УДК 629.78.783

А.С. Назаров, канд. техн. наук

УПРАВЛЕНИЕ КРАТНОЙ МИНИМАЛЬНО-ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМОЙ ГИРОДИНОВ

Рассматривается гиросиловая система (ГСС) ориентации спутника [1], в состав которой входят две ортогонально расположенные группы двухстепенных силовых гироскопов — гиродинов. Каждая типовая группа объединяет по два одинаковых гиродина с параллельными осями прецессии и может создавать управляющие моменты относительно двух осей спутника. В кратных ГСС возникает задача о распределении функций управления между отдельными группами или задача о выборе критерия самонастройки [2]. Анализ показывает, что принцип равномодульного управления неосуществим во всей области S изменения вектора кинетического момента ГСС. Этого недостатка позволяют избежать критерии настройки, оптимизирующие размеры области W изменения вектора управляющего момента ГСС [3, 4]. Предлагается алгоритм управления гиродинамики, обеспечивающий настройку на максимум площади области W типовой группы. Алгоритм реализуется во всей области S.

Предположим, что оси прецессии первой группы гиродинов параллельны оси Oz, а оси второй группы параллельны оси Oy связанной системы координат $Oxyz$. Положение векторов кинетических моментов гиродинов $G_i, \left(i = \overline{1,4}\right)$ в связанной системе координат определяется углами прецессий β_i, которые отсчитываются от оси Ox, или единичными векторами g_1, g_2, g_3, g_4. Положительному направлению отсчета углов прецессии соответствует вращение векторов g_1, g_2 в сторону оси Oy, а векторов g_3, g_4 – в сторону оси Oz.

Вектор кинетического момента первой группы $H_{12} = Gg_{12}$, где $g_{12} = g_1 + g_2$, перемещается в координатной плоскости Oxy, вектор кинетического момента второй группы $H_{34} = Gg_{34}$, где $g_{34} = g_3 + g_4$, перемещается в плоскости Oxz. Проекции вектора кинетического момента ГСС $H = Gg$, где $g = g_{12} + g_{34}$, на оси $Oxyz$ равны

$$\begin{gathered} H_x = Gx, H_y = Gy, H_z = Gz, \\ x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \; y = y_1 + y_2, \; z = z_3 + z_4, \end{gathered} \tag{1}$$

где $g = (x, y, z)$ – вектор кинетического момента ГСС в относительных единицах.

Поверхность области S изменения вектора g описывается системой уравнений

$$x^2+y^2+z^2-2\cdot\left[\left(4-y^2\right)\cdot\left(4-z^2\right)\right]^{0,5}-8=0,\ x^2+y^2\geq 4;$$
$$x^2+z^2\geq 4,\ |y|-2=0,\ x^2+z^2\leq 4,\ |z|-2=0,\ x^2+y^2\leq 4.$$

Проекции вектора управляющего момента системы гиродинов, установленной на неподвижном основании, $M=Gm$, где $m=-dg/dt$, можно получить дифференцированием равенств (1)

$$M_x=G\dot{x},\ M_y=G\dot{y},\ M_z=G\dot{z};$$

где $\dot{x}=y_1\dot{\beta}_1+y_2\dot{\beta}_2+z_3\dot{\beta}_3+z_4\dot{\beta}_4$; $\dot{y}=-x_1\dot{\beta}_1-x_2\dot{\beta}_2$; $\dot{z}=-x_3\dot{\beta}_3-x_4\dot{\beta}_4$.

Задача управления гиродинамики заключается в нахождении скоростей прецессии $\lambda_i=\dot{\beta}_i$, обеспечивающих реализацию требуемого вектора управления космическим аппаратом. Искомые скорости прецессии λ_i должны удовлетворять избыточной системе уравнений:

$$\begin{aligned}&\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3+\lambda_4y_4=m_1;\\&\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=-m_2;\ \lambda_3x_3+\lambda_4x_4=-m_3.\end{aligned}\qquad(2)$$

где $m=(m_1,m_2,m_3)$ – вектор управления, отнесенный к кинетическому моменту гиродина.

Система уравнений (2), дополненная уравнением настройки $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2-\lambda_3z_3-\lambda_4z_4=m_4$, распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned}&\lambda_1y_1+\lambda_2y_2=m_{12};\ \lambda_3z_3+\lambda_4z_4=m_{34};\ \lambda_1x_1+\lambda_2x_2=-m_2;\\&\lambda_3x_3+\lambda_4x_4=-m_3;\ m_{12}=(m_1+m_4)/2;\ m_{34}=(m_1-m_4)/2.\end{aligned};\qquad(3)$$

где m_4 – подлежащая определению функция управления.

Компоненты вектора управления m_{12} и m_2 реализуются первой группой гиродинов, компоненты m_{34} и m_3 – второй группой. Область W_1 изменения вектора управляющего момента первой группы площадью $F_1=4G^2\lambda^2|g_1\times g_2|$, где λ – максимальная скорость прецессии, расположенная в плоскости Oxy, имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах g_1 и g_2, и повернутого относительно последнего на угол $\pi/2$. Аналогично область W_2 второй группы площадью $F_2=4G^2\lambda^2|g_3\times g_4|$ расположена в плоскости Oxz и имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах g_3 и g_4.

Возможности самонастройки минимально избыточной ГСС весьма ограничены и сводятся к распределению кинетического ГСС по оси Ox

между двумя группами. Пусть x_{12}^* и x_{34}^* – оптимальные значения кинетических моментов первой и второй групп по оси Ox, а $\Delta = x_{12}^* - x_{34}^*$ – оптимальная разность. Если вектор кинетического момента ГСС $g = (x, y, z)$ задан и оптимальная разность известна, то из равенств (1) получим систему уравнений для определения углового положения векторов g_i:

$$x_1 + x_2 = x_{12}^*;\ x_3 + x_4 = x_{34}^*;\ y_1 + y_2 = y;\ z_3 + z_4 = z;$$
$$x_{12}^* = (x + \Delta)/2;\ x_{34}^* = (x - \Delta)/2.$$

Отсюда будем имеем

$$cos\,\beta_{1,2} = 0{,}5x_{12}^* \pm y \cdot \left[1/\left(\left(x_{12}^*\right)^2 + y^2\right) - 1/4\right]^{0,5};$$
$$cos\,\beta_{3,4} = 0{,}5x_{34}^* \pm z \cdot \left[1/\left(\left(x_{34}^*\right)^2 + z^2\right) - 1/4\right]^{0,5}.$$

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности $\Delta = \Delta(x, y, z)$ из условия $\min\limits_{\Delta}\{F_1, F_2\} = max$. Оно равносильно условию

$$\min_{\Delta}\{f_1, f_2\} = max, \tag{4}$$

где $f_1 = |g_1 \times g_2|$, $f_2 = |g_3 \times g_4|$ – площади ромбов, построенных на векторах g_1, g_2 и g_3, g_4, численно равные определителям двух систем уравнений (3).

В частном случае условие (4) совпадает с условием $f_1(x, y, \Delta) = f_2(x, y, \Delta)$ или

$$|g_{12} \cdot d_{12}| = |g_{34} \cdot d_{34}|,\ d_{12} = g_1 - g_2,\ d_{34} = g_3 - g_4, \tag{5}$$

где d_{12}, d_{34} – диагонали ромбов, построенных на векторах g_1, g_2 и g_3, g_4.

Подставляя в (5) соотношения

$$g_{12}^2 = x_{12}^2 + y^2,\ g_{34}^2 = x_{34}^2 + z^2,\ d_{12}^2 = 1 - g_{12}^2/4,\ d_{34}^2 = 1 - g_{34}^2/4,$$
$$x_{12} = (x + \Delta)/2,\ x_{34} = (x - \Delta)/2,$$

получим уравнение, которому удовлетворяет оптимальная разность

$$\begin{gathered} x\Delta^3 + \left(y^2 - z^2\right)\Delta^2 + x\left(x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 8\right)\Delta + \\ + \left(y^2 - z^2\right)\left(x^2 - 8\right) + 2\left(y^4 - z^4\right) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

В качестве оптимальной разности выбираем один из трех корней уравнения (6), обеспечивающий максимальные площади ромбов f_1 и f_2. Решения уравнения (6) можно найти, если воспользоваться вытекающими из (5) равенствами

$$g_{12} = g_{34} \tag{7}$$

или

$$d_{12} = d_{34}. \tag{8}$$

Искомая разность

$$\Delta = \left(z^2 - y^2\right)/\,x, \tag{9}$$

найденная из равенства (7), реализует принцип равномодульного управления.

Подставив (9) в соотношения

$$g_{12} = \left[(x+\Delta)^2/4 + y^2\right]^{0,5} \le 2,\ g_{34} = \left[(x-\Delta)^2/4 + z^2\right]^{0,5} \le 2,$$

получим неравенства

$$\left(x^2 + z^2 - y^2\right)^2 + 4x^2y^2 \le 16x^2,\ \left(x^2 + y^2 - z^2\right)^2 + 4x^2z^2 \le 16x^2,$$

определяющие область V_1 допустимости равномодульного управления.

Обозначим через $\overline{V_1}$ область, в которой принцип равномодульного управления не выполняется. В частности, принцип равномодульного управления не позволяет найти оптимальную разность при нулевом кинетическом моменте ГСС.

Другие корни уравнения (6) находим из условия (8):

$$\Delta = \pm\left[8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2\right]^{0,5}. \tag{10}$$

Для определенности полагаем, что в исходном состоянии при нулевом кинетическом моменте ГСС $\Delta = 2\sqrt{2}$, при этом $x_{12} > 0,\ x_{34} < 0$.

Равенство (10) сохраняет смысл, пока подкоренное выражение остается положительным. Следовательно, равенство (8) и оптимальная разность (10) могут быть реализованы внутри области V_2, ограниченной поверхностью эллипсоида

$$\left(x/2\sqrt{2}\right)^2 + (y/2)^2 + (z/2)^2 = 1. \tag{11}$$

Равенство площадей ромбов (5) выполнимо внутри области $V_3 = V_1 \cup V_2$.

Обозначим через $V_{12} = V_1 \cap V_2$ пересечение областей V_1 и V_2, а через $V_4 = V_2 \cap \overline{V_1}$ – пересечение областей V_2 и $\overline{V_1}$. В области V_{12} могут быть выполнены как равенство (7), так и равенство (8). Величины, полученные из равенства (7), будем обозначать одним штрихом, а найденные из равенства (8) – двумя штрихами. Из двух разностей Δ' (9) и Δ'' (10) в качестве оптимальной следует выбрать ту, которая обеспечит большую площадь ромбов, построенных на векторах g_i.

Исследуем движение вектора g кинетического момента ГСС из некоторой исходной точки, расположенной в координатной плоскости Oyz, до границы области S. Полагаем, что конец вектора g перемещается по прямой, параллельной оси Ox $(x > 0)$, при этом переменные y, z рассматриваются как параметры. Исходная точка расположена в области $V_4 \in V_2$, если ее координаты удовлетворяют условию $y^2 + z^2 \le 4$. Предположим сначала, что это условие выполнено и $|y| < |z| < \sqrt{2}$. По мере нарастания x вектор g переходит из области V_4, где выполняется условие (8), в область V_{12}. В этой области площади f_1'', f_2'', найденные из равенства (8), как функции x возрастают, достигают максимума $f_{1max}'' = f_{2max}'' = 1$ при $x = \left(2 - y^2\right)^{0,5} - \left(2 - z^2\right)^{0,5}$, затем убывают и достигают минимума $f_{1min}'' = f_{2min}'' = |z| \left(4 - z^2\right)^{0,5} / 2$ при $x_{34}'' = 0$.

Площади f_1', f_2', найденные из равенства (4), как функции x возрастают и достигают максимума при $x = \left(2 - y^2\right)^{0,5} - \left(2 - z^2\right)^{0,5}$. Величина x, начиная с которой реализуется равенство (7), определяется условием $f_2'' = f_2'$, что эквивалентно $g_{34}'' = g_{34}'$ или $x_{34}'' = x_{34}'$. Отсюда

$$x = \left(\Delta' - \Delta''\right) / 2. \tag{12}$$

Подставляя в (12) соотношения для Δ' (9) и Δ'' (10), найдем координату точки перехода от равенства (8) к равенству (7):

$$x_n^2 = \left\{4 + z^2 - 3y^2 + \left[\left(4 + z^2 - 3y^2\right)^2 - 5\left(y^2 - z^2\right)^2\right]^{0,5}\right\} / 5. \tag{13}$$

Переход осуществляется раньше, чем площадь f_2'' достигнет своего минимума. Дальнейшее движение до границы области S осуществляется за счет равномодульного управления при оптимальной разности (9).

Исследуем область параметров $|z| \ge \sqrt{2} > |y|$. С увеличением x векторы g_{12} и g_{34} поворачиваются в сторону оси Ox, площадь f_2'' возрастает и достигает максимума $f_{2max}'' = |z| \left(4 - z^2\right)^{0,5} / 2$ при $x = \Delta$ $\left(x_{34}'' = 0\right)$. Дальнейшее выполнение земства (8) возможно лишь за счет встречного движения векторов, что приводит к вырождению ромбов и уменьшению площадей f_1 и f_2 до нуля. Поэтому в точке $x = \Delta$ целесообразно перейти к условию (4). Подставив в равенство $x = \Delta$ соотношение (10), получим условие такого перехода:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 4. \tag{14}$$

После точки перехода увеличение вектора g осуществляется только за счет вектора g_{12}. Вектор g_{34} остается неподвижным, и площадь f_2 сохраняет максимальное значение. Площадь f_1 увеличивается, достигает максимума $f_{1max} = 1$ при $x = x_{12} = \left(2 - y^2\right)^{0,5}$, затем уменьшается. На этом участке реализуется оптимальная разность $x = \Delta$. При выполнении условия

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad (15)$$

площадь f_1 уменьшится до f_2. Затем до границы области S осуществляется равномодульное управление.

Таким образом, внутри области V_2 существует область $\overline{V}_2$, в которой критерий оптимальности (4) обеспечивает большую площадь ромбов, чем критерий (5).

Область $\overline{V}_2$ расположена внутри конуса (15) между поверхностями эллипсоида (11) и сферы (14).

Если $y^2 + z^2 > 4$, то исходная точка из области V_3 перемешается в область $\overline{V}_3$, в которой равенство площадей ромбов не выполнимо. В исходном состоянии векторы g_{12} и g_{34} вытянуты вдоль осей Oy и Oz. Когда $|z| > |y|$, то $f_1 > f_2$. Начальное движение вектора g осуществляется только за счет изменения одного вектора g_{12}, а вектор g_{34} остается неподвижным. При выполнении условия (15) площади ромбов становятся равными, траектория кинетического момента из области $\overline{V}_3$, переходит в область V_1, и далее до границы области S осуществляется равномодульное управление. В диапазоне $0 < x < \left(z^2 - y^2\right)^{0,5}$ оптимальная разность реализуется в виде $\Delta = x$. Область $\overline{V}_3$ расположена внутри конуса (15) между поверхностями области S и эллипсоида (11).

Оптимальная разность $\Delta = x$ реализуется внутри области V_5, образуемой за счет суммирования областей $\overline{V}_2$ и $\overline{V}_3$. Обобщим полученные результаты. При $x > 0$ и $|z| > |y|$ оптимальная разность может принимать три значения: $\Delta_1 = \left[8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2\right]^{0,5}$, если выполняется одно из двух условий $x < x_n$, и $|z| < \sqrt{2}$ или $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ и $|z| \geq \sqrt{2}$; $\Delta_2 = \left|z^2 - y^2\right| / x$, если выполняется одно из двух условий $x \geq x_n$ и $|z| < \sqrt{2}$ или $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$ и $|z| \geq \sqrt{2}$; $\Delta_3 = x$, если одновременно выполняются условия $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 - z^2 < 0$ и $|z| \geq \sqrt{2}$.

Исследуем движение векторов g_{12} и g_{34} при $x < 0$. В отличие от предыдущего случая движение вектора кинетического момента ГСС вдоль отрицательного направления оси Ox вызывает уменьшение площадей ромбов, построенных на векторах g_i. Чтобы этого не происходило, целесообразно изменить исходное положение векторов, т. е. вектор g_{12} расположить слева от координатной плоскости Oyz, а вектор g_{34} – справа. Для определения оптимальных разностей можно воспользоваться результатами, полученными выше. В расчетной формуле (13) следует поменять местами параметры y и z, а в качестве оптимальной разности для исходного состояния использовать корень (10) из уравнения (6) со знаком минус. Новые формулы справедливы и для случая $|y| > |z|$ и $x > 0$.

Таким образом, область S разделяется на ряд областей, внутри которых реализуется одна из оптимальных разностей.

Иногда может оказаться нежелательной перестройка ГСС при малых компонентах вектора кинетического момента x, y, z ($|y| > |z|, x > 0$). Тогда замена оптимальной разности при $x = 0$, обязательная для строгого выполнения критерия оптимальности (4), не проводится. Переход к равномодульному управлению осуществляется при $x \geq x_n$. В диапазоне $0 < x < x_n$ обеспечивается равенство площадей ромбов без их максимизации. Такой переход возможен до тех пор, пока подкоренное выражение в формуле (13) остается положительным.

Отсюда получим ограничение на величину компоненты $y : y^2 < 0{,}76 + 0{,}62z^2$. Временный отказ от строгого выполнения критерия оптимальности (4) позволяет осуществить различные варианты управления, учитывающие дополнительные требования к ГСС.

Область W ГСС, состоящей из двух типовых групп гиродинов, представляет собой 12-гранник (в частном случае ромбододекаэдр), гранями которого являются ромбы с длиной сторон $2G\lambda$. Обозначим через $r_i = dg_i / dt$ — единичные векторы, определяющие линии действия векторов управляющих моментов гиродинов. Объем Q области W численно равен суммарному объему двух параллелепипедов, построенных на векторах $r_1, r_2, r_3 - r_4$ и $r_3, r_4, r_1 - r_2$:

$$Q = 8G^3\lambda^3 \{|(r_1 - r_2)(r_3 \times r_4)| + |(r_3 - r_4)(r_1 \times r_2)|\}.$$

Оптимизация площадей ромбов f_1 и f_2 позволяет поддерживать объем области W, близким к максимальному. Так, в исходном состоянии (при нулевом кинетическом моменте) объем области W, реализуемый при выполнении критерия оптимальности (4), составляет 0,93 от максимального объема ромбододекаэдра.

После выбора оптимальной разности можно определить функцию управления, входящую в уравнение настройки. Если контур самонастройки ГСС формируется по принципу пропорционального регулятора, то скорость изменения текущей разности кинетических моментов двух типовых групп $\dot{x}_{12} - \dot{x}_{34}$ пропорциональна рассогласованию между оптимальной и фактической разностями кинетических моментов $\Delta - \left(x_{12} - x_{34}\right)$. Уравнение настройки ГСС запишем в виде $\tau\left(\dot{x}_{12} - \dot{x}_{34}\right) + \left(x_{12} - x_{34}\right) = \Delta$, где τ – постоянная времени. Сравнивая эту запись с уравнением настройки, дополняющим избыточную систему, получим выражение для функции управления $m_4 = -\left(\Delta - x_{12} + x_{34}\right)/\,\tau$.

Скорости прецессии гиродинов, найденные как решения систем уравнений, содержат две составляющие. Одна из них определяет долю гиродина в реализации вектора управления космическим аппаратом, другая составляющая участвует в настройке ГСС на заданный критерий оптимальности. Нужное соответствие между ними устанавливается подбором постоянной времени τ, которая влияет на скорость самонастройки.

Выводы

Синтезированный алгоритм управления гиродинамики обеспечивает настройку на максимум площади области типовой группы. Каждая типовая группа объединяет по два одинаковых гиродина с параллельными осями прецессии и может создавать управляющие моменты относительно двух осей спутника.

Список использованных источников

1. Драновский, В.И. Динамика космического аппарата с гравитационно-гироскопической системой стабилизации при переориентации / В. И. Драновский, А. Е. Закржевский, В. С. Хорошилов // Техническая механика. — 2006. — № 1. — С. 3—15.
2. Закржевский, А. Е. Динамика космического аппарата с гирогравитационной системой стабилизации при развертывании упругой кольцевой антенны / А. Е. Закржевский, В. С. Хорошилов // Космічна наука і технологія. — 2011. — Т. 17, № 5. — С. 3—18.
3. Игнатов, А. И. Построение и анализ особых поверхностей систем безупорных гиродинов методом продолжения по параметру / А. И. Игнатов, В. В. Сазонов // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2007. — № 27. — 28 с.
4. Сомов, Е. И. Топологический анализ сингулярных состояний и синтез явных законов настройки силовых гирокомплексов кратных схем / Е. И. Сомов // Известия Самарского науч. центра РАН. — 2009. — Т. 11, № 3. — С. 131—140.

Поступила в редакцию 10.06.2015.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.С. Кулик,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.