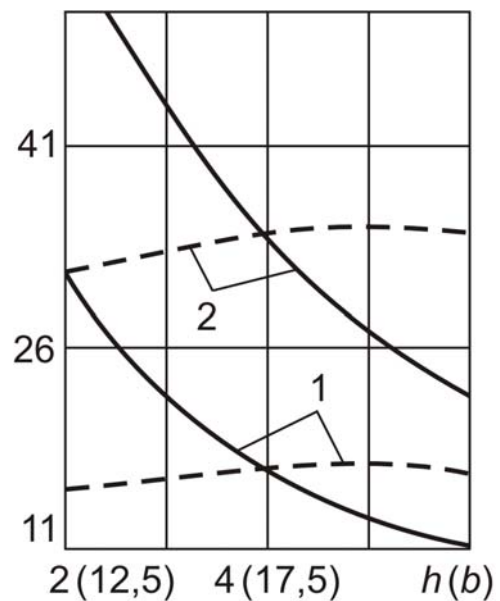


Рисунок 4 – Графики зависимости главного напряжения $\sigma_{1\max}$

На рис. 3 и 4 для вариантов 1 (15) и 2 (16) показаны графики зависимости прогиба W_{\max} и главного напряжения $\sigma_{1\max}$ (при $n = 1000$ об/мин) в зависимости от величины толщины цилиндрической панели h (сплошные линии) и параметра b (штриховые линии). Из рисунков следует, что изменение толщины h оказывает на напряженно-деформированное состояние панели более сильное влияние, чем изменение параметра b .

Выводы

Успех в расчетах напряженно-деформированного состояния оболочек определяется не только обоснованностью расчетных схем и возможностями принятой уточненной модели оболочки, но и уровнем реализации используемого метода при решении конкретных и значимых в прикладном отношении классов задач. Эффективность и возможности предложенного RVR-метода [1] подтверждены решением ряда сложных задач для конструктивных элементов, использующихся в различных отраслях техники. При этом в случае программной реализации апостериорной интегральной оценки численных результатов [6] процесс сходимости решения имеет устойчивый характер, а осуществляемая на компьютере постоянная оценка приближенного решения позволяет автоматизировать поиск в структуре (11) такого числа аппроксимаций, при котором результаты имеют достоверный характер.

Полученные в настоящей работе результаты численных исследований могут представлять интерес для инженерной практики при расчете упругих цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями произвольной величины и конфигурации.

Список использованных источников

1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями / В.А. Сало.– Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
2. *Reissner E.* On a variational theorem in elasticity / *E. Reissner* // J. Math. and Phys., 1950. – Vol. 29, № 2. – P. 90-95.
3. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1974.
4. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И.Н. Векуа. – М.: Наука, 1982. – 285 с.
5. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех. К.: Наук. думка, 1973.
6. Сало В.А. Расчет прочности оболочечных элементов конструкций и оценка достоверности результатов / В.А. Сало, П.И. Литовченко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Х.; 2010. – Вып. 2 (62). – С. 7–14.

Поступила в редакцию 20.01.2011.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*