УДК 539.3 А.И. Соловьев, канд. физ.-мат. наук

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Имеется лишь небольшое число публикаций, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство связано с существенными математическими трудностями построения эффективных общих решений уравнений равновесия и точной реализацией граничных условий.

Актуальность соответствующих исследований для инженерных применений определяется тем, что в вопросах прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи полостей, трещин, включений, краев и т.д. Получение достоверной и полной информации о распределении напряжений в указанных локальных зонах непосредственно связано с использованием аналитических методов решения краевых задач теории упругости. В обзорных статьях [1, 2] с достаточной полнотой представлена история проблемы исследования закономерностей напряженного состояния в анизотропных телах.

Предлагаемый в данной работе аналитический подход основан на представлении общих решений уравнений равновесия через две гармонические функции [3, 4] и использовании соотношений между базисными гармоническими функциями в разных эллиптических системах координат. Реализация граничных условий основных краевых задач приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженного состояния вблизи концентраторов напряжений, в частности, получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности нормальных напряжений.

Пусть δ_1, δ_2 (δ_j>0) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2+\delta_2^2=\omega=\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{12};\ \delta_1^2\delta_2^2=\gamma=\frac{E_1}{E_2}\quad \left(\omega>0,\,\omega^2-4\gamma\geq 0\right),$$

где $E_1=E_x$, $E_2=E_y$ – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей x и y; $G_{12}=G_{xy}$ – модуль сдвига в плоскости Oxy; $\nu_{12}=\nu_{xy}$ – коэффициент Пуассона. В силу симметрии этих формул относительно δ_1, δ_2 имеем

$$\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4\gamma}}{2}}\ \text{ либо }\ \begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{\omega\mp\sqrt{\omega^2-4\gamma}}{2}}\,.$$

Частные решения двумерных однородных уравнений равновесия ортотропных в осях x и y пластин представим в виде [3, 4]

$$\tau_{xy}^{(j)}=-\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial y}=-a\frac{\partial I_j}{\partial y_j},\ \sigma_x^{(j)}=-a\delta_j\frac{\partial I_j}{\partial x},\ \sigma_y^{(j)}=\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial x}=-\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)}; \qquad (1)$$

$$u_x^{(j)}=-\frac{a(\delta_j^2+\nu_{12})}{\delta_j E_1}I_j,\ u_y^{(j)}=\frac{a(\delta_{3-j}^2+\nu_{12})}{E_1}\int\frac{\partial I_j}{\partial x}dy_j \ \text{(j=1, 2)}, \qquad (2)$$

где $I_j=I_j(x,y_j)$ – гармонические функции переменных $x,y_j=\delta_j y$; a – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. Заметим, что в формулах (2) I_j и $\int\frac{\partial I_j}{\partial x}dy_j$ – сопряженные гармонические функции переменных x,y_j.

Положим

$$\tau_{xy}=\tau_{xy}^{(1)}+\tau_{xy}^{(2)},\ \sigma_x=\sigma_x^{(1)}+\sigma_x^{(2)},\ \sigma_y=\sigma_y^{(1)}+\sigma_y^{(2)};\ u_x=u_x^{(1)}+u_x^{(2)},\ u_y=u_y^{(1)}+u_y^{(2)}. \quad (3)$$

При $\delta_1\neq\delta_2$ $(\omega^2\neq 4\gamma)$ представления (3) компонент тензора напряжений и вектора перемещений являются общими (функции I_j линейно независимы). В случае $\delta_1=\delta_2=\delta$ $(\omega^2=4\gamma)$ функции I_1, I_2 образуют линейно зависимую систему и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции I_1), либо в исходной краевой задаче ($\delta_1\neq\delta_2$) совершить предельный переход $\delta_2\to\delta_1=\delta$.

Общие решения (3) в сочетании с методом Фурье позволяют получить простые выражения для проекций вектора перемещений и вектора сил на границах ортотропных эллиптических пластин и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач.

Пусть $\langle x,y\rangle$, $\langle\xi,\theta\rangle$ – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x=a\,\mathrm{sh}\xi\sin\theta,\ y=a\,\mathrm{ch}\xi\cos\theta \quad (a>0, 0\le\xi<\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi). \qquad (4)$$

Уравнение $\xi=\xi_0$=const задает вытянутый вдоль оси Oy эллипс

$$\frac{x^2}{(a\,\mathrm{sh}\xi_0)^2}+\frac{y^2}{(a\,\mathrm{ch}\xi_0)^2}=1 \qquad (5)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ каждую из гармонических функций I_j (j=1, 2) будем рассматривать как функцию эллиптических координат ξ_i, θ_i, определяемых формулами

$$x_j = x = a_j \mathrm{sh}\xi_j \sin\theta_j,\ y_j = \delta_j y = a_j \mathrm{ch}\xi_j \cos\theta_j\ (a_j > 0, 0 \leq \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi). \quad (6)$$

Уравнение $\xi_j = \xi_{j0}$ =const задает эллипс

$$\frac{x_j^2}{(a_j\,\mathrm{sh}\,\xi_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(a_j \mathrm{ch}\xi_{j0})^2} = \frac{x^2}{(a_j\,\mathrm{sh}\,\xi_{j0})^2} + \frac{(\delta_j y)^2}{(a_j \mathrm{ch}\xi_{j0})^2} = 1 \quad (j=1, 2), \quad (7)$$

совпадающий с исходным эллипсом (5) при условии, что

$$a_j\,\mathrm{sh}\,\xi_{j0} = a\,\mathrm{sh}\,\xi_0,\ a_j \mathrm{ch}\,\xi_{j0} = \delta_j a \mathrm{ch}\,\xi_0\ (j=1, 2). \quad (8)$$

Тогда из соотношений (4), (6), (8) следует, что на границах $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ эллиптических областей $0 \leq \xi < \xi_0$, $0 \leq \xi_j < \xi_{j0}$; $\xi_0 < \xi < \infty$, $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$ выполняются равенства

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \quad (9)$$

Коэффициенты Ляме эллиптических систем координат $\langle\xi, \theta\rangle$, $\langle\xi_j, \theta_j\rangle$ имеют вид

$$H_\xi = H_\theta = ah,\ h = \sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\theta};\ H_{\xi j} = H_{\theta j} = a_j h_j,\ h_j = \sqrt{\mathrm{ch}^2\xi_j - \cos^2\theta_j},$$

а направляющие косинусы единичных внешних нормалей $\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y$, $\vec{n}_j = n_x^{(j)}\vec{e}_x + n_y^{(j)}\vec{e}_y$ к границам (5), (7) эллиптических областей $\xi_0 < \xi \leq \infty$, $\xi_{j0} < \xi \leq \infty$ определяются формулами

$$n_x = -\frac{\mathrm{ch}\xi_0 \sin\theta}{h_0},\ n_y = -\frac{\mathrm{sh}\xi_0 \cos\theta}{h_0};\ n_x^{(j)} = -\frac{\mathrm{ch}\xi_{j0} \sin\theta_j}{\delta_j h_{j0}},\ n_y^{(j)} = -\frac{\mathrm{sh}\xi_{j0} \cos\theta_j}{h_{j0}};$$

$$h_0 = \sqrt{\mathrm{ch}^2\xi_0 - \cos^2\theta},\ h_{j0} = \sqrt{(\delta_j^{-1}\mathrm{ch}\xi_{j0})^2 \sin^2\theta_j + \mathrm{sh}^2\xi_{j0} \cos^2\theta_j}. \quad (10)$$

Из равенств (8), (9) следует, что на граничных линиях $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ выполняются соотношения

$$a_1 h_{10} = a_2 h_{20} = a h_0,\ n_x^{(j)} = n_x,\ n_y^{(j)} = n_y\ (j=1, 2). \quad (11)$$

Если на контуре (границе) пластины задан вектор сил $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$, то его проекции на оси декартовой системы координат выражаются формулами $F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$, $F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$. Найдем проекции $F_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} n_x^{(j)} + \tau_{xy}^{(j)} n_y^{(j)}$, $F_y^{(j)} = \tau_{xy}^{(j)} n_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} n_y^{(j)}$ векторов сил

$\vec{F}_j = F_x^{(j)}\vec{e}_x + F_y^{(j)}\vec{e}_y$ на границах $\xi_j = \xi_{j0}$, соответствующие частным решениям (1). Используя равенства

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{a_j h_j^2}\left(\mathrm{sh}\xi_j \cos\theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} - \mathrm{ch}\xi_j \sin\theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j}\right),$$

$$\sigma_x^{(j)} = -\frac{a\delta_j}{a_j h_j^2}\left(\mathrm{ch}\xi_j \sin\theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} + \mathrm{sh}\xi_j \cos\theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j}\right),$$

$$\sigma_y^{(j)} = -\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)};\ \mathrm{ch}^2\xi_j \sin^2\theta_j + \mathrm{sh}^2\xi_j \cos^2\theta_j = h_j^2,$$

на основании (8) - (11) получаем простые формулы

$$F_x^{(j)}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}} = \frac{1}{h_0}\frac{\partial I_j}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}},\ F_y^{(j)}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}} = -\frac{1}{\delta_j h_0}\frac{\partial I_j}{\partial \theta_j}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}}; \qquad (12)$$

$$F_x\Big|_{\xi=\xi_0} = F_x^{(1)}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + F_x^{(2)}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}},\ F_y\Big|_{\xi=\xi_0} = F_y^{(1)}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + F_y^{(2)}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}}. \qquad (13)$$

В предельном случае, когда $\xi_0 = 0$ ($\xi_{j0} = 0$), эллипсы $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $x = \pm 0$, $|y| \le a$, причем

$$a_j = \delta_j a,\ h_0 = |\sin\theta|.$$

Введем теперь координатные системы $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\langle \bar{\xi}, \bar{\theta} \rangle$, $\langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle$, $\langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle$, связанные с координатными системами $\langle x, y \rangle$, $\langle \xi, \theta \rangle$, $\langle x_j, y_j \rangle$, $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$ соотношениями (рисунок)

$$\bar{x} = x = x_j = \bar{x}_j,\ \bar{y} = -y - 2h;\ a + \bar{a} < 2h;$$

$$\bar{x} = \bar{a}\,\mathrm{sh}\bar{\xi}\sin\bar{\theta},\ \bar{y} = \bar{a}\,\mathrm{ch}\bar{\xi}\cos\bar{\theta}\ (\bar{a} > 0, 0 \le \bar{\xi} < \infty,\ 0 \le \bar{\theta} \le 2\pi);$$

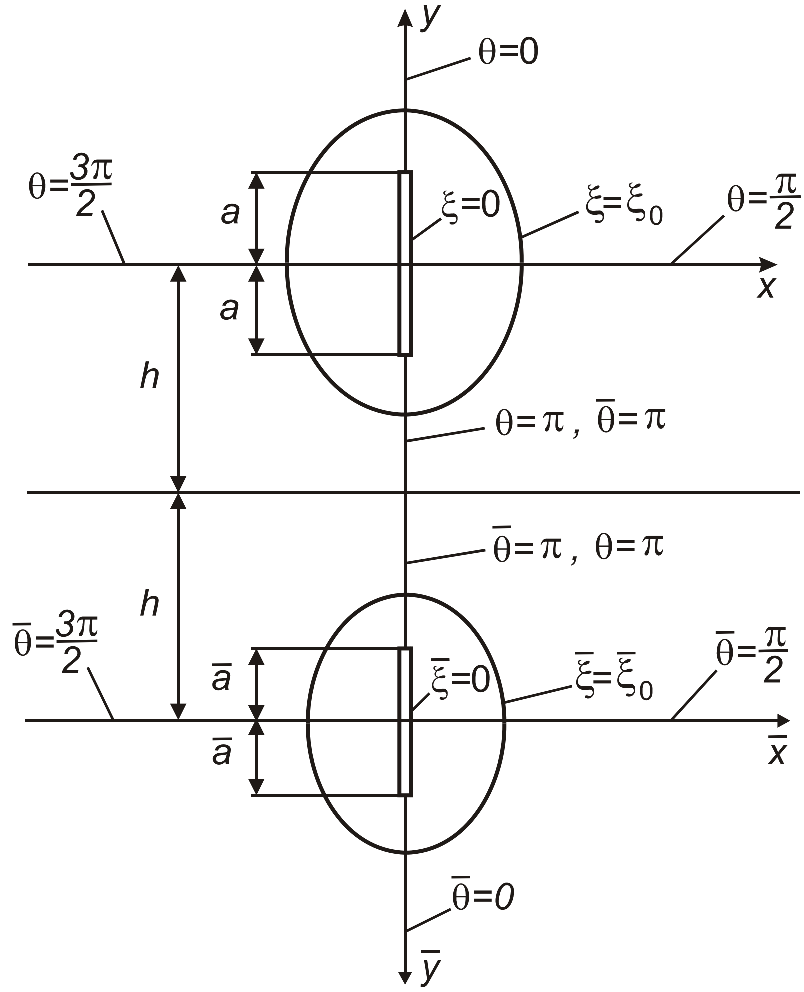
$$\bar{x}_j = \bar{a}_j \mathrm{sh}\bar{\xi}_j \sin\bar{\theta}_j,\ \bar{y}_j = \delta_j \bar{y} = \bar{a}_j \mathrm{ch}\bar{\xi}_j \cos\bar{\theta}_j\ (\bar{a}_j > 0; 0 \le \bar{\xi}_j < \infty, 0 \le \bar{\theta}_j \le 2\pi).$$

Пусть $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$=const, $\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$=const (j=1, 2) – эллипсы, вытянутые вдоль оси $\bar{O}\bar{y}$ (Oy). В соответствии с приведенными выше построениями на эллипсах $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$ имеем

$$\bar{a}_j \mathrm{sh}\bar{\xi}_{j0} = \bar{a}\,\mathrm{sh}\bar{\xi}_0,\ \bar{a}_j \mathrm{ch}\bar{\xi}_{j0} = \delta_j \bar{a}\,\mathrm{ch}\bar{\xi}_0,\ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta},\ \bar{h}_0 = \sqrt{\mathrm{ch}^2\bar{\xi}_0 - \cos^2\bar{\theta}};$$

$$F_x^{(j)}\Big|_{\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}} = \frac{a}{\bar{a}\bar{h}_0}\frac{\partial I_j}{\partial \bar{\xi}_j}\Big|_{\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}},\ F_y^{(j)}\Big|_{\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}} = -\frac{a}{\delta_j \bar{a}\bar{h}_0}\frac{\partial I_j}{\partial \bar{\theta}_j}\Big|_{\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}}; \qquad (14)$$

$$F_x\Big|_{\bar\xi=\bar\xi_0}=F_x^{(1)}\Big|_{\bar\xi_1=\bar\xi_{10}}+F_x^{(2)}\Big|_{\bar\xi_2=\bar\xi_{20}},\quad F_y\Big|_{\bar\xi=\bar\xi_0}=F_y^{(1)}\Big|_{\bar\xi_1=\bar\xi_{10}}+F_y^{(2)}\Big|_{\bar\xi_2=\bar\xi_{20}}. \qquad (15)$$



Геометрия пластины

В предельном случае $\bar\xi_0=0$ ($\bar\xi_{j0}=0$) эллипсы $\bar\xi=\bar\xi_0$, $\bar\xi_j=\bar\xi_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $\bar x=\pm 0$, $|\bar y|\le\bar a$, причем

$$\bar a_j=\delta_j\bar a,\ \bar h_0=\left|\sin\bar\theta\right|.$$

Базисные гармонические функции в координатных системах $\langle\xi_j,\theta_j\rangle$, $\langle\bar\xi_j,\bar\theta_j\rangle$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} e^{-k\bar\xi_j}\cos k\bar\theta_j=\dfrac{1}{2}\bar b_{0k}^{(j)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar b_{nk}^{(j)}\operatorname{ch}n\xi_j\cos n\theta_j, \\ e^{-k\bar\xi_j}\sin k\bar\theta_j=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar b_{nk}^{(j)}\operatorname{sh}n\xi_j\sin n\theta_j\ \left(a_j\operatorname{ch}\xi_j<2\delta_j h-a_j\right); \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} e^{-n\xi_j}\cos n\theta_j = \dfrac{1}{2}\bar{c}_{n0}^{(j)} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{c}_{nk}^{(j)}\mathrm{ch}k\bar{\xi}_j\cos k\bar{\theta}_j, \\ e^{-n\xi_j}\sin n\theta_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{c}_{nk}^{(j)}\mathrm{sh}k\bar{\xi}_j\sin k\bar{\theta}_j \quad \left(\bar{a}_j\mathrm{ch}\bar{\xi}_j < 2\delta_j h - \bar{a}_j\right), \end{cases} \tag{17}$$

где $\bar{b}_{nk}^{(j)} = 2k(-1)^{n+k}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{-1}e^{-2\delta_j h\lambda}I_n(a_j\lambda)I_k(\bar{a}_j\lambda)d\lambda$, $\bar{c}_{nk}^{(j)} = \dfrac{n}{k}\bar{b}_{nk}^{(j)}$;

$a_j+\bar{a}_j<2\delta_j h$ $(a+\bar{a}<2h)$; $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Методика получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложена в работе [5].

Разложения (16), (17) в сочетании с методом Фурье позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстиями $0\le\xi<\xi_0$, $0\le\bar{\xi}<\bar{\xi}_0$, в частности, разрезами (трещинами) $\xi=0$, $\bar{\xi}=0$.

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для бесконечной ортотропной пластины, ослабленной двумя разрезами $\xi=0$ ($x=\pm 0$, $|y|<a$) и $\bar{\xi}=0$ ($\bar{x}=\pm 0$, $|\bar{y}|<\bar{a}$). Пусть берега этих разрезов растягиваются равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности σ_0=const ($\sigma_0>0$). В силу симметрии задачи по координате x ($\bar{x}$) достаточно удовлетворить граничным условиям

$$F_x\big|_{\xi=0}=\sigma_0,\ F_y\big|_{\xi=0}=0\ (0<\theta<\pi);\ F_x\big|_{\bar{\xi}=0}=\sigma_0,\ F_y\big|_{\bar{\xi}=0}=0\ (0<\bar{\theta}<\pi),$$

а гармонические функции I_j (j=1, 2) представить в виде суммы рядов по базисным гармоническим функциям $e^{-n\xi_j}\sin n\theta_j$, $e^{-k\bar{\xi}_j}\sin k\bar{\theta}_j$:

$$I_j=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(j)}e^{-n\xi_j}\sin n\theta_j+\sum_{n=1}^{\infty}B_k^{(j)}e^{-k\bar{\xi}_j}\sin k\bar{\theta}_j. \tag{18}$$

Используя теперь равенства (12) – (15) при $\xi_0=0$, $\xi_{j0}=0$, $\bar{\xi}_0=0$, $\bar{\xi}_{j0}=0$, разложения (16) – (18) и учитывая, что $a_j=\delta_j a$, $\bar{a}_j=\delta_j\bar{a}$, $h_0=\sin\theta$, $\bar{h}_0=\sin\bar{\theta}$ ($0<\theta$, $\bar{\theta}<\pi$), получаем следующие связи между коэффициентами $A_n^{(j)}$, $B_k^{(j)}$:

$$\delta_1^{-1} A_n^{(1)} + \delta_2^{-1} A_n^{(2)} = 0; \ \ \delta_1^{-1} B_k^{(1)} + \delta_2^{-1} B_k^{(2)} = 0 \ \ (n, k = 1, 2, \ldots);$$

$$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k^{(1)} + B_k^{(2)} \right] \bar{b}_{nk} + \bar{f}_n; \ \bar{f}_1 = -\sigma_0, \ \bar{f}_n = 0 \ (n=2, 3, \ldots);$$

$$B_k^{(1)} + B_k^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(1)} + A_n^{(2)} \right] \bar{c}_{nk} + \bar{g}_k; \ \bar{g}_1 = -\frac{\bar{a}}{a}\sigma_0, \ \bar{g}_k = 0 \ (k=2, 3, \ldots);$$

$$\bar{b}_{nk} = 2k(-1)^{n+k} S_{nk}; \ \ \bar{c}_{nk} = 2n(-1)^{n+k} S_{nk};$$

$$S_{nk} = \int_0^{\infty} \mu^{-1} e^{-2h\mu} I_n(a\mu)\, I_k(\bar{a}\mu) d\mu \ \ (a + \bar{a} < 2h). \qquad (19)$$

Полагая $A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = (-1)^n \sigma_0 \left[x_n^{(1)} + \frac{\bar{a}}{a} x_n^{(2)} \right]$, $B_k^{(1)} + B_k^{(2)} = (-1)^k \sigma_0 \left[y_k^{(1)} + \frac{\bar{a}}{a} y_k^{(2)} \right]$,

для нахождения величин $x_n^{(j)}$, $y_k^{(j)}$ получаем связанные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$x_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k^{(1)} + f_n; \ y_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} x_n^{(1)}; \ f_1 = 1, \ f_n = 0 \ (n=2, 3, \ldots); \qquad (20)$$

$$x_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k^{(2)}; \ y_k^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} x_n^{(2)} + g_k; \ g_1 = 1, \ g_k = 0 \ (k=2, 3, \ldots), \qquad (21)$$

в которых $b_{nk} = 2kS_{nk}$, $c_{nk} = 2nS_{nk}$; $b_{nk} > 0$, $c_{nk} > 0$.

Совокупность систем (20), (21) равносильна двум несвязанным бесконечным системам относительно величин $x_n^{(1)}$, $y_k^{(2)}$

$$x_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)} x_m^{(1)} + f_n; \ d_{nm}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} c_{mk} > 0; \qquad (22)$$

$$y_k^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{km}^{(2)} y_m^{(2)} + g_k; \ d_{km}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} b_{nm} > 0 \qquad (23)$$

и двум соотношениям

$$y_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} x_n^{(1)}; \ x_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k^{(2)},$$

которые определяют значения $y_k^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ через решения бесконечных систем (22), (23).

Введем безразмерные геометрические параметры $\varepsilon = \dfrac{a}{h}$, $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\bar{a}}{h}$.

Так как $a + \bar{a} < 2h$, то $\varepsilon + \bar{\varepsilon} < 2$, $\dfrac{\varepsilon}{2 - \bar{\varepsilon}} < 1$, $\dfrac{\bar{\varepsilon}}{2 - \varepsilon} < 1$. Используя равенства [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} kI_k(z) = \frac{z}{2}\left[I_1(z)+I_0(z)\right];\quad \int_0^{\infty} e^{-px} I_\nu(cx)dx = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2-c^2}\left(p+\sqrt{p^2-c^2}\right)^\nu}$$

и учитывая, что $I_1(z) < I_0(z)$, $I_0(z) \le e^z$ $(z \ge 0)$, для сумм

$\sigma_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} > 0$, $\sigma_k^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} > 0$ получаем оценки

$\sigma_n^{(1)} < \beta_1\gamma_1^n$, $\sigma_k^{(2)} < \beta_2\gamma_2^k$, в которых $\beta_1 = \dfrac{2\bar{\varepsilon}}{\sqrt{(2-\bar{\varepsilon})^2-\varepsilon^2}}$, $\beta_2 = \dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{(2-\varepsilon)^2-\bar{\varepsilon}^2}}$,

$\gamma_1 = \dfrac{\varepsilon}{2-\bar{\varepsilon}+\sqrt{(2-\bar{\varepsilon})^2-\varepsilon^2}} < 1$, $\gamma_2 = \dfrac{\bar{\varepsilon}}{2-\varepsilon+\sqrt{(2-\varepsilon)^2-\bar{\varepsilon}^2}} < 1$. Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\sigma_k^{(2)} < \beta_2 \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\gamma_2^k \le \beta_2\gamma_2\sigma_n^{(1)} < \beta_1\beta_2\gamma_2\gamma_1^n, \tag{24}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_{km}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk}\sigma_n^{(1)} < \beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk}\gamma_1^n \le \beta_1\gamma_1\sigma_k^{(2)} < \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2^k. \tag{25}$$

Поскольку $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 < 1$ при $\varepsilon + \bar{\varepsilon} < 2$ $(a + \bar{a} < 2h)$, то

$\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $\sum_{m=1}^{\infty} d_{km}^{(2)} \to 0$ $(k \to \infty)$, т.е. бесконечные системы (22), (23) квазирегулярны при любых допустимых значениях параметров ε, $\bar{\varepsilon}$ (любой близости разрезов $\xi = 0$, $\bar{\xi} = 0$).

Пусть для определенности $\bar{\varepsilon} \le \varepsilon$ $(\bar{a} \le \bar{a})$. Тогда

$$\beta_1,\ \beta_2 \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}};\ \gamma_1,\ \gamma_2 \le \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon+2\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{(1+\sqrt{1-\varepsilon})^2}\quad (0<\varepsilon<1);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)},\ \sum_{m=1}^{\infty} d_{km}^{(2)} < \frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon)(1+\sqrt{1-\varepsilon})^4} < 1\quad \left(0<\varepsilon<\varepsilon_0 = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right). \tag{26}$$

Следовательно, операторы бесконечных систем (22), (23), действующие на основании оценок (24), (25) в пространстве ℓ абсолютно суммируемых числовых последовательностей, являются в нем операторами сжатия. Это свойство обеспечивает существование и единственность решений указанных систем в ℓ и позволяет для их нахождения использовать методы последовательных приближений и малого параметра. С другой стороны, оценки (26) означают, что при $0 < \bar{\varepsilon} \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ бесконечные системы (22), (23) вполне регулярны и, следовательно, к ним в качестве метода решения применим также метод редукции.

Используя значение интеграла [6]

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\mathrm{p}x}I_\mu(bx)\,I_\nu(cx)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{b^\mu c^\nu}{2^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)p^{\alpha+\mu+\nu}}\sum_{s=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+\mu+\nu+2s)}{s!\Gamma(\mu+s+1)}\left(\frac{b}{2p}\right)^{2s}\mathrm{F}\left(-s,-\mu-s;\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)$$

($\Gamma(z)$– гамма-функция, $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса) и равенства [7]

$$\mathrm{F}\left(-s,-n-s;k+1;\frac{\bar{a}^2}{a^2}\right)=\sum_{\ell=0}^{s}\frac{s!(n+s)!k!}{\ell!(s-\ell)!(n+s-\ell)!(k+\ell)!}\left(\frac{\bar{a}}{\mathrm{a}}\right)^{2\ell},$$

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\quad(\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots;\ \gamma-\alpha-\beta>0)$$

для величин (19) получаем разложения в ряды по степеням ε, $\bar{\varepsilon}$

$$S_{\mathrm{nk}}=\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\mathrm{n}}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{4}\right)^{\mathrm{k}}\sum_{s=0}^\infty\sum_{\ell=0}^{s}\frac{(n+k+2s-1)!}{\ell!(k+\ell)!(s-\ell)!(n+s-\ell)!}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2s}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^{2\ell}\quad(\bar{\varepsilon}\neq\varepsilon);$$

$$S_{\mathrm{nk}}=\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\mathrm{n+k}}\sum_{s=0}^\infty\frac{(n+k+2s-1)!(n+k+2s)!}{s!(n+s)!(k+s)!(n+k+s)!}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2s}\quad(\bar{\varepsilon}=\varepsilon).$$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении нормальных напряжений вблизи концов разрезов и вычислении соответствующих коэффициентов интенсивности. Используя представления (1), (3) и учитывая, что $\xi_1=\xi_2=\xi$ при $\theta=0$, $\theta=\pi$ и $\bar{\xi}_1=\bar{\xi}_2=\bar{\xi}$ при $\bar{\theta}=0$, $\bar{\theta}=\pi$, после некоторых простых операций получаем асимптотические формулы

$$\sigma_{\mathrm{x}}\big|_{\theta=0}\sim\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\xi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}n\left[x_n^{(1)}+\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}x_n^{(2)}\right]\mathrm{e}^{-n\xi}\quad(\xi\to 0\ (y\to a));$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}\big|_{\bar{\theta}=0}\sim\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\bar{\xi}}\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}k\left[y_k^{(2)}+\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}y_k^{(1)}\right]\mathrm{e}^{-k\bar{\xi}}\quad(\bar{\xi}\to 0\ (\bar{y}\to\bar{a}));$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}\big|_{\theta=\pi}\sim\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\xi}\sum_{n=1}^\infty n\left[x_n^{(1)}+\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}x_n^{(2)}\right]\mathrm{e}^{-n\xi}\quad(\xi\to 0\ (y\to -a));$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}\big|_{\bar{\theta}=\pi}\sim\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\bar{\xi}}\sum_{k=1}^\infty k\left[y_k^{(2)}+\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}y_k^{(1)}\right]\mathrm{e}^{-k\bar{\xi}}\quad(\bar{\xi}\to 0\ (\bar{y}\to -\bar{a}));$$

$$\sigma_{\mathrm{y}}\Big|_{\substack{\theta=0\\ \theta=\pi}}\sim\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sigma_{\mathrm{x}}\Big|_{\substack{\theta=0\\ \theta=\pi}}\ (\xi\to 0);\quad \sigma_{\mathrm{y}}\Big|_{\substack{\bar{\theta}=0\\ \bar{\theta}=\pi}}\sim\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sigma_{\mathrm{x}}\Big|_{\substack{\bar{\theta}=0\\ \bar{\theta}=\pi}}\ (\bar{\xi}\to 0).$$

При этом коэффициенты интенсивности нормальных напряжений

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\lim_{\xi\to 0}\left[\sigma_x\sqrt{2(\pm y-a)}\right]_{\theta=\theta^{\pm}}=\sigma_0\sqrt{a}\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^{n-1}n\left[x_n^{(1)}+\frac{\overline{\varepsilon}}{\varepsilon}x_n^{(2)}\right],\ \theta^{\pm}=\begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix};$$

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}^{\pm}=\lim_{\xi\to 0}\left[\sigma_x\sqrt{2(\pm\overline{y}-\overline{a})}\right]_{\overline{\theta}=\overline{\theta}^{\pm}}=\sigma_0\sqrt{\overline{a}}\sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^{k-1}k\left[y_k^{(2)}+\frac{\varepsilon}{\overline{\varepsilon}}y_k^{(1)}\right],\ \overline{\theta}^{\pm}=\begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}. \tag{27}$$

Из оценок (24), (25) и принадлежности последовательностей $\{nf_n\}$, $\{kg_k\}$ пространству ℓ следует сходимость рядов в формулах (27).

Решая бесконечные системы (22), (23) либо (20), (21) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка $O(\varepsilon^i\overline{\varepsilon}^j)$ ($i+j\le 6$) для величин $x_n^{(1)}=x_n^{(1)}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$, $x_n^{(2)}=x_n^{(2)}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$, $y_n^{(1)}=y_n^{(1)}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$, $y_n^{(2)}=y_n^{(2)}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$ и коэффициентов $K_{\mathrm{I}}^{\pm}=K_{\mathrm{I}}^{\pm}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$, $\overline{K}_{\mathrm{I}}^{\pm}=\overline{K}_{\mathrm{I}}^{\pm}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$, получаем значения

$$x_1^{(1)}=1+\frac{1}{64}\varepsilon^2\overline{\varepsilon}^2+\frac{3}{512}\varepsilon^4\overline{\varepsilon}^2+\frac{4}{512}\varepsilon^2\overline{\varepsilon}^4,\ x_2^{(1)}=\frac{1}{256}\varepsilon^3\overline{\varepsilon}^2,\ x_3^{(1)}=\frac{1}{1024}\varepsilon^4\overline{\varepsilon}^2;$$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{8}\varepsilon\overline{\varepsilon}+\frac{3}{128}\varepsilon\overline{\varepsilon}(\varepsilon^2+\overline{\varepsilon}^2)+\frac{5}{1024}\varepsilon\overline{\varepsilon}(\varepsilon^4+\overline{\varepsilon}^4)+\frac{17}{1024}\varepsilon^3\overline{\varepsilon}^3,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{1}{32}\varepsilon^2\overline{\varepsilon}+\frac{3}{256}\varepsilon^2\overline{\varepsilon}^3+\frac{1}{128}\varepsilon^4\overline{\varepsilon},\ x_3^{(2)}=\frac{1}{128}\varepsilon^3\overline{\varepsilon}+\frac{5}{1024}\varepsilon^3\overline{\varepsilon}^3+\frac{5}{2048}\varepsilon^5\overline{\varepsilon},$$

$$x_4^{(2)}=\frac{1}{512}\varepsilon^4\overline{\varepsilon},\ x_5^{(2)}=\frac{1}{2048}\varepsilon^5\overline{\varepsilon};\ y_n^{(1)}=x_n^{(2)}(\overline{\varepsilon},\varepsilon),\ y_n^{(2)}=x_n^{(1)}(\overline{\varepsilon},\varepsilon);$$

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\sigma_0\sqrt{a}\,f(\varepsilon,\overline{\varepsilon}),\ \overline{K}_{\mathrm{I}}^{\pm}=\sigma_0\sqrt{\overline{a}}\,f(\overline{\varepsilon},\varepsilon);\ f(\varepsilon,\overline{\varepsilon})=1+\frac{1}{8}\overline{\varepsilon}^2\mp\frac{1}{16}\varepsilon\overline{\varepsilon}^2+$$

$$+\frac{1}{128}(8\varepsilon^2\overline{\varepsilon}^2+3\overline{\varepsilon}^4)\mp\frac{1}{128}(4\varepsilon^3\overline{\varepsilon}^2+3\varepsilon\overline{\varepsilon}^4)+\frac{1}{1024}(24\varepsilon^4\overline{\varepsilon}^2+40\varepsilon^2\overline{\varepsilon}^4+5\overline{\varepsilon}^6).$$

В заключение отметим, что другая пара разложений (16), (17) (базисных гармонических функций $e^{-k\overline{\xi}_j}\cos k\overline{\theta}_j$, $e^{-n\xi_j}\cos n\theta_j$) позволяет реализовать и антисимметричный вариант задачи, а в общем случае разбиение исходной краевой задачи на симметричную и антисимметричную по координате $x\,(\overline{x})$ дает возможность исследовать ее при произвольных граничных условиях на берегах разрезов.

Список использованных источников

1. Космодамианский, А.С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах [Текст] / А.С. Космодамианский // Прикладная механика.– 2002. – Т.38, № 4.– С.21–48.

2. Немиш, Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) [Текст] / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика.– 2000.– Т.36, № 2.– С.3–38.

3. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 2 (70). – Х., 2012. – С. 117–127.

4. Соловьев, А.И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А.И. Соловьев, А.В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101–110.

5. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная механика.– 1984. – Т.48, № 6.– С. 973–982.

6. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

7. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Поступила в редакцию 22.04.2013.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков