УДК 539.3

А.Н. Шупиков, д-р техн. наук,
Н.В. Сметанкина, д-р техн. наук,
Е.В. Свет, канд. техн. наук

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Одной из актуальных проблем, возникающих в различных областях современной техники, является обеспечение прочности и надежности конструкций и сооружений при воздействии температурных полей [1]. Применение численных методов к решению задач термоупругости конструкций сложной геометрии не снижает актуальности развития эффективных аналитических методов решения этих задач, в особенности для конструкций, выполненных из разнородных материалов [2, 3].

В большинстве работ исследовано термонапряженное состояние однородных пластин и оболочек. В статье [4] приведено решение задачи термоупругости о напряженно-деформированном состоянии неограниченной пластины, нагреваемой источником тепла. При этом предполагается, что температура и источник тепла изменяются линейно по толщине пластины. В работе [5] задача термоупругости для тонких пластин сложной формы решена методом R-функций, который учитывает сложную геометрию тел на аналитическом уровне. Поведение пластин описано на основе гипотез Кирхгофа – Лява. В статье [6] предложен альтернативный вариант метода граничных элементов к решению задач изгиба пластин, находящихся в температурном поле. Подход состоит в приведении задачи Дирихле для бигармонического оператора к последовательности распадающихся задач и последующей декомпозиции каждой из них в пару несвязанных задач для уравнения Пуассона. В качестве примера рассматривалась круговая защемленная пластина под действием распределенной температурной нагрузки. Для решения задач термоупругого изгиба многослойных оболочек, как правило, применяются численные методы, такие, как методы конечных разностей и конечных элементов [1, 7–10]. Таким образом, разработка эффективных методов, позволяющих представить решение задачи в аналитическом или численно-аналитическом виде, остается актуальной задачей.

В настоящей работе предложен новый подход к решению задачи термоупругости многослойных незамкнутых цилиндрических оболочек сложной формы в плане. В основу алгоритма решения положен метод погружения, ранее разработанный для решения статических и динамических задач многослойных пластин и оболочек [11, 12].

Вначале получим решение задачи теплопроводности. Для этого рассмотрим многослойную незамкнутую цилиндрическую оболочку, собранную из I изотропных слоев постоянной толщины $h_i\ (i = \overline{1, I})$, отнесенную к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1).

На координатной плоскости оболочка занимает область Ω, ограниченную контуром Γ:

$$\Gamma: \ x_\Gamma = x(s),\ y_\Gamma = y(s), \tag{1}$$

где s – текущая длина дуги.

Обозначим верхнюю и нижнюю поверхности оболочки как Ω_0 и Ω_I, боковую поверхность – Ω_Γ, причем $\Omega = \Omega_0$, $\Omega_\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{I} \Omega_\Gamma^i$, $i = \overline{1, I}$.
На поверхностях оболочки происходит конвективный теплообмен.

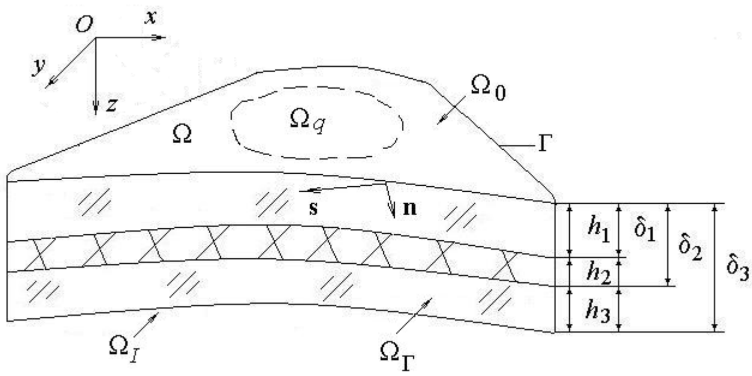

Рисунок 1 – Многослойная оболочка

Уравнение теплопроводности и граничные условия для многослойной оболочки получают из вариационного уравнения теплового баланса [13].

Преобразования вариационного уравнения позволяют получить условия на внешних поверхностях

$$-\xi_1^1 k_1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + \xi_2^1 H_1 \left(T^1 - T_в\right) = 0,\ (x, y, z) \in \Omega_0; \tag{2}$$

$$\xi_1^I k_I \frac{\partial T^I}{\partial z} + \xi_2^I H_I (T^I - T_н) = 0,\ (x, y, z) \in \Omega_I \tag{3}$$

и на границе контакта слоев оболочки

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} - k_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} - q_\Omega^i = 0;$$

$$T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j \quad i = \overline{1, I-1}. \tag{4}$$

Коэффициенты ξ_1^1, ξ_2^1, ξ_1^I и ξ_2^I дают возможность моделировать заданные граничные условия.

Температура T^i в слоях, T_Γ^i на боковой поверхности, а также удельные мощности Q^i внутренних источников тепла также представляются в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра [14]

$$T^i(x,y,z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} T_r^i(x,y,t) f_r^i(z), \; (x,y) \in \Omega, \; z \in [\delta_{i-1}, \delta_i], \tag{5}$$

$$T_\Gamma^i(x,y,z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} T_{\Gamma r}^i(x,y,t) f_r^i(z), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{6}$$

$$Q^i(x,y,z,t) = \sum_{r=0}^{\infty} Q_r^i(x,y,t) f_r^i(z), \quad (x,y) \in \Omega_\Gamma^i, \tag{7}$$

где $f_r^i(z)$ – полином Лежандра степени r.

В разложениях (5) – (7) учитываются первые четыре члена ряда $(r = 0, 1, 2, 3)$, что обеспечивает достаточную точность решения [14].

С учетом разложения (5) условия (2) – (4) образуют систему линейных алгебраических уравнений

$$[A]\tilde{\mathbf{T}} = ([B]\mathbf{T}0 + [C]\mathbf{T}1 + \mathbf{D}), \tag{8}$$

где $\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_2^1 & T_3^1 & \dots & T_2^i & T_3^i & \dots & T_2^I & T_3^I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;

$\mathbf{T}0 = \begin{pmatrix} T_0^1 & \dots & T_0^i & \dots & T_0^I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;

$\mathbf{T}1 = \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_1^i & \dots & T_1^I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Система (8) позволяет выразить коэффициенты T_2^i и T_3^i через коэффициенты T_0^i и T_1^i и записать распределение температуры в слоях оболочки (5) в следующем виде:

$$T^i = \sum_{j=1}^{I} \left[\varphi_{ij}^1 T_0^j + \varphi_{ij}^2 T_1^j \right] + \varphi_i^3, \; i = \overline{1, I}, \tag{9}$$

где φ_{ij}^1, φ_{ij}^2, φ_i^3 получены в результате преобразований (8).

Таким образом, температура T^i в виде (9) удовлетворяет граничным условиям на наружных поверхностях оболочки Ω_0 и Ω_I и на границе контакта соседних слоев.

С учетом (6), (7) и (9), а также условий (2)–(4) вариационное уравнение приобретает вид

$$\delta X(T) = \sum_{i=1}^{I}\left\langle -\int_{V_i}\left\{k_i\Delta_R\left[\sum_{j=1}^{I}\left[\varphi_{ij}^1 T_0^j + \varphi_{ij}^2 T_1^j\right] + \varphi_i^3\right] + \sum_{r=0}^{3} Q_r^i f_r^i -\right.\right.$$
$$-\rho_i c_i\left[\left[\sum_{j=1}^{I}\left[\varphi_{ij}^1 \frac{\partial T_0^j}{\partial t} + \varphi_{ij}^2 \frac{\partial T_1^j}{\partial t}\right]\right\} + \frac{\partial \varphi_i^3}{\partial t}\right]\left\{\sum_{k=1}^{I}\left[\varphi_{ik}^1\, \delta T_0^k + \varphi_{ik}^2\, \delta T_1^k\right]\right\}dV +$$
$$+\int_{\Omega_L^i}\left\{k_i \frac{\partial}{\partial n}\left[\sum_{j=1}^{I}\left[\varphi_{ij}^1 T_0^j + \varphi_{ij}^2 T_1^j\right] + \varphi_i^3\right] + H_\Gamma^i\left[\sum_{j=1}^{I}\left[\varphi_{ij}^1 T_0^j + \varphi_{ij}^2 T_1^j\right] + \varphi_i^3\right] -\right.$$
$$\left.\left. - H_\Gamma^i \sum_{r=0}^{3} T_{\Gamma r}^i f_r^i\right\} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{I}\left[\varphi_{ik}^1\, \delta T_0^k + \varphi_{ik}^2\, \delta T_1^k\right]\right\}d\Omega\right\rangle = 0, \quad i, j, k = \overline{1, I}, \qquad (10)$$

где $\Delta_R = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{R_z^2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{1}{RR_z}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $R_z = 1 + \dfrac{z}{R}$;

R – радиус кривизны поверхности Ω_0.

Отсюда получаем систему уравнений теплопроводности и систему граничных условий на боковой поверхности оболочки Ω_Γ^i.

Для решения задачи теплопроводности оболочки со сложной формой плана применяют метод погружения [11, 12]. Исходная многослойная оболочка произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную оболочку с той же композицией слоев. Форма охватывающей оболочки и граничные условия на ее боковой поверхности выбирают таким образом, чтобы можно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе роль охватывающей оболочки выполняет оболочка прямоугольной формы в плане с нулевыми условиями на боковой поверхности.

Для реализации заданных граничных условий к вспомогательной оболочке вдоль контура Γ прилагаются дополнительные компенсирующие источники $q_i^{comp}(x, y, z, t)$, $(x, y, z, t) \in \Omega_\Gamma^i$. Компенсирующие источники входят в уравнение теплопроводности в интегральном виде

$$Q_r^i(x, y, t) = \oint_\Gamma q_{ir}^{comp}(x_\Gamma, y_\Gamma, t)\,\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)\,ds, \quad r = \overline{1, r^*}, \qquad (11)$$

где $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$ – двухмерная δ-функция Дирака.

Ядро уравнений представляет собой δ-функцию Дирака и имеет особенность в точках $x = x_\Gamma, y = y_\Gamma$ порядка $1/r^2$, где $r = \sqrt{(x - x_\Gamma)^2 + (y - y_\Gamma)^2}$.

Таким образом, исходная задача теплопроводности для оболочки со сложной формой плана преобразуется в задачу теплопроводности для оболочки прямоугольной формы в плане и описывается уравнением теплопроводности и граничных условий на боковой поверхности оболочки, которые образуют систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнением

$$[\Theta]\ \hat{T} = 0,$$

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]\ \hat{\mathbf{T}}\ [\mathbf{F}(x,y,t)] - \mathbf{C}^\Gamma = 0,\ \ x,y \in \Gamma, \tag{12}$$

где $[\mathbf{\Theta}]$, $\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]$ и $\mathbf{C}^\Gamma$ – матрицы, полученные в результате численных преобразований, а вектор $\hat{\mathbf{T}}$ составлен из чередующихся элементов $\mathbf{T}0$ и $\mathbf{T}1$.

Затем функции $T_\alpha^i(x,y,t)$ и $Q_r^i(x,y,t)$ разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям охватывающей прямоугольной оболочки:

$$T_\alpha^i(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{\alpha mn}^i(t) \sin\alpha_m x \sin\beta_n y,$$

$$Q_r^i(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Q_{rmn}^i(t) \sin\alpha_m x \sin\beta_n y, \tag{13}$$

$$Q_{rmn}^i(t) = \frac{4}{AB}\oint_\Gamma q_{ir}^{comp}(x_\Gamma, y_\Gamma, t) \sin\alpha_m x_\Gamma \sin\beta_n y_\Gamma\, ds; \tag{14}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{A};\ \beta_n = \frac{n\pi}{B},\ i = \overline{1,I},\ \alpha = 0,1,\ r = \overline{1,r^*},\ m = \overline{1,m^*},\ n = \overline{1,n^*}.$$

Это позволяет свести систему уравнений теплопроводности к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[\mathbf{M}]\ \hat{\mathbf{T}}'_{mn} + \left[\mathbf{\Lambda}^{mn}\right]\ \hat{\mathbf{T}}_{mn} = \mathbf{F}_{mn} \tag{15}$$

с начальными условиями

$$\hat{\mathbf{T}}_{mn} = \hat{\mathbf{T}}_{mn}^0,\quad t = 0.$$

Система (15) интегрируется методом разложения решения в ряд Тейлора [11]. Функции T_α^i и q_{ir}^{comp}, входящие в граничные условия (12) исходной оболочки, представляются в виде разложений вдоль контура Γ

$$T_{\alpha}^{i\,p+1}(s)=\sum_{\beta=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}T_{\alpha\beta\mu}^{i\,p+1}\,b_{\beta\mu}(s),$$

$$q_{ir}^{comp\;p+1}(s)=\sum_{\beta=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}q_{ir\beta\mu}^{comp\;p+1}\,b_{\beta\mu}(s),\;\; i=\overline{1,I},\;\; r=\overline{1,r^{*}}. \qquad (16)$$

В результате функции Q_{rmn}^{i} (14) и F_{mn}^{i} (15) приобретают вид

$$Q_{rmn}^{i\,p+1}=\sum_{\beta=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}q_{ir\beta\mu}^{comp\;p+1}\,\Theta_{mn\beta\mu}\,,\;F_{mn}^{i\,p+1}=\sum_{\beta=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}F_{\mu\beta}^{i\,p+1}\,\Theta_{mn\beta\mu}\,;$$

$$F_{\mu\beta}^{i\,p+1}=q_{i0\beta\mu}^{comp\;p+1}+\sum_{j=1}^{I}\left(\xi_i^{2j-1}q_{i1\beta\mu}^{comp\;p+1}+\xi_i^{2j}q_{i2\beta\mu}^{comp\;p+1}\right); \qquad (17)$$

$$\Theta_{mn\beta\mu}=\frac{4}{AB}\oint_{\Gamma}sin\frac{m\pi x_{\Gamma}}{A}\,sin\frac{n\pi y_{\Gamma}}{B}\,b_{\beta\mu}ds\,,$$

$$i=\overline{1,I},\quad r=\overline{1,r^{*}},\quad \beta=1,2,\quad \mu=\overline{0,\mu^{*}}\,.$$

Функции, образующие систему (12), также разлагаются в ряд вдоль контура Γ. В результате с учетом (16) и (17) решение системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (12) на каждом шаге по времени сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд вдоль контура Γ функций компенсирующих источников $q_{ir\beta\mu}^{comp\;p+1}$, заданных в виде (17).

После вычисления интенсивностей компенсирующих источников (16) с учетом (5) и (10) определяют значения температуры в слоях оболочки (9).

Перейдем к решению задачи термоупругости. Как и ранее, рассмотрим многослойную незамкнутую цилиндрическую оболочку, занимающую на координатной плоскости область Ω, ограниченную контуром Γ (см. рис. 1), собранную из изотропных слоев постоянной толщины h_i. На оболочку действуют температурные поля и силовые нагрузки $\mathbf{P}=\{p_j(x,y)\}$, $j=\overline{1,3I+3}$, $(x,y)\in\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}\subset\Omega$. Распределение температуры в слоях оболочки является результатом решения задачи теплопроводности.

Поведение оболочки описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига и обжатие по толщине в каждом слое оболочки. Перемещения точки *i*-го слоя определяются выражениями

$$u_k^i=u_k+\sum_{j=1}^{i-1}h_j u_{3+I(k-1)+j}+\left(z-\delta_{i-1}\right)u_{3+I(k-1)+i}\,,k=1,2,3,\;\; i=\overline{1,I}\,, \qquad (18)$$

где $u_k = u_k(x, y)$, $k = 1,2,3$ – перемещения точки координатной плоскости в направлении координатных осей; $u_{3+l(k-1)+i} = u_{3+l(k-1)+i}(x, y)$, $k = 1,2$ – углы поворота нормального элемента в *i*-м слое вокруг координатных осей; $u_{3+2l+i} = u_{3+2l+i}(x, y)$ – обжатие нормального элемента в пределах *i*-го слоя; $\delta_i = \sum\limits_{j=1}^{i} h_j$, $\delta_{i-1} \le z \le \delta_i$, $i = \overline{1, l}$.

Деформации слоев определяют согласно формулам Коши, а напряжения и деформации в слоях в соответствии с гипотезой Дюамеля – Неймана связаны законом Гука [15].

Уравнения термоупругого равновесия многослойной оболочки

$$[\mathbf{\Lambda}]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P}, \quad (x,y) \in \Omega \tag{19}$$

и граничные условия на контуре Γ

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x,y) \in \Gamma \tag{20}$$

получены из принципа возможных перемещений [15].

Элементы симметричной матриц $[\mathbf{\Lambda}]$ и $\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]$ приведены в работе [11], $\mathbf{U}$ – вектор, компонентами которого являются функции (18):

$$\mathbf{P}_T = \left\{C^l_{1T,x}, C^l_{2T,y}, -C^l_{2T}/R, D^i_{1T,x}, D^i_{2T,y}, -C^i_{1T} - D^i_{2T}/R\right\};$$

$$\mathbf{P}^{\Gamma} = \left\{C^l_{1T} l_x^2 + C^l_{2T} l_y^2, \left(C^l_{1T} - C^l_{2T}\right) l_x l_y, 0, D^i_{1T} l_x^2 + D^i_{2T} l_y^2, \left(D^i_{1T} - D^i_{2T}\right) l_x l_y, 0\right\};$$

$$C^l_{1T} = \sum_{i=1}^{l} N^i_{1T}, \quad C^l_{2T} = \sum_{i=1}^{l} N^i_{2T}, \quad D^i_{1T} = h_i \sum_{j=i}^{l-1} N^{j+1}_{1T} + M^i_{1T};$$

$$D^i_{2T} = h_i \sum_{j=i}^{l-1} N^{j+1}_{2T} + M^i_{2T}, \quad N^i_{1T} = \frac{E_i \alpha^i_T}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz;$$

$$N^i_{2T} = \frac{E_i \alpha^i_T}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz, \quad M^i_{1T} = \frac{E_i \alpha^i_T}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz;$$

$$M^i_{2T} = \frac{E_i \alpha^i_T}{1-\nu_i} \int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz,$$

где R – радиус оболочки; l_x, l_y – направляющие косинусы нормали к контуру Γ; E_i – модуль Юнга материала i-го слоя; ν_i – коэффициент Пуассона; α^i_T – коэффициент линейного температурного расширения материала *i*-го слоя; $T_i = T_i(x, y, z)$ – функция приращения температуры относительно начала отсчета.

В основу решения краевой задачи (19), (20) положен метод погружения [11, 12]. Оболочка сложной формы (область Ω) погружается во вспомогательную многослойную цилиндрическую незамкнутую шарнирно опертую оболочку прямоугольной формы в плане с такой же композицией слоев.

Чтобы обеспечить выполнение заданных граничных условий (20), к вспомогательной оболочке прилагаются дополнительные компенсирующие нагрузки $\mathbf{Q}^{comp} = \left\{q_j^{comp}(x, y, t)\right\}, \quad j = \overline{1, 3I + 3}$, распределенные вдоль контура Γ.

Таким образом, исходная краевая задача (19), (20) преобразуется в задачу об изгибе вспомогательной шарнирно опертой оболочки прямоугольной формы в плане и описывается:

– системой уравнений термоупругого равновесия

$$[\mathbf{\Lambda}]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}^T - \mathbf{P} - \mathbf{P}^{comp}, \tag{21}$$

– граничными условиями на контуре прямоугольной оболочки

$$\left[\mathbf{B}^r\right] \mathbf{U} = 0, \quad x = 0, A, \quad y = 0, B, \tag{22}$$

– условиями на контуре Γ

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma\right] \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{23}$$

В уравнения термоупругого равновесия оболочки (21) компенсирующие нагрузки входят в виде следующих интегральных соотношений:

$$p_j^{comp}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_\Gamma L_{jk}\, q_k^{comp}(s, t)\, \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)\, ds. \tag{24}$$

С учетом соотношений (24) система (21)–(23) преобразуется в систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Неизвестными функциями являются функции перемещений $\mathbf{U}$ (18) и компенсирующих нагрузок $\mathbf{P}^{comp}$ (24).

Метод решения системы (21)–(23) состоит в разложении функций перемещений, заданных и компенсирующих нагрузок в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям оболочки прямоугольной формы в плане

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn} B_{jmn}(x, y); \quad p_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn} B_{jmn}(x, y);$$

$$p_{T\,j}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^T B_{jmn}(x, y);$$

$$p_j^{comp}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{comp} B_{jmn}(x, y), \ j = \overline{1, 3I + 3};$$

$$B_{1mn} = \cos\alpha_m x \sin\beta_n y,\ B_{2mn} = \sin\alpha_m x \cos\beta_n y;$$
$$B_{3mn} = \sin\alpha_m x \sin\beta_n y,\ B_{3+i\ mn} = B_{1mn},\ B_{3+l+i\ mn} = B_{2mn};$$
$$B_{3+2l+i\ mn} = B_{3mn},\ \alpha_m = m\pi/A,\ \beta_n = n\pi/B,\ i = \overline{1,l},$$

где A – длина образующей вспомогательной оболочки; B – длина дуги этой оболочки.

В результате система (21) для каждой пары значений m и n сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left[\mathbf{\Lambda}^{mn}\right]\mathbf{\Phi}_{mn} = \mathbf{P}_{mn} - \mathbf{P}_{mn}^{T} + \mathbf{P}_{mn}^{comp}, \tag{25}$$

где $\mathbf{\Phi}_{mn} = \left\{\phi_{jmn}\right\}$, $\mathbf{P}_{mn} = \left\{p_{jmn}\right\}$, $\mathbf{P}_{mn}^{T} = \left\{p_{jmn}^{T}\right\}$, $\mathbf{P}_{mn}^{comp} = \left\{p_{jmn}^{comp}\right\}$.

С учетом решения системы (25) решение системы (21) запишется в форме

$$u_j(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3l+3}\Delta_{jk}^{mn}\left(p_{jmn} - p_{jmn}^{T} + p_{jmn}^{comp}\right)B_{jmn}(x,y). \tag{26}$$

Здесь Δ_{jk}^{mn} – элементы матрицы $\left[\mathbf{\Lambda}^{mn}\right]^{-1}$, $j = \overline{1,3l+3}$.

Функции компенсирующих нагрузок $\mathbf{P}^{comp} = \left\{p_j^{comp}(x,y)\right\}$ также разлагаются в ряд вдоль следа контура Γ [8, 10]:

$$p_j^{comp}(\varphi) = \sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty} p_{j\alpha\mu}\, b_{\alpha\mu}(\varphi), \quad j = \overline{1,3l+3}, \tag{27}$$

где

$$b_{1\mu} = \sin\left[\mu\gamma(\varphi)\right],\ b_{2\mu} = \cos\left[\mu\gamma(\varphi)\right], \quad 0 \le \gamma(\varphi) \le 2\pi.$$

Граничные функции, входящие в систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (23), также разлагаются в ряд вдоль следа контура Γ [11, 12]. В итоге система (23) с учетом зависимости (26) и разложения (27) приобретает вид системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения компенсирующих нагрузок в ряд вдоль следа контура Γ. Порядок полученной системы зависит от числа слоев в оболочке l и количества членов ряда, удерживаемых в разложении (27). После определения компенсирующих нагрузок вычисляются перемещения (26) в слоях исходной оболочки.

В качестве иллюстрации работоспособности и эффективности разработанного метода решена задача термоупругости пятислойной оболочки, контур которой составлен из отрезков прямых и сопряженных с ними дуг окружностей.

На рис. 2 приведена расчетная схема оболочки радиусом 2,5 м с такими геометрическими параметрами: $l_1 = 0{,}88$ м; $l_2 = 0{,}16$ м; $l_3 = 0{,}61$ м; $l_4 = 0{,}26$ м; $R_k = 0{,}03$ м; $k = \overline{1,4}$. Слои оболочки выполнены из материалов со следующими характеристиками: $E_i = 6{,}8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0{,}22$, $\alpha_T^i = 9 \cdot 10^{-6}$°С-1, $i = 1, 3, 5$; $E_i = 2{,}2 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_i = 0{,}38$, $\alpha_T^i = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$°С-1, $i = 2, 4$; $h_1 = 0{,}005$ м, $h_2 = 0{,}003$ м, $h_3 = 0{,}012$ м, $h_4 = 0{,}002$ м, $h_5 = 0{,}008$ м. Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют.

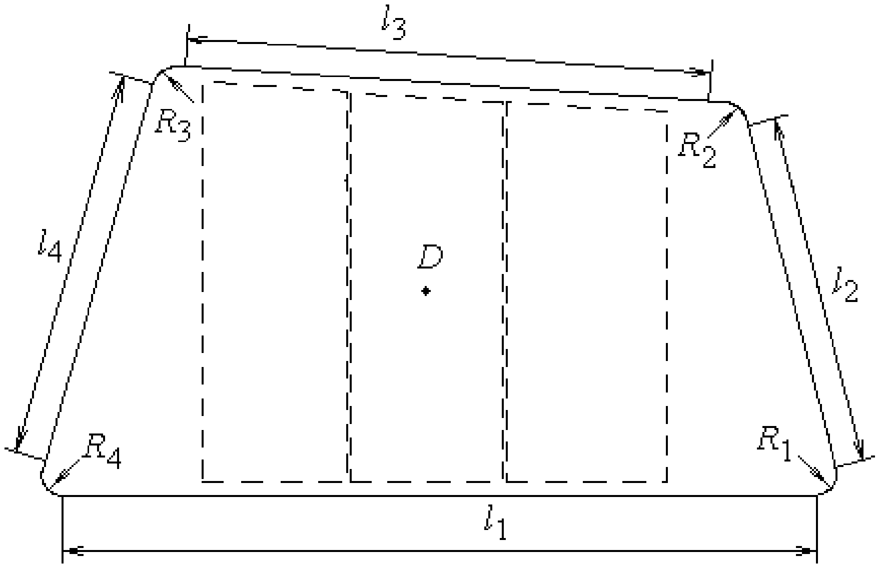

Рисунок 2 – Расчетная схема оболочки

Поле температурных нагрузок получено из решения нестационарной задачи теплопроводности многослойных оболочек [11] с учетом воздействия пленочного источника. Боковая поверхность оболочки считается идеально теплоизолированной. Задача теплопроводности решена при таких исходных данных: $k_i = 1{,}08$ Вт/(м·°С), $i = 1, 3, 5$; $k_i = 0{,}22$ Вт/(м·°С), $i = 2, 4$ (коэффициенты теплопроводности материала i-го слоя); $H_1 = 433$ Вт/(м^2·°С), $H_2 = 20$ Вт/(м^2·°С) (коэффициенты конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки); $T_1 = -30^o C$, $T_2 = 20^o C$ (температура среды на границе с верхней и нижней поверхностями). Пленочный источник тепла мощностью $q = 6$ кВт/м^2 расположен между первым и вторым слоями оболочки. Расположение источника показано штриховой линией.

На рис. 3 представлено распределение температуры T и главного напряжения σ_1^i ($i = \overline{1, I}$) по толщине оболочки в точке D, а также показана композиция слоев. Напряжения получены для температурного распределения в момент времени, когда температура на поверхности с источником достигает наибольшего значения. На поверхности раздела первого и второго слоев оболочки наблюдается резкое изменение температуры и напряжения, вызванное наличием источника тепла. При этом напряжение не превышает своего допустимого значения.

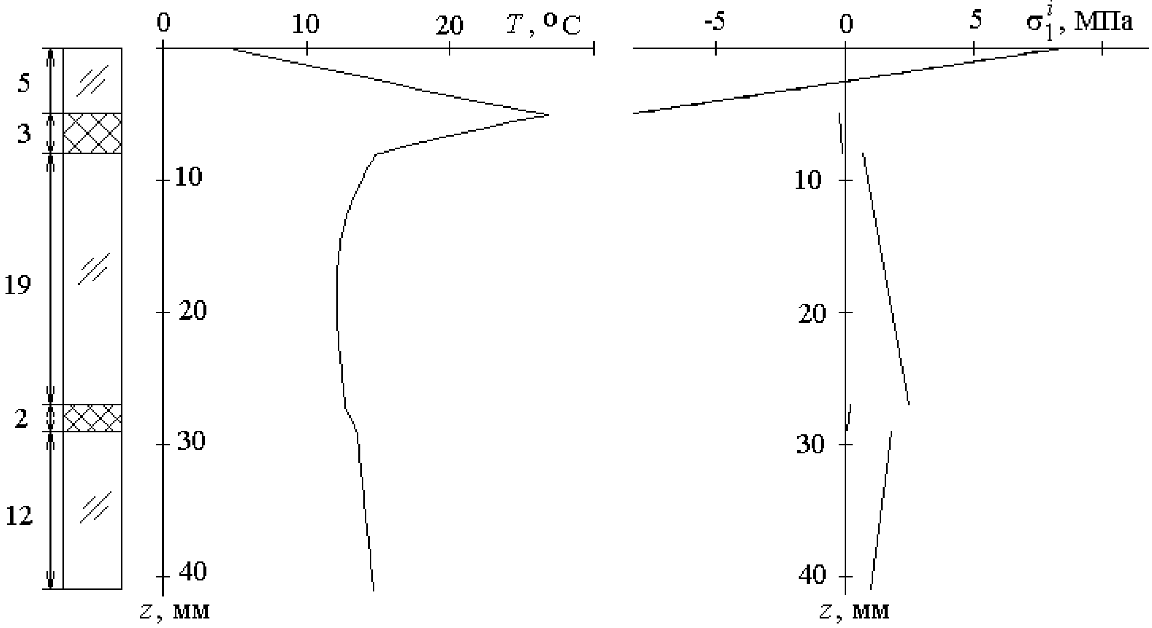

Рисунок 3 – Распределение температуры и напряжений в слоях оболочки

Таким образом, предложен метод решения задач термоупругости многослойных цилиндрических оболочек, который позволяет достоверно описывать напряженно-деформированное состояние многослойных элементов, собранных из слоев с различными механическими и геометрическими характеристиками. Представление решения в аналитическом виде позволяет изучить его структуру, выявить присущие ему свойства и особенности. В дальнейшем будет исследовано состояние оболочек при воздействии температурных полей, полученных из решения задачи теплопроводности многослойных оболочек.

Список использованных источников

1. Федик, И.И. Температурные поля и термонапряжения [Текст] / И.И. Федик, В.С. Колесов, В.Н. Михайлов. – М.: Энергоатомиздат, 1985.– 280 с.

2. Боли, Б. Теория температурных напряжений [Текст] / Б. Боли, Дж. Уэйнер.– М.: Мир, 1964.– 517 с.

3. Александров, А.Я. Решение плоских и пространственных основных задач теории упругости методом компенсирующих нагрузок [Текст] / А.Я. Александров // Механика деформируемых тел.– Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1985.– С. 38 – 47.

4. Мотовиловец, И.А. О напряженном состоянии нагреваемой источником тепла пластины [Текст] / И.А. Мотовиловец // Прикл. механика.– 1995.– Т. 31, № 5.– С. 62–67.

5. Рвачев, В.Л. К решению одной задачи термоупругости для тонких изотропных пластин сложной геометрии [Текст] / В.Л. Рвачев,

В.П. Тицкий, А.Н. Шевченко // Матем. методы и физико-механич. поля.– 1984.– Вып. 19.– С. 62–65.

6. Туровцев, Г.В. Итерационный метод граничных интегральных уравнений для исследования изгиба температурного изгиба пластин [Текст] / Г.В. Туровцев, А.Т. Шадманов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов.– Н. Новгород, 1991.– С. 35–39.

7. Verijenko, V.E. Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems [Текст] / V.E. Verijenko, T.R. Tauchert, C. Shaikh, P.Y. Tabakov // J. Thermal Stresses. – 1999. – V. 22, № 1. – P. 75 – 100.

8. Barut, A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution [Текст] / A. Barut, E. Madenci, A. Tessler // Int. J. Solids and Structures.– 2000. – V. 37, № 27.– P. 3681 – 3713.

9. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях [Текст] / В.А. Кудинов, Б.В. Аверин, Е.В. Стефанюк, С.А. Назаренко. – Самара: Самар. ГТУ, 2006. – 304 с.

10. Oguamanam, D.C.D. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels [Текст] / D.C.D. Oguamanam, J.S. Hansen, G.R. Heppler // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004.– V. 71, № 1.– P. 49 – 56.

11. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация [Текст] / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Х.: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с.

12. Smetankina, N.V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment [Текст] / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2008.– V. 75, № 5. – P. 051004-1 – 051004-9.

13. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища шк., 1980. – 480 с.

14. Shupikov, A.N. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates [Текст] / A.N. Shupikov, N.V. Smetankina, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. Heat Transfer.– 2007. – V. 129, № 3. – P. 335 – 341.

15. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / К. Васидзу.– М.: Мир, 1987.– 542 с.

Поступила в редакцию 27.01.2014.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.