

УДК 623.463.2

В.И. Макеев, канд. техн. наук,  
 Ю.И. Пушкарёв, канд. воен. наук,  
 В.В. Воронько, д-р. техн. наук,  
 Д.И. Завистовский, канд. техн. наук

## МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НАБЛЮДЕНИЯ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

Построение математических моделей движения объектов наблюдения связано с выбором системы координат, которая определяется особенностями решаемых задач. С формальной точки зрения выбор той или иной системы координат не имеет принципиального значения. Однако удачный выбор системы координат может значительно упростить решение конечных задач и учесть их специфику.

Анализ систем координат, используемых во внешней баллистике, показывает, что наиболее приемлемой является нормальная земная система координат, являющаяся прямоугольной правой. Выбор указанной системы координат обусловлен также составом измеряемых параметров состояния объекта наблюдения [1, 2].

### Основная часть Модель нормальной артиллерийской атмосферы

Атмосфера представляет собой смесь газов, водяного пара и некоторого количества аэрозолей. Для решения задач определения координат точек вылета (падения) объектов наблюдения необходимо учитывать следующие параметры состояния атмосферы: температуру, давление, плотность воздуха, а также скорость и направление ветра.

Уравнение состояния, связывающее основные параметры атмосферы, имеет вид [1]

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (1)$$

где  $p$  – давление воздуха, Па;

$\rho$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;

$T$  – абсолютная температура воздуха, К;

$R$  – удельная газовая постоянная, Дж/кг·К;

$R = 287,05287$ .

В артиллерии принято давление воздуха измерять в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.) или в миллибарах (мб), а температуру – в градусах Цельсия.

Соотношения между единицами измерения давления и шкалами температур:

$$1\text{мб} = 100\text{Па} = 0,75\text{мм.рт.ст.};$$

$$T = 273,15 + t^{\circ}\text{C}.$$

В основу нормальной артиллерийской атмосферы (НАА) Д.А. Вентцелем положен характер изменения виртуальной температуры в зависимости от высоты (координаты „ $y$ ” для нормальной земной системы координат).

Уравнение состояния воздуха, содержащего водяной пар, имеет вид (1), в котором газовая постоянная соответствует влажному воздуху. Однако при рассмотрении влажного воздуха можно использовать газовую постоянную сухого воздуха, заменяя в связи с этим действительную температуру  $T$  виртуальной температурой воздуха  $\tau$ .

Уравнение состояния влажного воздуха [1]:

$$\frac{p}{\rho} = R\tau, \quad (2)$$

$$\text{где } \tau = \frac{T}{1 - \frac{3e}{8\rho}};$$

$e$  – упругость воздуха.

Характер изменения виртуальной температуры воздуха в НАА описывается такими зависимостями:

$$T_N(y) = 289 - 6,328 \cdot 10^{-3}; 0 < y < 9324\text{м};$$

$$T_N(y) = 230 - 6,328 \cdot 10^{-3}(y - 9324) + 1,172 \cdot 10^{-6}(y - 9324)^2; \\ 9324 < y \leq 12000\text{м}; \quad (3)$$

$$T_N = 221,5; y > 12000\text{м}.$$

В НАА приняты следующие значения метеорологических элементов у поверхности Земли на уровне моря

$$(y = 0) : t^{ON} = +15^{\circ}\text{C}; T^{ON} = 289\text{K};$$

$$p^{ON} = 750\text{мм.рт.ст.} = 1000\text{мб}; \quad (4)$$

$$\rho^{ON} = 1,2054\text{кг} / \text{м}^3;$$

влажность воздуха – 50%;

скорость ветра на всех высотах равна нулю;

ускорение силы тяжести  $g(y) - g_{ON} = 9,80665\text{м} / \text{с}^2$ .

Число Маха, используемое при интегрировании системы дифференциальных уравнений движения центра масс снаряда,

$$M = \frac{V}{a}, \quad (5)$$

где  $V$  – скорость движения центра масс снаряда;  $a$  – скорость звука в атмосфере;  $a = \sqrt{\kappa RT}$ ;  $\kappa = 1,4$  – показатель адиабаты для воздуха.

Относительные значения давления и плотности воздуха в зависимости от высоты вычисляются по формулам [1]:

$$\pi(y) = \frac{T_0}{T(y)} \exp \left\{ -\frac{1}{R} \int_0^y \frac{g(y) dy}{T(y)} \right\};$$

$$H(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{R} \int_0^y \frac{g(y) dy}{T(y)} \right\}.$$

Математическая модель атмосферы, в основе которой лежит НАА, описывается следующими зависимостями:

$$\tau(y) = \tau_N(y) + \Delta\tau(y);$$

$$p_0 = p_{0N} + \Delta p_0;$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{g_{0N}(y)}{R\tau(y)} \pi(y);$$

$$p(y) = p_0 \pi(y);$$

$$\rho(y) = \frac{p(y)}{R\tau(y)};$$

$$a(y) = \sqrt{\kappa R \tau(y)}.$$

При  $\Delta\tau(y) = 0$ ,  $\Delta p_0 = 0$  выражения будут соответствовать условиям НАА.

### Модель движения неуправляемого артиллерийского снаряда (мины) на траектории

Наиболее полной моделью движения артиллерийского снаряда (мины) является система дифференциальных уравнений движения центра масс. Для описания движения снаряда относительно центра масс информация, полученная в результате измерений, просто отсутствует [4]. На рис.1 приведена схема движения артиллерийского снаряда по траектории.

При выводе уравнений движения будем исходить из следующих допущений:

– снаряд летит в однородном поле силы тяжести, т. е.

$$\bar{G} = m\bar{g}_0, \quad (7)$$

где  $\bar{G}$  – сила тяжести;  $\bar{g}$  – ускорение силы тяжести в точке вылета;  $m$  – масса снаряда;

– на снаряд кроме силы тяжести действует сила лобового сопротивления  $X_a$ ; силой инерции Кориолиса можно пренебречь.

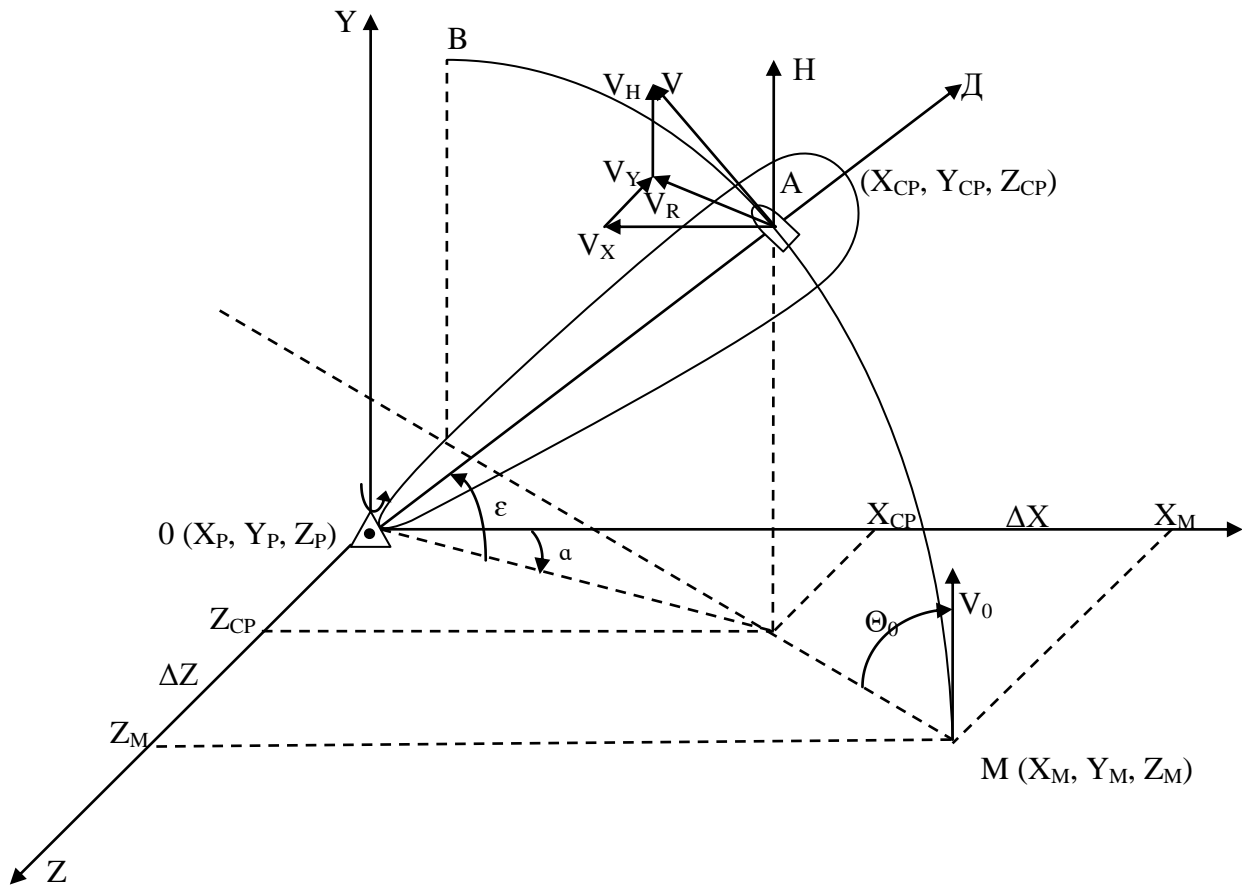


Рисунок 1 – Движение артиллерийского снаряда по траектории

При принятых допущениях векторное уравнение имеет вид

$$m\bar{v} = \bar{X}_a + \bar{G}. \quad (8)$$

Сила лобового сопротивления  $\bar{R}_a = C_{X_a} \frac{\rho v^2}{2} S_M$ , где  $\bar{R}_a$  – коэффициент силы лобового сопротивления наблюдаемого снаряда;  $\frac{\rho v^2}{2}$  – скоростной напор ( $v$  – скорость снаряда);  $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь миделевого сечения ( $d$  – калибр снаряда).

Коэффициент силы лобового сопротивления  $C_{X_a} = i C_{X_{ЭТ}}$ , где  $i$  – коэффициент формы снаряда;  $C_{X_{ЭТ}}$  – эталонный коэффициент силы лобового сопротивления.

В качестве эталонного коэффициента силы лобового сопротивле-

ния для артиллерийских систем принимают коэффициент, вычисленный по закону сопротивления 1943 года как  $C_{X_{ЭТ}} = C_{ЭТ}(M)$  (табл. 1) [1, 2].

Таблица 1 – Коэффициенты аппроксимации

$$C_{X_{ЭТ}} = a_0 + a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3$$

	$M(v/\alpha)$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1	до 0,73357	0,157	0	0	0
2	от 0,73357 до 0,90962	-3,871879	15,734575	-20,511918	8,928144
3	от 0,90962 до 0,99765	122,720358	390,742644	413,613130	145,266282
4	от 0,99765 до 1,17371	-19,848947	52,409513	-45,299813	13,064840
5	от 1,17371 до 1,58451	-0,639684	2,250136	-1,600055	0,363206
6	от 1,58451 до 2,64084	0,643812	-0,278701	0,069619	-0,006051
7	от 2,64084 до 3,72652	0,621061	-0,242875	0,053243	-0,003765
8	>3,72652	0,260	0	0	0

Коэффициенты формы современных осколочно-фугасных артиллерийских снарядов, отвечающие закону сопротивления 1943 года, изменяются в пределах от 0,9 до 1,1.

Калибр снаряда, масса снаряда, коэффициенты формы присутствуют при определении баллистического коэффициента  $C$ :

$$c = \frac{id^2}{m} \cdot 10^3, \text{ м}^2/\text{кг}$$

Для закона сопротивления 1943 года баллистический коэффициент изменяется в пределах от 0,2 до 5 при изменении калибра от 0,01 до 0,4.

Укажем, что значения  $i_{43}$  либо  $C_{43}$  приводятся в Таблицах стрельбы в разделе „Данные, положенные в основу составления Таблиц стрельбы”. Раскроем выражение для силы лобового сопротивления.

Тогда

$$R_a = iC_{ЭТ} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi d^2}{4} \times \left( \frac{\rho_{0N}}{\rho_{0N}} \cdot \frac{10^3}{10^3} \right) =$$

$$id^2 \cdot 10^3 C_{X_{ЭТ}} H(y) v^2 \left( \frac{\pi}{8} \cdot \rho_{0N} \cdot 10^{-3} \right).$$
(9)

Для определения проекций силы лобового сопротивления на оси

неподвижной системы координат используют такие зависимости:

$$X_{a_x} = -R_a \frac{v_x}{v}, \quad X_{a_y} = -R_a \frac{v_y}{v}, \quad X_{a_z} = -R_a \frac{v_z}{v},$$

где  $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ .

Составляющие силы тяжести соответственно равны:

$$G_x = 0, \quad G_y = -G, \quad G_z = 0.$$

Векторное уравнение (8) эквивалентно трем скалярным:

$$m\dot{v}_x = -R_a \frac{v_x}{v}; \quad m\dot{v}_y = -R_a \frac{v_y}{v} - G; \quad m\dot{v}_z = -R_a \frac{v_z}{v}. \quad (10)$$

С учетом (9) систему (10) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\frac{id^2}{m} \cdot 10^3 C_{X_{эм}} H(y) v \cdot 0,473 \cdot 10^{-3} \cdot v_x; \\ \dot{v}_y = -\frac{id^2}{m} \cdot 10^3 C_{X_{эм}} H(y) v \cdot 0,473 \cdot 10^{-3} \cdot v_y - g; \\ \dot{v}_z = -\frac{id^2}{m} \cdot 10^3 C_{X_{эм}} H(y) v \cdot 0,473 \cdot 10^{-3} \cdot v_z. \end{cases} \quad (11)$$

Обозначим  $C_{X_{эм}} H(y) v \cdot 0,473 \cdot 10^{-3} = E$ .

Тогда системы дифференциальных уравнений движения центра масс неуправляемого артиллерийского снаряда будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -Ev_x; \\ \dot{v}_y &= -Ev_y - g; \\ \dot{v}_z &= -Ev_z; \\ \dot{x} &= v_x; \\ \dot{y} &= v_y; \\ \dot{z} &= v_z; \\ \dot{t} &= 1; \\ E &= cC_{X_{эм}} H(y) 0,473 \cdot 10^{-3}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 v &= \left( v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)^{1/2}; \\
 \tau(y) &= \tau_N(y); \\
 \frac{d\pi}{dt} &= - \frac{g_{0N}(y)}{R\tau(y)} \pi(y); \\
 \rho(y) &= \rho_0 \pi(y); \\
 \rho(y) &= \frac{\rho(y)}{R\tau(y)}; \\
 H(y) &= \frac{\rho(y)}{\rho_{0N}}; \\
 a(y) &= \sqrt{\kappa R\tau(y)}; \\
 M &= \frac{v}{a(y)}.
 \end{aligned}$$

Система (12) интегрируется при заданных начальных условиях.

Решение данной системы дифференциальных уравнений можно осуществить любым численным методом на ЭВМ, отличающимся только точностью и продолжительностью выполняемых вычислительных операций.

На основании требований приемлемого времени решения, а также точности целесообразно использовать метод Рунге – Кутта 4-го порядка. Достоинствами данного метода являются:

- хорошая точность вычислений;
- расчеты можно проводить с переменным шагом, уменьшая его там, где функция быстро меняется, и увеличивая – в противном случае;
- на каждом шаге вычисления выполняются по одним и тем же формулам с использованием ранее найденных значений функции;
- для начала расчета достаточно знать начальные условия интегрирования и выбрать сетку  $X_n$ .

Метод Рунге – Кутта позволяет строить схемы вычислений различного порядка точности.

Рассмотрим схему метода, которая записана в большинстве стандартных программ ЭВМ.

Пусть необходимо найти значения частного решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

удовлетворяющего начальному условию:

$$x = x_0 \quad y = y_0$$

в узлах сетки  $x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ .

В методе Рунге – Кутта последовательные значения искомой функции вычисляются по формулам:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = h_n f(x_n; y_n);$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}\right);$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n; y_n + k_3).$$

При реализации данного метода точность определяется выражением

$$\Delta y_n = h_n \frac{dy}{dx} + \frac{h_n^2}{2!} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h_n^3}{3!} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h_n^4}{4!} \cdot \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Если правая часть дифференциальных уравнений непрерывна и ограничена вместе со своими четвертыми производными, то точность метода Рунге – Кутта имеет порядок  $p = 4$ . В этом случае для оценки точности вычислений можно воспользоваться формулой

$$\Delta y_n = \frac{y(x, h) - y(x, kh)}{k^p - 1}.$$

Если правая часть дифференциального уравнения не удовлетворяет указанным условиям, то этот порядок точности ( $p = 4$ ) может не реализоваться.

Допустим теперь, что необходимо найти решение системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

при начальных условиях  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ .

Решение этой задачи методом Рунге – Кутта проводят по зависимостям ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):



$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n; \\
z_{n+1} &= z_n + \Delta z_n; \\
\Delta y_n &= 1/6(R_{1y} + 2R_{2y} + 2R_{3y} + R_{4y}); \\
\Delta z_n &= 1/6(R_{1z} + 2R_{2z} + 2R_{3z} + R_{4z}); \\
R_{1y} &= h_n f(x_n, y_n, z_n); \\
R_{2y} &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{R_{1y}}{2}; z_n + \frac{R_{1z}}{2}\right); \\
R_{3y} &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{R_{2y}}{2}; z_n + \frac{R_{2z}}{2}\right); \\
R_{4y} &= h_n f(x_n + h_n; y_n + R_{3y}; z_n + R_{3z}); \\
R_{1z} &= h_n \phi(x_n, y_n, z_n); \\
R_{2z} &= h_n \phi\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{R_{1y}}{2}; z_n + \frac{R_{1z}}{2}\right); \\
R_{3z} &= h_n \phi\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{R_{2y}}{2}; z_n + \frac{R_{2z}}{2}\right); \\
R_{4z} &= h_n \phi(x_n + h_n; y_n + R_{2y}; z_n + R_{2z}).
\end{aligned}$$

По аналогичным зависимостям определяют решения производной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Результаты моделирования полученной модели движения артиллерийского снаряда представлены в табл. 2.

Анализ полученных данных свидетельствует о ее пригодности, так как расхождения расчетной дальности ( $D_p$ ) с дальностью стрельбы артиллерийской системы ( $D_{ТС}$ ) составляют не более 10...15 метров.

### **Модель движения неуправляемого реактивного снаряда на траектории**

Траектория неуправляемого реактивного снаряда состоит из активного и пассивного участков. На пассивном участке траектории уравнения движения центра масс совпадают с уравнениями (12) для неуправляемого артиллерийского снаряда.

На активном участке траектории кроме сил лобового сопротивления и тяжести действует сила тяги двигателя.

Таблица 2 – Результаты моделирования движения артиллерийского снаряда

№ п/п	Индекс снаряда	Номер заряда	$U_0$ , м/с	$\Theta_0$ , град	$q$ , кг	$C_M$	$i$	$C$	$D_p$ , м	$D_{ТС}$ , м
1.	155-мм ОФС М 109 (СГМ 109А1-3)	1G	212	45	43,1	14,2	0,9698	0,557	4013	3989
		2G	238	45	43,1	14,2	0,9712	0,557	4930	4912
		3G	277	45	43,1	14,2	0,9760	0,557	6439	6478
		4G	318	45	43,1	14,2	0,9824	0,557	7947	7970
		5G	375	45	43,1	14,2	0,9862	0,557	9602	9540
		3W	293	45	43,1	14,2	0,9878	0,557	7002	7063
		4W	337	45	43,1	14,2	0,9895	0,557	8522	8513
		5W	393	45	43,1	14,2	0,9902	0,557	10067	10089
		6W	475	45	43,1	14,2	0,9915	0,557	12074	12026
		7W	565	45	43,1	14,2	0,9922	0,557	14363	14340
	полный	684	45	43,1	14,2	0,9935	0,557	17420	17384	
2.	152-мм ОФС ОФ-540 (СГ 2СЗМ)	полный	651	45	43,5	14,3	0,9855	0,568	17044	17055
		1	603	45	43,5	14,3	0,9865	0,568	15771	15734
		2	509	45	43,5	14,3	0,9882	0,568	13207	13230
		3	423	45	43,5	14,3	0,9895	0,568	11022	11000
		4	381	45	43,5	14,3	0,9805	0,568	9916	9937
		5	334	45	43,5	14,3	0,9192	0,568	8782	8743
		6	282	45	43,5	14,3	0,9172	0,568	6721	6751

Силу тяги двигателя определяют по зависимости [2]:

$$P \approx \dot{m} u_a + S_a (p_a - p), \quad (13)$$

где  $\dot{m}$  – массовый секундный расход топлива;  $u_a$  – скорость истечения продуктов сгорания в выходном сечении сопла;  $S_a$  – площадь выходного сечения сопла;  $p_a$  – давление газов на срезе сопла двигателя;  $p$  – атмосферное давление.

Важнейшей характеристикой реактивного двигателя является величина удельного импульса (удельной тяги), равная отношению силы тяги к весовому секунднему расходу топлива ( $G_c$ ):

$$I_{y\partial} = \frac{P}{G_c}.$$

Данное условие определяет мгновенные значения удельного импульса, отвечающие фиксированным моментам времени работы двигателя.

При расчетах траекторий реактивных снарядов пользуются сред-

ним значением удельного импульса, называемым также единичным импульсом тяги. При постоянстве скорости истечения и массового секундного расхода топлива величины  $I_{y0}$  и  $I_1$  совпадают. Тогда можно записать: [2]

$$P = G_{сек} I_1. \quad (14)$$

Для составления уравнений движения реактивного снаряда в земной системе координат на активном участке траектории необходимо в уравнения (11) ввести составляющие силы тяги и учесть изменение массы снаряда при работе реактивного двигателя.

При этом система уравнений будет иметь вид [3]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -E v_x - P \frac{v_x}{v}; \\ \dot{v}_y &= -E v_y - P \frac{v_y}{v} - g; \\ \dot{v}_z &= -E v_z - P \frac{v_z}{v}; \\ \dot{x} &= v_x; \\ \dot{y} &= v_y; \\ \dot{z} &= v_z; \\ \dot{t} &= 1; \\ m(t) &= m_0 - \int_0^t \dot{m}(\tau) dt \end{aligned} \quad (15)$$

### Выводы

1. В статье предложены модели движения неуправляемых летательных аппаратов, стабилизируемых как на активном, так и на пассивном участках траектории полета с учетом времени работы двигателя.

2. Рассмотрен способ решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты.

### Список использованных источников

1. Дмитриевский А.А., Внешняя баллистика [Текст] / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко // – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.
2. Гонтмахер Ф. Р., Теория полета неуправляемых ракет [Текст]

/ Ф.Р. Гонтмахер, Л.М. Левин // – М.: Изд - во физ.- мат. лит., 1959. – 355 с.

3. Макеев В.І., Математична модель просторового руху літального апарату на твердому паливі в атмосфері [Текст] / В.І. Макеев, М.М. Ляпа, Л.Д. Назаренко // Вісник СумДУ.– 2008. № 2.- С. 5 – 12.

4. Костенко Н.Ф. Ракетные двигатели твердого топлива (основы теории и проектирования) [Текст] / Н.Ф. Костенко // – Пенза: Изд - во ПВАИУ, 1966. – 264 с.

*Поступила в редакцию 27.04.2017.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Гайдачук,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*