УДК: 629.73.015

В.В. Красновольский

Математическое моделирование тонкого профиля

Рассматривается движение профиля, в котором форма несущей поверхности и кинематические параметры как функции координат и времени заданы. Пусть в некоторый начальный момент времени $\tau = 0$ кинематические параметры начинают изменяться по произвольному закону, причем

$$w_n = W_n / U_0 = f_n(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \tau), \qquad (1)$$

где W_n – нормальная составляющая возмущённой скорости потока; U_0 – скорость невозмущённого потока; $\overline{x_0}, \overline{y_0}$ – безразмерные координаты точки на поверхности исследуемого тела; τ – безразмерное время, которое определяется выражением

$$\tau = \frac{1}{b}\int_0^t U(\xi)d(\xi). \qquad (2)$$

В зависимости от геометрической формы профиля и условий его обтекания течение может быть отрывным или безотрывным. Математическая формулировка нестационарной нелинейной задачи для потенциала возмущенных скоростей рассматривается применительно к плоскопараллельному обтеканию тонкой несущей поверхности (рис. 1).

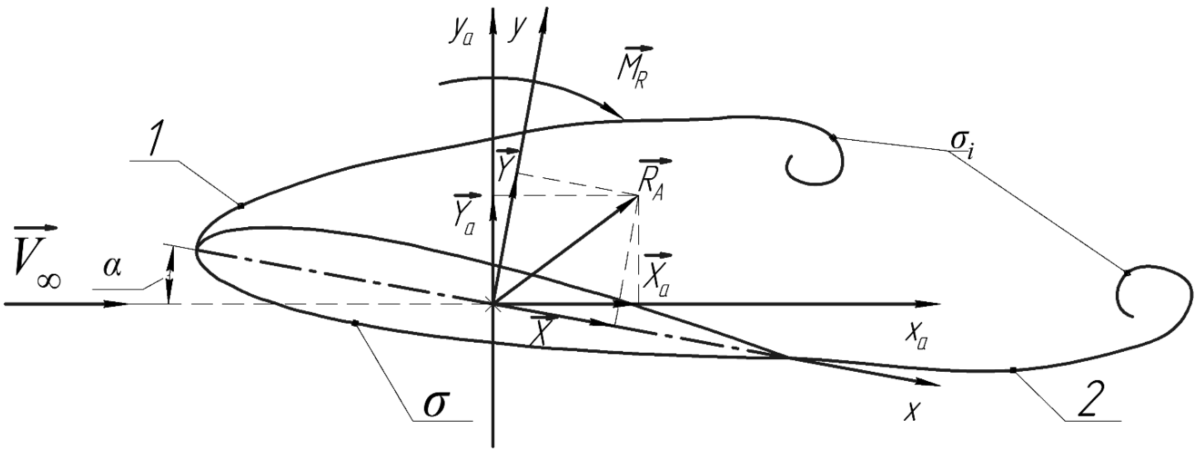


Рисунок 1 – К отрывному обтеканию бесконечно тонкого профиля

Пусть $\sigma(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = 0$ – уравнение несущей поверхности. При отрыве потока возникает движение жидкости с образованием поверхностей тангенциального разрыва скорости, которые в кинематическом отношении эквивалентны вихревым слоям. Поверхности тангенциального разрыва скорости описываются уравнениями: $\sigma_i(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \tau) = 0, (i = 1, 2, ...)$.

В общем случае отрывного обтекания образуются две системы свободных вихрей – носовая 1 и кормовая 2 (рис. 1).

Предполагается, что везде вне профиля и следа течение является безвихревым, где для потенциала возмущенных скоростей $\Phi(x, y, \tau)$ справедливо уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

При решении поставленной задачи накладываются следующие граничные условия:

– условие непротекания на поверхности профиля:

$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) \cdot n(\vec{r}, t) = \vec{V}_*(\vec{r}, t) \cdot n(\vec{r}, t), \tag{4}$$

где $\vec{V}_* = \vec{V}_k + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ – скорость движения жидкости по поверхности профиля; $n(\vec{r}, t)$ – внешняя нормаль к поверхности профиля;

– условие убывания возмущений на бесконечном удалении от профиля:

$$\Phi(\vec{r}, t) \to 0, \ |\vec{r}| \to \infty; \tag{5}$$

– при переходе через поверхности вихревого следа σ_i должно соблюдаться условие непрерывности давления и нормальной составляющей скорости:

$$p_- = p_+, (\nabla\Phi \cdot n)_- = (\nabla\Phi \cdot n)_+, (x, y, \tau) \in \sigma_i; \tag{6}$$

где знаки (–) и (+) относятся к разным сторонам поверхностей σ_{i};

– на кромках несущей поверхности, с которых стекают вихревые поверхности, выполняется гипотеза Чаплыгина - Жуковского - Кутта о конечности скоростей. Обозначим через L линию схода потока, на которой обеспечивается:

$$p_- = p_+, (\nabla\Phi \cdot n)_- = (\nabla\Phi \cdot n)_+, (x, y, \tau) \in L; \tag{7}$$

– теорема Томсона, охватывающая профиль и его спутный след:

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl} = 0. \tag{8}$$

Все перечисленные условия должны выполниться в каждый расчетный момент времени для рассматриваемого нестационарного движения. Задача является нелинейной и заключается в нахождении потенциала скорости $\Phi(x, y, \tau)$ при заданных начальных условиях.

Поверхности σ и σ_{i} заменяются непрерывным вихревым слоем с напряженностью $\gamma_{+\Sigma}$ и γ_{-i} соответственно. Поле скоростей, вызванных этим вихревым слоем, удовлетворяет уравнению Лапласа и условию (5). Для выполнения условия (6) в следе его достаточно рассматривать в виде свободной вихревой поверхности, так как в соответствии с теоремой Н. Е. Жуковского «в малом» на этой поверхности отсутствует перепад давлений.

Для определения $\gamma_{+\Sigma}$ и γ_{-i} на σ и σ_i используются: граничное условие (4), постулат Чаплыгина - Жуковского - Кутта, начальные условия задачи, а также теорема Томсона о неизменности циркуляции по замкнутому жидкому контору.

В результате задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и ее решению.

$$\sum_{1}^{n} \Gamma_{\mu} \cdot a_{\mu\nu} + \sum_{1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot \Delta_i = 2 \cdot \pi \cdot f_n(\overline{x_{\nu\mu}}, \overline{y_{\nu\mu}}, \tau), \ \nu, \mu = 1, 2, \ldots n, \tag{9}$$

где $a_{\mu\nu} = \dfrac{1}{r_{\nu\mu}}$, $r_{\nu\mu}$ – расстояние от контрольной точки ν до дискретного вихря μ; Γ_{μ} – циркуляция скорости на теле; Δ_i – циркуляция скорости на пелене; i – количество свободных вихрей; n – количество дискретных вихрей, которыми описывается исследуемое тело.

Алгоритм и методика решения задачи

СЛАУ (9) представляем в матричном виде:

$$W_{\mu} \cdot \Gamma_{\mu} + W_{N_{\sigma P}} \cdot \Delta = B, \tag{10}$$

$$где\ \Gamma_{\mu} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ . \\ . \\ . \\ \Gamma_{\mu} \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta_{N_{\sigma P}} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi \cdot f_1(\overline{x_{1\mu}}, \overline{y_{1\mu}}, \tau) \\ . \\ . \\ . \\ 2 \cdot \pi \cdot f_n(\overline{x_{\nu\mu}}, \overline{y_{\nu\mu}}, \tau) \end{pmatrix},$$

$$W_{\mu} = \left\{ \frac{\Gamma_{\mu}}{r_{\nu\mu}} \right\}, W_{N_{\sigma P}} = \left\{ \frac{\delta^{\gamma}}{r_{\mu}} \right\}.$$

Алгоритм решения задачи нестационарного обтекания с началом образования вихревого следа включает в себя (рис. 2):

1) расчет элементов матрицы взаимовлияния W_{υ} и граничных условий, которые в процессе расчета остаются неизменными, так как геометрия профиля не изменена;

2) получение обращённой матрицы коэффициентов взаимовлияния $\mathrm{W}_{\upsilon}^{-1}$;

3) предположение о том, что на нулевом расчетном шаге вихревой след отсутствует;

4) расчет вектора-столбца $B(\tau)$ граничных условий в расчетный момент времени τ;

5) решение (10) и определение неизвестных циркуляций $\Gamma(\tau)$:

$$\Gamma(\tau) = W_{\upsilon}^{-1}(B(\tau) - W_{\mu}(\tau) \cdot \Delta(\tau)); \tag{11}$$

6) расчет распределеных и суммарных аэродинамических нагрузок на теле. Расчет перепада давлений выполняют по интегралу Коши – Лагранжа:

$$\Delta p = p_{+} - p_{-} = -\rho \cdot (\frac{\partial(\varphi_{+} - \varphi_{-})}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \cdot (U_{+}{}^{2} - U_{-}{}^{2})); \tag{12}$$

7) При известном поле скоростей определяется положение точек вихревой пелены к следующему расчетному моменту безразмерного времени $\tau_{к+1}$ и циркуляции вновь образующихся вихрей на ней;

8) вычисляется матрица $W_{\mu}(\tau_{к+1})$.

После этого осуществляется переход к следующему расчетному шагу, на котором выполняются все вышеперечисленные пункты, начиная с четвертого пункта. Расчет выполняется до достижения заданного значения безразмерного времени $\tau_{к}$.

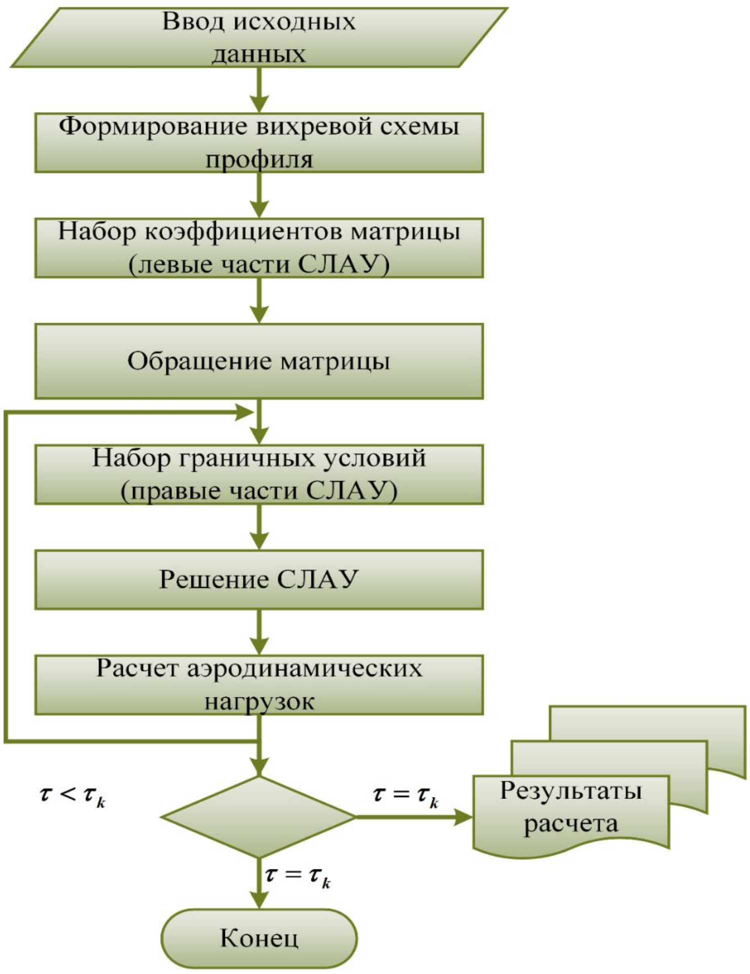


Рисунок 2 – К алгоритму расчета нелинейной задачи об отрывном обтекании бесконечно тонкого профиля

При обтекании тонкого профиля вихревая схема формируется путем разбиения профиля присоединёнными вихрями и контрольными точками (рис. 3). Особенностью вихревой схемы профиля при моделировании нестационарного обтекания является расположение первого дискретного вихря $(\mu = 1)$ не на передней кромке профиля, а перед ней в потоке на линии продолжения хорды профиля на расстоянии $\bar{x}_1 = 1/2n$ (рис. 3), тогда вихрь $\mu = n+1$ располагается за задней кромкой на расстоянии $\bar{x}_{n+1} = 1/2n$. Такая особенность вихревой схемы определена теоремой Томсона, а количество вихрей на один больше, чем расчётных участков.

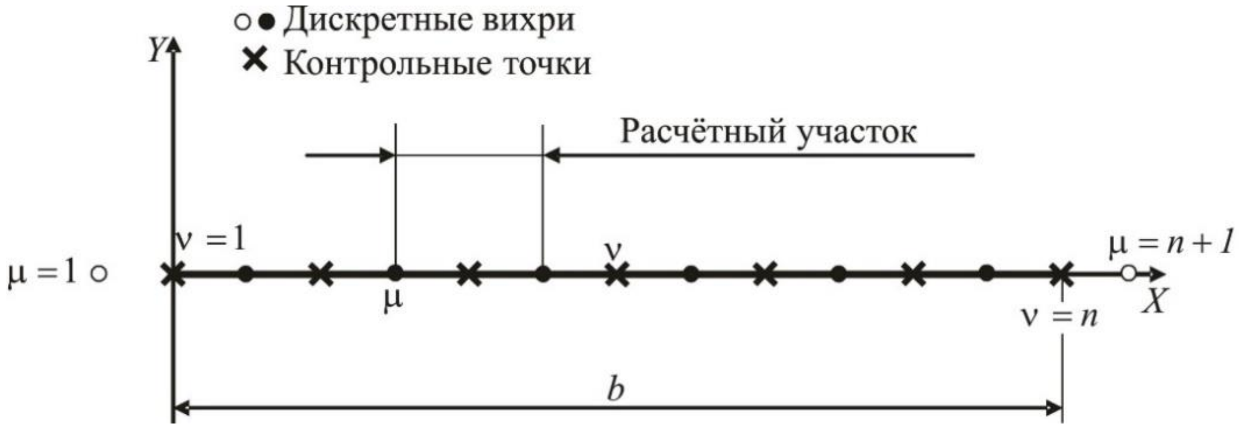


Рисунок 3 – К вихревой схеме нестационарной отрывной задачи

Для рассмотренного случая построения вихревой схемы профиля при его нестационарном обтекании координаты дискретных вихрей и контрольных точек рассчитываются с помощью выражения:

$$\bar{x}_\mu = \frac{2\mu - 3}{2(n-1)},\ \bar{x}_\nu = \frac{\nu - 1}{n-1},\ \bar{y}_\mu, \bar{y}_\nu = 0,\ \mu = 1, 2, \ldots, n+1,\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \quad (13)$$

Так как в начальный момент времени τ профиль находится в состоянии покоя, то СЛАУ (10) соответствует бесциркуляционному обтеканию исследуемого тела. Этот случай принято называть *нулевым расчетным шагом* при моделировании нестационарного обтекания профиля. Решение такого вида СЛАУ описано в [3].

Моделирование первого расчетного шага интегрирования. В случае безотрывного обтекания передней кромки профиля моделируется только кормовая вихревая пелена, сходящая в поток из точки, принадлежащей дискретному вихрю $\mu = n+1$. В случае моделирования отрывного обтекания передней кромки профиля моделируется сход вихревой пелены из точки, принадлежащей дискретному вихрю $\mu = 1$ (рис. 4). В точках $\mu = 1$ и $\mu = n+1$ (рис. 4) рассчитываются относительные скорости $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_{n+1}$, выражения для определения которых имеют вид:

$$\bar{v}_1^1 = \bar{W}_{1\mu}^0 + \bar{U}_0;\ \bar{v}_{n+1}^1 = \bar{W}_{n+1\mu}^0 + \bar{U}_0;\ \mu = 1, 2, \ldots, n+1, \quad (14)$$

где $\bar{U}_0 = {U_0}/{U_0}$ – безразмерная скорость невозмущённого потока; $\bar{W}^0_{1\mu}$ и $\bar{W}^0_{n+1\mu}$ – безразмерные относительные скорости, индуцируемые всеми дискретными вихрями $\mu = 1, 2, ..., n+1$, соответственно в точках $\mu = 1$ и $\mu = n+1$ на нулевом шаге интегрирования. Скорости $\bar{W}^0_{1\mu}$ и $\bar{W}^0_{n+1\mu}$ рассчитываются с некоторой особенностью, заключающейся в том, что при расчёте скорости в точке $\mu = 1$ скорость рассчитывается от всех дискретных вихрей, за исключением первого. Аналогично расчёт скорости в точке $\mu = n+1$ выполняется для последнего дискретного вихря.

Полученные дискретные вихри сдвигаются по направлению рассчитанных скоростей $\bar{W}^0_{1\mu}$ и $\bar{W}^0_{n+1\mu}$, моделирующих вихревые пелены σ_i, полученные из решения на нулевом расчётном шаге интегрирования, на расстояние $\Delta = {1}/{n}$. В результате в потоке появляются первые свободные вихри $\delta^{(1)1}$ и $\delta^{(2)1}$ (рис. 4) координаты которых равны:

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1_1 = \bar{x}^0_1 + \bar{v}^1_{x1}\Delta;\ \bar{x}^1_{n+1} = \bar{x}^0_{n+1} + \bar{v}^1_{xn+1}\Delta;\\
&\bar{y}^1_1 = \bar{y}^0_1 + \bar{v}^1_{y1}\Delta;\ \bar{y}^1_{n+1} = \bar{y}^0_{n+1} + \bar{v}^1_{yn+1}\Delta.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\delta^{(1)1} = \Gamma^0_{n+1};\ \delta^{(2)1} = \Gamma^0_1. \tag{16}$$

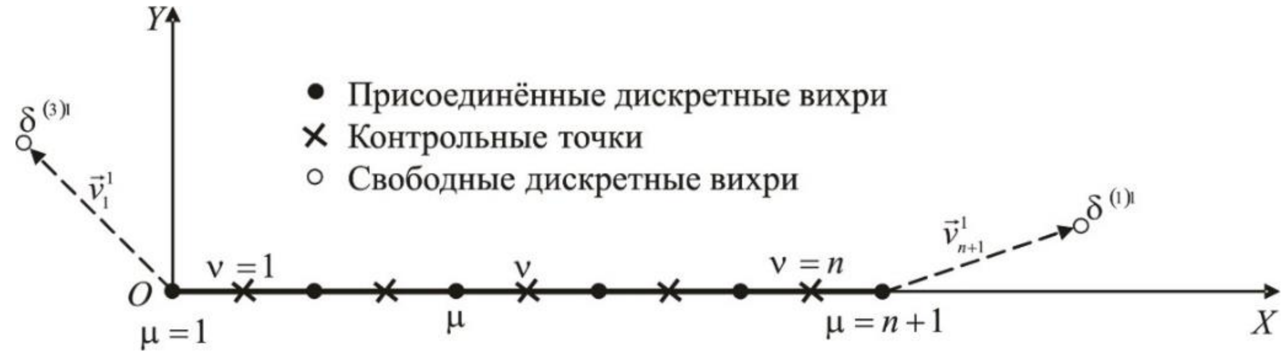


Рисунок 4 – К моделированию первого расчетного шага интегрирования нестационарной отрывной задачи

После перемещения свободных вихрей, моделирующих вихревые пелены, решается СЛАУ (10) с учётом полученных свободных вихрей $\delta^{(1)1}$ и $\delta^{(2)1}$, которые в каждой контрольной точке ν индуцируют дополнительные скорости $\bar{W}^{(1)1}_{n0\nu}$ и $\bar{W}^{(2)1}_{n0\nu}$ нормальные к поверхности профиля. Скорости $\bar{W}^{(1)1}_{n0\nu}$ и $\bar{W}^{(2)1}_{n0\nu}$ учитываются в векторе-столбце правых частей СЛАУ. Полученная СЛАУ решается методом исключения Гаусса.

Моделирование второго $(s = 2)$ *и последующих* (s_i) шагов интегрирования до заданного (*s*=*r*) выполняется в следующем порядке:

– рассчитываются скорости $\bar{v}_1^r$ и $\bar{v}_{n+1}^r$ в точках $\mu = 1$ и $\mu = n+1$ с учётом свободных вихрей, моделирующих вихревые пелены. Для любого заданного расчётного шага интегрирования выражения (14) примут вид:

$$\bar{v}_1^r = \bar{W}_{1\mu}^{r-1} + \bar{U}_0 + \bar{W}_1^{(1)s} + \bar{W}_1^{(2)s};$$

$$\bar{v}_{n+1}^r = \bar{W}_{n+1\mu}^{r-1} + \bar{U}_0 + \bar{W}_{n+1}^{(1)s} + \bar{W}_{n+1}^{(2)s}; \qquad (17)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, n+1;\ s = 1, 2, \ldots, r,$$

где $\bar{W}_1^{(1)s}, \bar{W}_1^{(2)s}, \bar{W}_{n+1}^{(1)s}, \bar{W}_{n+1}^{(2)s}$ – относительные скорости, индуцируемые вихревыми пеленами 2 и 1 в точках $\mu = 1$ и $\mu = n+1$;

– рассчитываются возмущённые скорости в точках, где находятся свободные вихри $\delta^{(1)s}$ и $\delta^{(2)s}$, для этого используются выражения:

$$\bar{W}^r = \bar{W}_\mu^{r-1} + \bar{U}_0 + \bar{W}^{(1)s} + \bar{W}^{(2)s},\ \mu = 1, 2, \ldots, n+1,\ s = 1, 2, \ldots, r \qquad (18)$$

где $\bar{W}_\mu^{r-1}$ – относительная скорость, индуцируемая всеми присоединёнными вихрями Γ_μ^{r-1}; $\bar{W}^{(1)s}$ и $\bar{W}^{(2)s}$ – относительные скорости, индуцируемые всеми свободными вихрями вихревых пелен;

– перемещаются вихри Γ_1^{r-1}, Γ_{n+1}^{r-1}, $\delta^{(1)1}$ и $\delta^{(2)1}$ по направлениям рассчитанной скорости $\bar{v}_1^r$, $\bar{v}_{n+1}^r$ и $\bar{W}^r$ на величину $\Delta = 1/n$, в результате в потоке появляются новые свободные вихри $\delta^{(1)2}$ и $\delta^{(2)2}$, кроме того, они получают новые координаты (рис. 5);

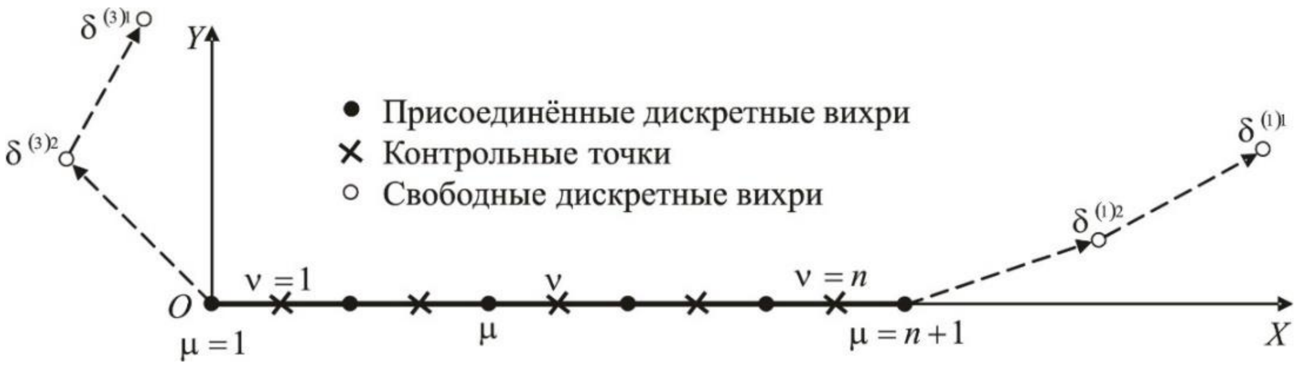


Рисунок 5 – К моделированию второго и последующих расчетных шагов интегрирования нестационарной отрывной задачи

– циркуляции новых свободных вихрей соответственно принимают значения: $\delta^{(1)2} = \Gamma_{n+1}^{1}$, $\delta^{(3)2} = \Gamma_{n+1}^{1}$, а циркуляции предыдущего шага интегрирования сохраняют свои значения. После этого решается СЛАУ для определения циркуляции Γ_{μ}^{r};

– определение аэродинамических нагрузок, действующих на профиль, а также расчёт поля возмущённых скоростей в окрестностях профиля. Расчет нестационарных аэродинамических нагрузок выполняется при решении интеграла Коши – Лагранжа по формуле:

$$\Delta\bar{p}_{k}^{r} = 2 \cdot n \cdot cos\,\alpha \cdot \Gamma_{\mu}^{r} - 2 \cdot \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\tau}, \mu = 1, 2, ..., n+1, \qquad (19)$$

где n – количество расчётных участков на поверхности профиля; α – угол атаки; Γ_{μ}^{r} – суммарная циркуляция присоединённых вихрей на рассматриваемом расчётном шаге интегрирования r.

Изменение суммарной циркуляции по контуру L (рис. 6) рассматривается как происходящее за счет изменения циркуляции суммарных вихрей профиля и схода свободных вихрей. Расчёт производной $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta\tau}$ выполняется по формуле:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\tau} = \frac{\delta^{(1)r} - \delta^{(1)r-1}}{\Delta\tau} + \frac{\Gamma_{\varepsilon}^{r} - \Gamma_{\varepsilon}^{r-1}}{\Delta\tau};\ \Delta\tau = \frac{1}{n},\ \varepsilon = 1, 2, ..., k. \qquad (20)$$

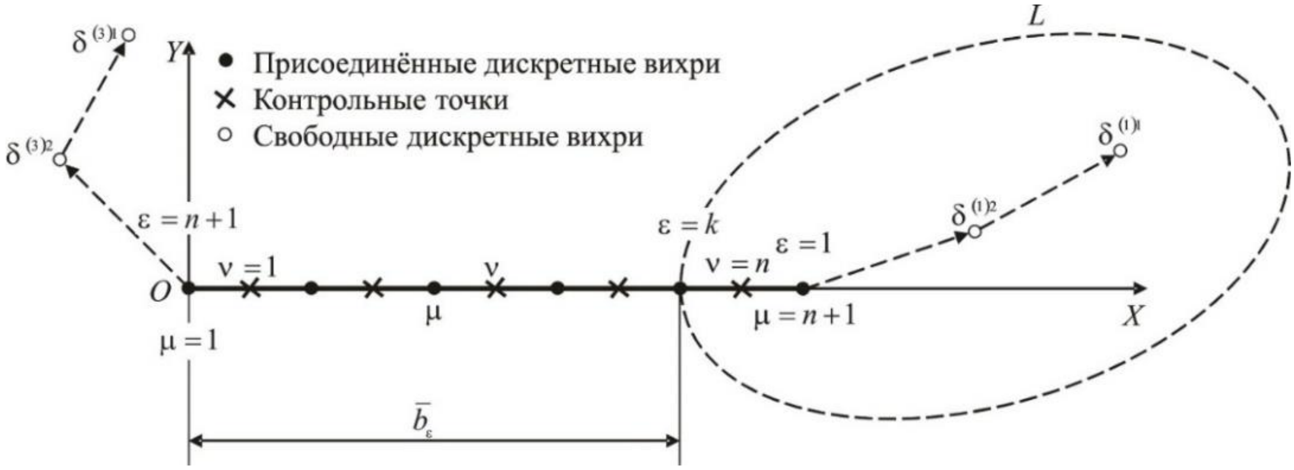


Рисунок 6 – К определению производной циркуляции скорости

Изменение циркуляции $\Delta\Gamma$ рассматривается внутри некоторого контура L, проходящего через точку k и охватывающего присоединённые вихри $\varepsilon = 1, 2, ..., k$, а также свободные вихри $\delta^{(2)}$.

Коэффициент подъёмной силы определяется выражением:

$$c_{ya} = \Delta\,\bar{p}_{\varepsilon}\frac{1}{n},\ \ \varepsilon = 1, 2, ..., n+1, \qquad (21)$$

а коэффициент момента тангажа:

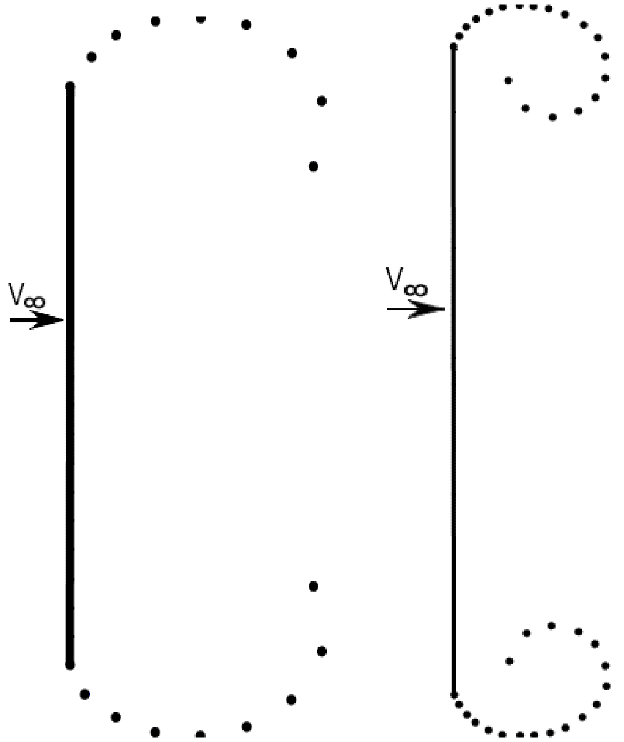
$$m_z = -\frac{1}{n}\bar{b}_\varepsilon \Delta \bar{p}_\varepsilon, \quad \varepsilon = 1, 2, ..., n+1, \tag{22}$$

где $\bar{b}_\varepsilon$ – расстояние от точки приведения до вихря $\varepsilon = k$.

Исследование по методике расчета

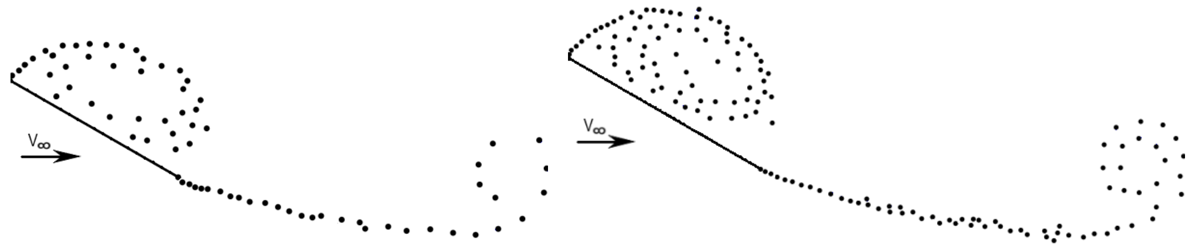
Исследовалось влияние числа дискретных вихрей по хорде пластины на практическую сходимость результатов расчета. Чтобы полнее проследить начальный этап обтекания, использовалось большое количество вихрей (n=100). При большом значении τ расчеты проводились при меньшем числе вихрей (n=10; n=20), поскольку увеличение числа вихрей уже мало влияло на точность результатов. Как показали исследования, расчетный шаг безразмерного времени $\Delta\tau$ целесообразно задавать обратно пропорциональным числу вихрей на хорде ($\Delta\tau \approx b/n$).

На рис. 7 показана форма пелены за пластиной, которая в момент $\tau = 0$ внезапно переходит из состояния покоя к движению со скоростью U_0 при угле атаке $\alpha = 90^\circ$. Расчеты проводились при n=20 и n =100, при этом расчетный шаг безразмерного времени составлял соответственно $\Delta\tau = 0,05;\ 0,01$. Во втором случае при $\Delta\tau = 0,01$ расчеты точнее описывают поведение вихревой пелены вблизи ее кромок. Как показано аналитически [2], пелена принимает форму спирали бесконечно малого радиуса. По исследованиям форма пелены вблизи края пластины хорошо описывается дискретным методом уже при $n \geq 20$. На рисунке 8 приведен аналогичный расчет для угла атаки $\alpha = 20^\circ$.



а б

Рисунок 7 – Влияние числа вихрей и расчетного шага по времени на вихревую структуру при отрывном обтекании пластины ($\alpha = 90^\circ$): а, $n = 20$; б, $\mathrm{n} = 100$

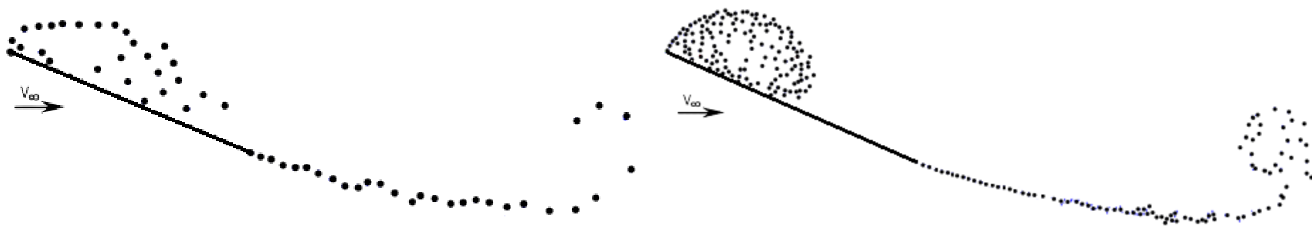


а б

Рисунок 8 – Влияние числа вихрей и расчетного шага по времени на вихревую структуру пластины при отрывном обтекании $\alpha = 20^\circ$: а, $n = 20$; б, $n = 100$

При больших значениях n $(n = 100)$ удается достаточно аккуратно построить зависимость $c_n(\tau)$ в начальные моменты движения $\tau = 0$. Заметим, что численный расчет не позволяет установить все детали обтекания и величины нагрузок при переходе от состояния покоя к движению (вблизи $\tau = 0$). Импульс сил, связанный с бесконечными ускорениями в несжимаемой среде, можно рассчитать по схеме бесциркуляционного обтекания или из решения автомодельной задачи. Однако отрывное обтекание сопровождается мгновенным образованием вихревых спиралей бесконечно малого радиуса, что сказывается на величине значения силы $c_n(\tau)$ при $\tau > 0$.

Рассмотрено влияние числа вихрей на структуру пелены и аэродинамические характеристики пластины при $\alpha = 30^\circ$. Расчеты проведены при $n = 20, 40$ на рис. 9 показан след при $\tau = 2$. Как видно, отличия в структурах имеют локальный характер. Крупномасштабные структуры практически совпадают, поэтому будут идентичны поля скоростей. Этим объясняется и то, что зависимости $c_n(\tau)$ и $\bar{x}_d(\tau)$ в рассматриваемом диапазоне также практически совпадают (рис. 10, 11).



а б

Рисунок 9 – Влияние числа вихрей на вихревую структуру при отрывном обтекании $\alpha = 30^\circ$: а, $n = 20$; б, $n = 40$

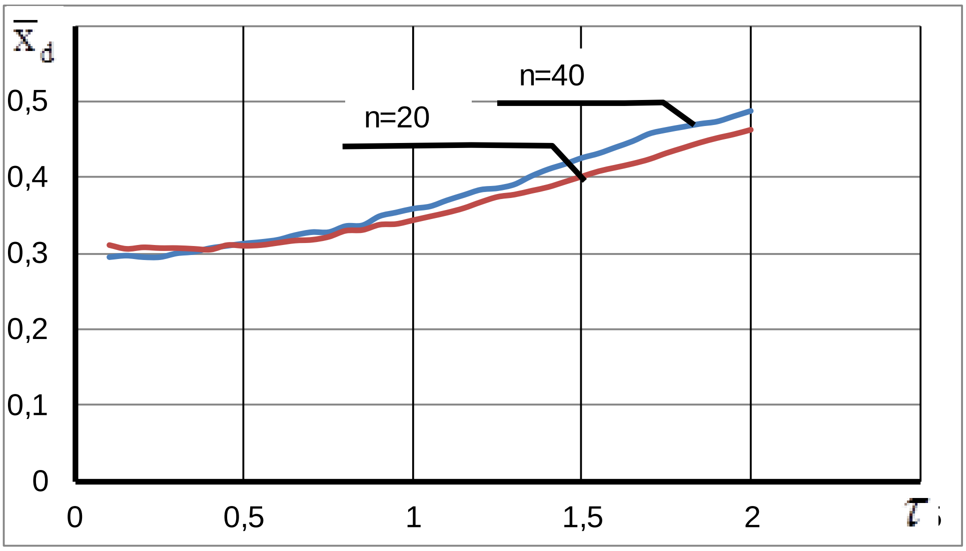


Рисунок 10 – Влияние числа вихрей n на положение центра давления тонкого профиля при отрывном обтекании ($\alpha = 30^{\circ}$)

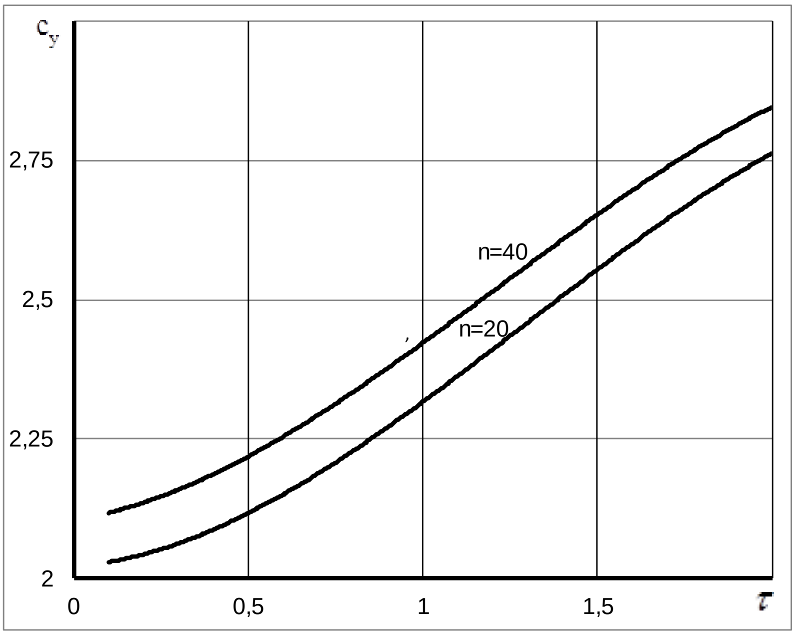


Рисунок 11 – Влияние числа вихрей n на коэффициент нормальной силы тонкого профиля при отрывном обтекании ($\alpha = 30^{\circ}$)

Выводы

Расчет нелинейных нестационарных характеристик профиля сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Число этих уравнений равно числу неизвестных циркуляций, а коэффициенты уравнений представляют собой совокупность безразмерных скоростей, вычисленных от дискретных вихрей, моделирующих профиль и его след. Указанная система линейных алгебраических уравнений является устойчивой. Было определено, что малые изменения коэффициентов уравнений, вызванные малыми деформациями вихревого следа, приводят к малым изменениям решений. Это объясняется тем, что значения элементов главной диагонали матрицы коэффициентов по модулю превышают значения остальных элементов, так как наибольшую безразмерную скорость вызывает тот вихрь, ближе к которому находится контрольная точка.

Анализ результатов отрывного обтекания показал, что после переходного режима устанавливается колебательный характер нагружения профиля. Периодическое изменение аэродинамических сил и моментов при отрывном обтекании связано с переменностью циркуляций присоединённых вихрей на профиле. Это изменение в идеальной среде происходит за счет образования и схода в поток свободных вихрей, которые сбегают с передней и задней кромок, что приводит к образованию вихревых дорожек.

Таким образом представленный алгоритм расчета нелинейных аэродинамических характеристик, построенный на базе метода дискретных вихрей, позволяет получать достоверные аэродинамические характеристики как тонких, так и телесных профилей. Интерес нелинейных аэродинамических характеристик вызван тем, что этапы взлета и посадки самолетов, полеты с большими перегрузками выполняются при больших углах отклонения органов управления, многие режимы работы турбин и компрессоров происходят на режимах близких к критическим. При проектировании летательных аппаратов большое применение находят крылья сложной формы в плане с острыми передними кромками. Отрыв потока на этих кромках начинается уже при малых углах атаки, а возникающая вихревая пелена оказывается устойчивой и значительно влияет на несущие свойства крыла. Поэтому использование стационарного отрывного режима обтекания в отличие от нестационарного нелинейного режима обтекания не дает полной картины влияния вихревой пелены на аэродинамические характеристики крыла.

Список использованных источников

1. Белоцерковский, С. М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью [Текст] / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Никольский, А. А. Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом [Текс] / А.А. Никольский – М.: Ученые записки ЦАГИ. 1979. №1
3. Красновольский, В. В. Методика расчета потенциального обтекания профиля [Текст]/ В.В. Красновольский // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков, 2016. – Вып. 74. – С. 209 – 215.

4. Yeryomenko, S. Mathematical Modeling of the Flow behind Propeller [Текст] / S Yeryomenko, O Solovyov, V Kobrin. – USA Redfame Publishing, Beaverton.: Studies in Engineering and Technology, 2015. – 77-85 с.

5. Порошин, С. М. Математическое моделирование обтекания профиля [Текст] / С.М. Порошин, О.В. Соловьев, П.Н. Соляник // Научно-технический журнал наука и техника воздушных сил вооружённых сил Украины: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, ун-т воздушных сил им. И. Кожедуба. – Харьков, 2016. – Вып. 23. – С. 85 – 89.

6. Аубакиров, Т.О. Нелинейная теория крыла и ее приложения. [Текст] / Т.О. Аубакиров, С.М. Белоцерковский, А.И. Желанников, М.И Ништ. – Алматы, Гылым, 1997. – 448с.

Поступила в редакцию 07.03.2018 .
Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.