Летута Татьяна Николаевна, канд. техн. наук, доц., кафедра товароведения и экспертизы товаров, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: 0679524443; e-mail: lettanya@ukr.net.

Letuta Tatiana, PhD, Associate Professor, Department of Commodity Research and Expertise of Goods, Kharkiv State University of Nutrition and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: 0679524443; e-mail: lettanya@ukr.net.

Новікова Віра Валеріївна, асп., кафедра товарознавства та експертизи товарів, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: 0671229733, e-mail: novikova_vera@ukr.net.

Новикова Вера Валерьевна, асп., кафедра товароведения и экспертизы товаров, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: 0671229733; e-mail: novikova_vera@ukr.net.

Novikova Vira, Postgraduate Student, Department of Commodity Research and Expertise of Goods, Kharkiv State University of Nutrition and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: 0671229733; e-mail: novikova_vera@ukr.net.

DOI: 10.5281/zenodo.3263755

УДК 519.85

ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ СУМАРНОЇ ПЛОЩІ ПОПАРНИХ ПЕРЕТИНІВ ЗА ЛІНІЙНОГО РОЗТАШУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Ю.М. Тормосов, Є.Ю. Стоян, Є.М. Якушенко

Розглянуто окремий клас задач призначення геометричних об'єктів. Наведено формальну постановку задачі призначення геометричних об'єктів у вигляді задачі оптимізації на булівських змінних. Запропоновано один із наближених методів пошуку мінімуму сумарної площі попарних перетинів об'єктів, який можна використовувати й під час заповнення складських приміщень, і під час розміщення вузлів у складних технологічних апаратах.

Ключові слова: *задачі призначення, булівські змінні, мінімізація.*

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОЙ ПЛОЩАДИ ПОПАРНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПРИ ЛИНЕЙНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Ю.М. Тормосов, Е.Ю. Стоян, Е.Н. Якушенко

Рассмотрен отдельный класс задач назначения геометрических объектов. Приведена формальная постановка задачи назначения геометрических объектов в виде задачи оптимизации на булевых переменных. Предложен один из приближенных методов поиска минимума суммарной площади попарных пересечений объектов, который можно использовать и при заполнении складских помещений, и при размещении узлов в сложных технологических аппаратах.

Ключевые слова: *задачи назначения, булевы переменные, минимизация.*

THE PROBLEM OF MINIMIZING THE SUMMARY AREA OF MOBILE INTERRUPTIONS AT A LINEAR PLACEMENT OF GEOMETRIC OBJECTS

U. Tormosov, E. Stoyan, E. Yakushenko

The high computational complexity of the combinatorial optimization methods, the difference of the combinatorial properties of the sets which form the ranges of admissible solutions, are the reasons for the lack of unified approach to combinatorial optimization problems solving. The basic idea of the combinatorial methods consists in the transition from complete enumeration of finite set of solutions to reduced one. The impossibility of exact solution of combinatorial optimization problems of large dimension and specific limitations cause the development of approximate methods, but these methods also have serious disadvantages such as the obtained local extremum may not coincide with the global one, it is impossible to estimate the difference between the local and global extremum a priori. On this base, the development of optimization methods for various classes of functions on combinatorial sets is the topical problem. The unified approach to the study of geometric design problems on the base of the formalization of the concept of geometric information and the introduced information space is proposed in the research. In the research the main attention is given to the problem of locating geometric objects, constructing of the mathematical model of this problem. The solution of the optimization problem on the Boolean variables is proposed with the help of the method which is based on the immersion of combinatorial sets in an arithmetic Euclidean space. The statement of the practical problem of geometrical design is presented.

Keywords: *assignment problems, boolean variables, minimization.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Нехай маємо область розміщення S_0 і *n* геометричних об'єктів S_i, $i=\overline{1,n}$ із заданими формами й метричними характеристиками. Кожному об'єкту відповідає внутрішня точка, яку назвемо полюсом об'єкта. Області розміщення належить *n* точок p_j. Потрібно таким чином розмістити об'єкти S_i, $i=\overline{1,n}$ в області S_0, поєднуючи їх полюси з точками p_j, $j=\overline{1,n}$, щоб сумарна площа попарних перетинів об'єктів і площа тієї частини об'єктів, які не належать S_0, була мінімальною. Надалі об'єкт S_i, установлений на місце p_j, позначимо через S_0.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розвиток математичного програмування, застосування його в різних галузях людської діяльності, пов'язаних з вибором одного з можливих варіантів дії, сприяло появі великої кількості праць, присвячених задачам призначення [1–4].

Метою статті є розробка одного з наближених методів розв'язання задачі про призначення заданих об'єктів на фіксовані місця.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо математичну постановку описаної задачі. Введемо булівські змінні:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо об'єкт } S_i \text{ міститься в точці } p_j \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Для кожного об'єкта S_i і кожного p_j визначимо міру (площину) частини об'єкта S_i, що не належить S_0:

$$\omega_{ij}^0 = \mu(s_{ij} \setminus s_0).$$

Крім того, для об'єкта S_i, призначеного на місце p_j, і об'єкта S_k, призначеного на місце p_t, визначимо міру їх перетину:

$$\omega_{ijkt} = \mu(s_{ij} \cap s_{kt}).$$

Об'єкти на місця будемо призначати таким чином, щоб мінімізувати таку функцію:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\omega ijkt\,xij\,xkt+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}^{0}x_{ij} \qquad (1)$$

за наступних обмеженнях на змінні:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n};\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

Сенс цих обмежень полягає в тому, що на кожне місце призначається тільки один об'єкт, і кожен об'єкт може бути встановлений тільки на одне місце.

Для простоти подальшого викладу методу розв'язання задачі (1)–(2) здійснимо такі перетворення. Замість змінних $x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$, будемо розглядати вектор $y=(y_1\ldots y_q)\in R_q,\ q=n^2,\ y_k=x_{[k/n]+1.k-[k/n]-1}$ $[t]$ – ціла частина числа t. Множину всіх таких векторів позначимо B_q^2. Очевидно, що всі точки належать до множини B_q^2, і тільки вони задовольняють системі:

$$\begin{cases} 0\le g_i\le 1,\ i=\overline{1,q}, & (3)\\ \sum_{i=1}^{q}(y_i-\frac{1}{2})^2=\frac{q}{4}. & (4)\end{cases}$$

У результаті проведених перетворень можна сформулювати таку задачу:

$$\varphi(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{ij}\,y_i\,y_j+\sum_{i=1}^{n}\tilde{\omega}_i^0\,y_i\to\min; \qquad (5)$$

$$\sum_{i=nm-1}^{n(m-1)}y_i=1,\ m=0,1,\ldots,n-1 \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_{ni+y}=1,\ j=0,1,\ldots,n-1 \qquad (7)$$

$$0 \le y_i \le 1,\ i = \overline{1,q};\ \sum_{i=1}^{q} (y_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{q}{4}, \qquad (8)$$

де

$$\tilde{\omega}_{ij} = \omega_{[1/n]+1, i-[i/n]-1, [j/n]+1, j-[j/n]-1};$$
$$\tilde{\omega}_i^0 = \omega^0_{[i/n]+1, i-[i/n]-1}. \qquad (9)$$

Цікавим є перетворення цільової функції $\varphi(y)$ до опуклого вигляду, тобто побудова такої опуклої функції $\Phi(y)$, яка в точках множини B_q^2 збігається з $\varphi(y)$. Таке перетворення для квадратичної функції може бути проведено на основі таких справедливих для точок і множини співвідношень:

$$y_i \cdot y_j = \frac{1}{2}((y_i + y_j)^2 - y_i - y_j, \qquad (10)$$

$$-y_i \cdot y_j = \frac{1}{2}((y_i - y_j)^2 - y_i - y_j). \qquad (11)$$

Очевидно, що в правих частинах наведених співвідношень – опуклі функції. Тоді цільова функція вигляду (5) у разі заміни (10) – (11) після перетворень також опукла. Зауважимо, що у функції вигляду (5) коефіцієнти $\tilde{\omega}_{ij} \ge 0$, у зв'язку із чим під час перетворення до опуклого вигляду квадратичної функції загального вигляду необхідні обидва співвідношення (10) і (11).

Цільова функція (5) може бути записана в такій формі:

$$\varphi(y) = (\tilde{W}_{y,y}) + (\tilde{W}^0_{y,y}),$$

де $\tilde{W} = // \tilde{\omega}_{ij} //_{q \times q}$ – симетрична матриця квадратичної частини функції $\varphi(y)$; $\tilde{W}^0 \in R^q$ – вектор лінійної частини функції $\varphi(y)$. Здійснимо перетворення $\varphi(y)$ до опуклого вигляду. Маємо

$$(\tilde{W}_{y,y}) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \tilde{\omega}_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \tilde{\omega}_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \tilde{\omega}_{ij} y_i^2 - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \tilde{\omega}_{ij} y_i.$$

За перетину гіперплощин (6), (7) з *n*-сферою (9) утворюється гіперсфера розмірністю $S=q-2n-1$. Опишемо спосіб проведення вищезгаданої редукції розмірності задачі. Позначимо

$$V^1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 011 & \dots & 000 & \dots & 0 & \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 000 & \dots & 0 & \dots & 111 & \dots 1 \\ 10 & \dots & 010 & \dots & 0 & \dots & 100 & \dots & 0 \\ 01 & \dots & 001 & \dots & 0 & \dots & 010 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 00 & \dots & 100 & \dots & 1 & \dots & 000 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Здійснивши ортогоналізації матриці V^1, отримаємо матрицю *V*. Позначимо

$$A=V^1\tilde{W}V;\ B=V\tilde{W}^0 .$$

У результаті проведеного перетворення булівські вектори мають розмірність $S=q-2n-1$, а обмеження (6) – (7) виключаються.

Перенесемо центр сфери *S* у початок координат евклідового простору. Для цього проведемо заміну змінних задачі. Позначимо $z_i=y_i-\frac{1}{2},\ i=\overline{1,s}$. В результаті останніх перетворень математична постановка задачі буде мати такий вигляд:

$$F(Z)=(AZ,Z)+(B,Z)\to\min; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{s}Z_i^2=\frac{s}{4}; \tag{13}$$

$$-0{,}5\le z_i\le 0{,}5,\ i=\overline{1,s}, \tag{14}$$

де A – додатно певна симетрична матриця $\|a_{ij}\|_{sxx}, B\in R^1$.

Опишемо метод розв'язання задачі (12) – (14). Визначимо спочатку мінімум функції *F(Z)* на сфері *S*, що задається тепер співвідношенням (14). Складемо функцію Лагранжа завдання (12) – (13):

$$L(Z,\lambda)=(AZ,Z)+(B,Z)+\lambda(\frac{S}{4}-(Z,Z)).$$

Мінімум *F(Z)* на сфері може бути обчислений із такої системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(Z,\lambda)}{\partial Z} = 2AZ + B - 2\lambda Z = 0 \\ (Z, Z) = \dfrac{s}{4}. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи маємо

$$AZ - \lambda Z = -\frac{B}{2}.$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ – власні значення, а $l_1, l_2, \ldots, l_s$ – відповідні їм власні вектори. Тоді якщо λ не належить спектру матриці *A*, то

$$Z = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i}{\lambda_i - \lambda} l_i, \tag{15}$$

$$(Z, Z) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} = \frac{s}{4}, \tag{16}$$

де $b_i = (b, l_i)$.

Співвідношення (16) являє собою рівняння з одним невідомим $\lambda \in R^1$. Неважко бачити, що на кожному з проміжків $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ функція $\psi(\lambda) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i - \lambda)^2}$ опукла. Розв'язавши рівняння (16) на кожному з проміжків $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ одним з відомих чисельних методів, отримаємо не більше *2S* коренів $\lambda^{(i)}, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2s}$. При цьому

$$F(Z) = (AZ, Z) + (B, Z) = (\lambda Z - B/2, Z) + (B, Z) = \lambda(Z, Z) +$$
$$+\frac{1}{2}(B, Z) = \lambda\frac{s}{4} + \frac{1}{2}(B, Z) = \lambda\frac{s}{4} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i - \lambda^2)}.$$

Обчисливши функцію *F(Z)* за кожного $\lambda^{(i)}, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2s}$, визначимо мінімальне значення функції і корінь λ^*, за якого воно досягається. Підставивши λ^* в (13), визначимо $Z^* = \arg\min\limits_{Z \in s} F(Z)$. Таким чином, *F(Z)* досягає мінімуму на сфері *S* у точці $Z^* = (Z_1^0, \ldots, Z_s^0)$. Розглянемо компоненти вектора z^*. Серед них виберемо ті z_i^0, для яких не виконуються обмеження – нерівності завдання (12). (Зауважимо, що якщо все задовольняє обмеженням – нерівностям завдання (12), то z^* – її рішення). Зафіксувавши змінні, ми тим самим знизимо розмірність завдання на число зафіксованих компонент. Після перетворення функції мети й обмежень відповідно до проведеного зниження розмірності задачі отримаємо задачу, аналогічну (12), в просторі меншої розмірності. Знижуючи таким чином на кожному кроці розмірність завдання, ми не більш ніж за s кроків отримаємо вектор $\bar{z} = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_s})$, що дає наближене рішення задачі (12). Здійснивши зворотне перетворення, знайдемо $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_s^*)$, де $y_i^* = \overline{z_i} + \frac{1}{2}, i = \overline{1, s}$. Таким чином, y^* – наближене розв'язання задачі про призначення зазначених об'єктів на зафіксовані місця.

Було проведено обчислювальний експеримент, у ході якого під час вирішення різних завдань описаним методом у більшості випадків було отримано оптимальне рішення.

Список джерел інформації / References

1. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 264 с.

Sergienko, I., Shilo, V. (2003), *Problems of discrete optimization: problems, methods of solution, research* [*Zadachi diskretnoi optimizacii: problemi, metodi resheniya, issledovaniya*], Nauk. Dumka, Kyiv, 264 p.

2. Семенова Н. В. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.

Semenova, N., Kolechkina, L., Nagornaya, A. (2008), "The approach to the solution of vector problems of discrete optimization on the combinatorial set of permutations" ["Podhod k resheniu vektornih zadach diskretnoi optimizacii na kombinatornom mnogestve perestanovok"], *Cybernetics and Systems Analysis*, No. 3, pp. 158-172.

3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Stoyan, U., Emec', O. (1993), *Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization* [*Teoriya i metodi evklidovoi kombinatornoi optimizacii*], Institute for System Studies, Kyiv, 188 p.

4. Ємець О. О. Задачі оптимізації на комбінаторних множинах: властивості та розв'язання / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 130 с.

Emec', O. (2006), *Optimization problems on combinatorial sets, properties and solution* [*Zadachi optimizacii na kombinatornih mnoginah: vlastivosti ta rozv'yazannya*], RVC PUSKU, Poltava, 130 p.

Тормосов Юрій Михайлович, д-р техн. наук, проф., кафедра холодильної та торговельної техніки і прикладної механіки, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: tormosov@ukr.net.

Тормосов Юрий Михайлович, д-р техн. наук, проф., кафедра холодильной и торговой техники и прикладной механики, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: tormosov@ukr.net.

Tormosov Uriy, Doctor Of Science, Professor, Head of the Department of Refrigeration Trade Equipment and Applied Mechanics, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: tormosov@ukr.net.

Стоян Євген Юрійович, канд. техн. наук, доц., кафедра економіки та управління, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Стоян Евгений Юрьевич, канд. техн. наук, доц., кафедра экономики и управления, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Stoyan Evgen, Candidate of Scienses (comparable to the academic degree of Doctor of Philosophy, PhD), Associate Professor, Department Economics and Management, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Якушенко Євген Миколайович, канд. техн. наук, доц., кафедра холодильної та торговельної техніки і прикладної механіки, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

Якушенко Евгений Николаевич, канд. техн. наук, доц., кафедра холодильной и торговой техники и прикладной механики, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

Yakushenko Evgen, Candidate of Scienses (comparable to the academic degree of Doctor of Philosophy, PhD), Associate Professor, Department of Refrigeration Trade Equipment and Applied Mechanics, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

DOI: 10.5281/zenodo.3263757