УДК 621.791.92

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ НАКЛОННОЙ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНУЮ ПЛАСТИНУ, ПОЛНОСТЬЮ СЦЕПЛЕННУЮ С УПРУГИМ СЛОЕМ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОБЛЕМАМ ТЕХНИКИ

В. Л. Воробьев[1]

Поставленная задача моделирования сведена к системе трех интегральных уравнений на полубесконечном интервале с разностными ядрами. Получено приближенное решение этих уравнений методом ортогональных многочленов.

Ключевые слова: *система трех интегральных уравнений, приближенное решение методом ортогональных многочленов.*

Для повышения износостойкости деталей судовых машин и механизмов применяется метод нанесения на основную деталь износостойких покрытий малой толщины с высокими прочностными и износостойкими характеристиками. Поэтому поставлена **цель** исследовать напряженно-деформируемое состояние деталей с покрытием в зависимости от механических характеристик основной детали, моделируемой как упругий слой и покрытия, моделируемого как полубесконечная пластинка, загруженная вертикальной и горизонтальными нагрузками, движущимися с постоянной скоростью V вдоль торца покрытия.

Задача сведена к системе трех интегральных уравнений на полубесконечном интервале с разностными ядрами и указан приближенный метод решения этих уравнений методом ортогональных многочленов.

Полубесконечная пластина (рис. 1), занимающая область $(x \geq 0, |y| < \infty)$ с жесткостью D и толщиной $2h$, полностью сцеплена с упругим слоем толщиной H. На пластину действует наклонная сила $\overline{P}$, приложенная в точке $M_0(a,b)$, которая движется в направлении оси Oy с постоянной скоростью V. Определяются контактные напряжения $p_k(x,y)$ $(k = 1,2,3)$ и расчетные усилия в пластине. Сила $\overline{P}$ имеет проекции $q_k(x,y) = P_k \delta(x-a, y-b-Vt)$.

Для пластины контактные напряжения и перемещения находятся из системы дифференциальных уравнений [1], записанного для преобразований Фурье в комплексной форме по новой переменной $\overline{y} = y - Vt$ с параметром λ:

---

[1] © Воробьев В. Л., к.физ.-мат.н., доцент, Одесская национальная морская академия.

$$\begin{cases} U''_{1,\lambda}(x) - v_2 i\lambda U'_{2,\lambda}(x) - v_1\lambda^2 U_{1,\lambda}(x) + \dfrac{1}{\theta}\left[q_{1,\lambda}(x) - p_{1,\lambda}(x)\right] = \\ = \dfrac{2\rho h V^2\lambda^2}{\theta} U_{1,\lambda}(x), \\ -\lambda^2 U_{2,\lambda}(x) - v_2 i\lambda U'_{1,\lambda} + v_1 U''_{2,\lambda}(x) + \dfrac{1}{\theta}\left[q_{2,\lambda}(x) - p_{2,\lambda}(x)\right] = \\ = \dfrac{2\rho h V^2\lambda^2}{\theta} U_{2,\lambda}(x), \\ D\left(\dfrac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 U_{3,\lambda}(x) = q_{3,\lambda}(x) - p_{3,\lambda}(x) - h\left[q_{1,\lambda}(x) + p_{1,\lambda}(x)\right]' - \\ -\dfrac{2\rho h V^2\lambda^2}{\theta} U_{3,\lambda}(x) + i\lambda h\left[q_{2,\lambda}(x) + p_{2,\lambda}(x)\right],\ (k=1,2) \\ \theta = \dfrac{1-v^2}{2E\ h},\quad D = \dfrac{h^2}{3\theta},\quad v_k = \dfrac{1+(-1)^k v}{2},\quad . \end{cases} \tag{1}$$

$$\left[q_m, p_m, U_m, V_m(x,\bar{y})\right] = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[q_m^{\lambda,\omega}, p_m^{\lambda,\omega}, U_m^{\lambda,\omega}, V_m^{\lambda,\omega}(x)\right] e^{-i\bar{y}\lambda}\, d\lambda d\omega .$$

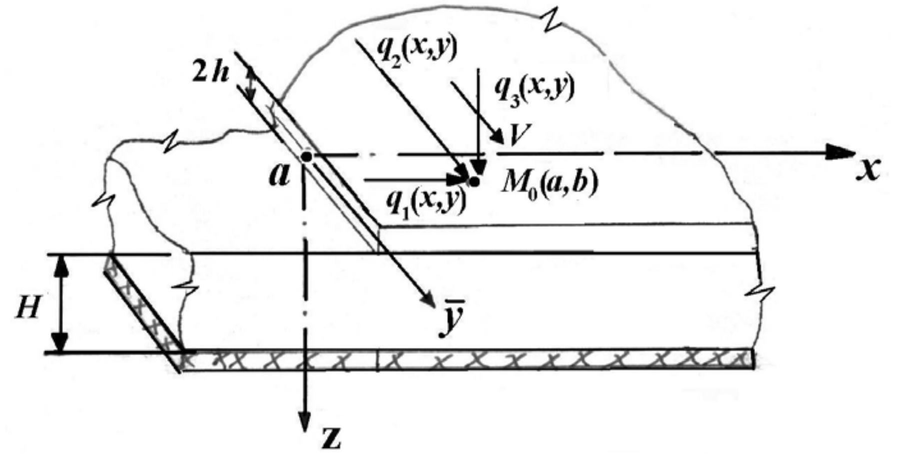

Рис. 1

Преобразования Фурье перемещений $V_{m,\lambda}(x)$, $(m = 1, 2, 3;\quad -\infty < x < \infty)$ поверхностных точек упругого слоя связаны с преобразованиями Фурье контактных напряжений $p_{j,\lambda}(x)$, следующими интегральными соотношениями [2]:

$$V_{m,\lambda}(x) = \theta_0 \sum_{j=1}^{3} \int_0^{\infty} K_{mj}^{\lambda}(x-s) p_{j,\lambda}(s) ds, \quad K_{mj}^{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{mj}^{\lambda}(t) e^{-izt} dt, \quad m, j = 1, 2, 3;$$

$$H_{11}^{\lambda}(t) = t^2 M(u) + \lambda^2 N(u), \quad H_{22}^{\lambda}(t) = t^2 N(u) + \lambda^2 M(u),$$

$$H_{12}^{\lambda}(t) = H_{21}^{\lambda}(t) = t\lambda[M(u) - N(u)]; \quad H_{13}^{\lambda}(t) = -H_{31}^{\lambda}(t) = it\mathrm{P}(u),$$

$$H_{32}^{\lambda}(t) = -H_{23}^{\lambda}(t) = i\lambda \mathrm{P}(u), \quad u = \sqrt{t^2 + V^2\lambda^2}; \quad \sigma_n = \sqrt{u^2 - k_n^2}, \quad (n = 1,2);$$

$$k_2^2 = \rho_0 V^2 \lambda^2 H_c^2; \quad k_1^2 = k_2^2 (1 - 2v_0)/(2 - 2v_0);$$

$$M(u) = k_2^2 \left[\sigma_2 sh2\sigma_2 \cdot ch2\sigma_1 - \sigma_1^{-1} u^2 sh2\sigma_1 ch2\sigma_2\right]/(2u^2 \Delta(u);$$

$$N(u) = 2sh2\sigma_2 /(u^2 \sigma_2 sh2\sigma_2); \tag{2}$$

$$\mathrm{P}(u) = (2u^2 - 0{,}5k_2^2)(1 - ch2\sigma_1 ch2\sigma_2)/\Delta(u) +$$

$$+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\Delta^{-1}(u)\left[2u^4 - u^2\left(1{,}5k_2^2 + k_1^2\right) + k_2^2 k_1^2\right] + sh2\sigma_1 sh2\sigma_2;$$

$$R(u) = k_2^2 (2\Delta(u))^{-1} \left[\sigma_1^2 sh2\sigma_1 ch2\sigma_2 - \sigma_2^{-1} u^2 sh2\omega_2 ch2\sigma_1\right];$$

$$\Delta(u) = u^2(2u^2 - k_2^2) - (2u^4 - uk_2^2 + 0{,}25k_2^4) ch2\sigma_1 ch2\sigma_2 +$$

$$+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} u^2 \left[2u^4 - u^2\left(2k_2^2 + k_1^2\right) + k_1^2 k_2^2 + 0{,}25k_2^4\right] sh2\sigma_1 sh2\sigma_2.$$

Если толщина слоя достаточно большая, то его можно моделировать как упругое полупространство, для которого в формуле (2) следует положить

$$\begin{gathered} M(u) = -0{,}5\theta_2^2 \sigma_2^0 / u^2 / \Delta_0(u); \quad N(u) = 2/u^2/\sigma_2^0; \\ \mathrm{P}(u) = \left(u^2 - 0{,}5\theta_2^2 - \sigma_1^0\sigma_2^0\right)/\Delta_0(u); \quad R(u) = -0{,}5\theta_2^2\sigma_1^0/\Delta_0(u); \\ \Delta_0(u) = \left(u^2 - 0{,}5\theta_2^2\right)^2 - u^2\sigma_1^0\sigma_2^0; \quad \sigma_k^0 = \sqrt{u^2 - \theta_k^2}; \\ \theta_1^2 = \rho_0 V^2 |\lambda|^2 \alpha_0; \quad \theta_2^2 = \rho_0 V^2 |\lambda|^2 \zeta_0; \\ \theta_0 = 2(1 - v_0^2)/E_0, \quad \zeta_0 = v_0/(1 - v_0), \quad \alpha_0 = (1 - 2v_0)/(2 - 2v_0). \end{gathered} \tag{3}$$

В формулах (1)-(3) E, E_0 – модули упругости, v, v_0 – коэффициенты Пуассона, ρ, ρ_0 – удельные веса материалов пластины и упругого слоя.

Преобразования Фурье перемещений пластины и упругого слоя должны удовлетворять условиям контакта

$$U_{1,\lambda}(x)=V_{1,\lambda}(x)+h\ U'_{3,\lambda}(x),\quad U_{2,\lambda}(x)=V_{2,\lambda}(x)+i\lambda h\ U_{3,\lambda}(x),$$
$$U_{3,\lambda}(x)=V_{3,\lambda}(x),\quad x\ge 0. \tag{4}$$

Если $\lambda\ne 0$, то общие, исчезающие на бесконечности, решения дифференциальных уравнений из (1) имеют вид:

$$U_{1,\lambda}(x)=c^{-1}(a_{1,\lambda}+a_{2,\lambda}V\,|\,\lambda\,|\,x)\,e^{-V|\lambda|x}+I_1^0\left[q_{1,\lambda}(x)-p_{1,\lambda}(x)\right]+$$
$$+\rho\ \left\{\lambda^2 I_2^0\left[q_{1,\lambda}(x)-p_{1,\lambda}(x)\right]-i\lambda I_2^1\left[q_{2,\lambda}(x)-p_{2,\lambda}(x)\right]\right\},$$
$$U_{2,\lambda}(x)=-ic^{-1}\,|\,\lambda\,|\big/\lambda\left[a_{1,\lambda}+a_{2,\lambda}\big((3-v)/(1+v)-V\,|\,\lambda\,|\,x\big)\right]e^{-V|\lambda|x}+$$
$$+\frac{1}{v_1}I_1^0\left[q_{2,\lambda}(x)-p_{2,\lambda}(x)\right]-\rho\ \left\{\lambda^2 I_2^0\left[q_{2,\lambda}(x)-p_{2,\lambda}(x)\right]+i\lambda I_2^1\left[q_{1,\lambda}(x)-p_{1,\lambda}(x)\right]\right\}, \tag{5}$$
$$U_{3,\lambda}(x)=(h\ )^2\big/3c\ \left(a_{3,\lambda}+a_{4,\lambda}V\,|\,\lambda\,|\,x\right)e^{V|\lambda|x}+I_2^0\left[q_{3,\lambda}(x)-p_{3,\lambda}(x)\right]-$$
$$-h\ I_2^1\left[q_{1,\lambda}(x)+p_{1,\lambda}(x)\right]+i\lambda h\ I_2^0\left[q_{2,\lambda}(x)+p_{2,\lambda}(x)\right],$$
$$\rho=(1+v)/(1-v);\quad c\ =\theta_0/\theta;\qquad x\ge 0,$$
$$I_n^r[\,f(x)]=\int_0^\infty G_{nr}^\lambda(|\,x-s\,|)\,f(s)ds,;$$
$$G_{nr}^\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(it)^r e^{izt}}{(t^2+\lambda^2)^n-2\rho hV^2\lambda^2}dt,\ (r\le 2n).$$

Постоянные $a_{j,\lambda}$ $(j=1,2,3,4)$ определяются из условий на торце покрытия для преобразования Фурье напряжений, моментов, и обобщенных поперечных сил, определяемых по формулам

$$\sigma_{x,\lambda}(x)=E\left[U'_{1,\lambda}(x)-vi\ \lambda U_{2,\lambda}(x)\right]/\left(1-v^2\right);$$
$$\tau_{xy,\lambda}(x)=E\left[U'_{2,\lambda}(x)-i\ \lambda U_{1,\lambda}(x)\right]/(2+2v);$$
$$M_{x,\lambda}(x)=-D\ \left[U''_{3,\lambda}(x)-v\ \lambda^2 U_{3,\lambda}(x)\right];$$
$$(D)^{-1}Q_{x,\lambda}(x)=-U'''_{3,\lambda}(x)+(2-v\ )\lambda^2 U'_{3,\lambda}(x)-h\ \left[q_{1,\lambda}(x)+p_{1,\lambda}(x)\right] \tag{6}$$

Для определения неизвестных контактных напряжений в результате подстановки (2) и (5) в условия контакта (4) получена система из шести интегральных уравнений. Эта система после введения обозначений $\lambda x = t$, $\lambda s = \tau$,

$$\lambda^{-1}\left[p_{k,\lambda}(t/\lambda), q_{k,\lambda}(t/\lambda)\right] = \left[p_k(t), q_k(t)\right],$$

примет вид

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{0}^{\infty}\ell_{rk,\lambda}(|t-\tau|)p_k(\tau)d\tau == \left(A_{r,\lambda} + B_{r,\lambda}\,|\lambda|\,t\right)e^{-|\lambda|t} + cf_{r,\lambda}(t), \quad t \ge 0; \quad r = 1, 2, 3;$$
$$\ell_{rk,\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_{rk}^{\lambda}(t) + h_{rk,\lambda}(t)\right]e^{-izt}dt. \tag{7}$$

Входящие сюда функции и постоянные определяются по формулам:

$$h_{11,\lambda}(t) = 2c\ \ (2\omega_\lambda - \alpha\lambda^2\omega^2); \quad h_{12,\lambda}(t) = -h_{21,\lambda}(t) = 2c\ \alpha\ \ it\omega^2; \quad \omega_\lambda = \left(t^2 + V^2\lambda^2\right)^{-1};$$

$$h_{22,\lambda}(t) = 2c\ \ [(1-\nu\ \ )^{-1}\omega_\lambda + \alpha\,V^2\lambda^2\omega_\lambda^2]; \quad h_{13,\lambda}(t) = -h_{31,\lambda}(t) = 2c\ \ it\omega_\lambda^2/h\ \ ;$$

$$h_{33,\lambda}(t) = 2c\ h^{-2}\omega_\lambda^2; \quad h_{23,\lambda}(t) = -h_{32,\lambda}(t) = 2c\ iV\lambda\omega_\lambda^2/h\ \ ;$$

$$f_{1,\lambda}(x) = -2I_1^0[q_{1,\lambda}(x)] + \gamma\ V^2\lambda^2 I_2^0[q_{1,\lambda}(x)] - \gamma\ iV\lambda I_2^1[q_{2,\lambda}(x)] - \frac{3}{h}I_2^1[q_{3,\lambda}(x)]; \tag{8}$$

$$f_{2,\lambda}(x) = -\gamma\,I_2^1[q_{1,\lambda}(x)] - \gamma V^2\lambda^2 I_2^0[q_{2,\lambda}(x)] - \frac{2}{1-\nu}I_1^0[q_{2,\lambda}(x)] - \frac{3}{h}iV\lambda I_2^0[q_{3,\lambda}(x)];$$

$$f_{3,\lambda}(x) = -\frac{3}{h^2}\{h\ \ I_2^1[q_{1,\lambda}(x)] - hiV\lambda I_2^0[q_{2,\lambda}(x)] + I_2^0[q_{3,\lambda}(x)]\},$$

$$\alpha = (1-2\nu\ \ )/(1-\nu\ \ ); \quad \gamma\ \ = 2(2-\nu\ \ )/(1-\nu).$$

$$A_{1,\lambda} = a_{4,\lambda} + h\ V\lambda\left(a_{1,\lambda} - a_{2,\lambda}\right); \quad A_{2,\lambda} = \frac{|\lambda|}{i\lambda}\left[a_{3,\lambda} - \frac{3-\nu}{1+\nu}a_{4,\lambda}\right] + h\ \ \lambda a_{1,\lambda};$$

$$A_{3,\lambda} = a_{1,\lambda}; \quad B_{1,\lambda} = a_{4,\lambda} + hV\lambda a_{2,\lambda}; \quad B_{2,\lambda} = \frac{|\lambda|}{i\lambda}a_{4,\lambda} + hV\lambda a_{2,\lambda}; \quad B_{3,\lambda} = a_{2,\lambda}.$$

Приближенное решение системы (7) строится методом ортогональных многочленов [3] и разыскивается в виде следующего ряда ($x, \lambda > 0$):

$$p_k(\tau) = 2(2\bar\lambda\tau)^{-1/2}e^{-\bar\lambda\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\varphi_{n,k}L_n^{-1/2}(2\bar\lambda\tau),\ \mu_n = \frac{2\sqrt{2}n!}{\Gamma\left(n+1/2\right)},\ (\bar\lambda = V\lambda), x, \lambda > 0, \tag{9}$$

$L_n^\alpha(z)$ – многочлены Чебышева-Лагерра; $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [4].

В результате применения этого метода относительно коэффициентов разложения получим блочную систему уравнений для определения коэффициентов $\varphi_{n,j}$ ряда (9)

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty} I_{m-n,r,k}\varphi_{n,k} = f_{m,r}, \quad r=1,2,3; \quad m=0,1,2,...$$

$$I_{m-n,r,k} = 4\mu_m\mu_n \iint_0^{\infty} \ell_{rk,\lambda}(|t-\tau|)e^{-(t+\tau)}(4t\tau)^{\alpha} L_m^{\alpha}(2\tau)L_n^{\alpha}(2t)\,dt\,d\tau, \qquad (10)$$

$$f_{m,r} = 2\mu_m \int_0^{\infty} \left[c\ \lambda(A_r + B_r t)e^{-t} + f_r(t)\right]e^{-t}(2t)^{\alpha} L_m^{\alpha}(2t)\,dt, \quad (\alpha=-1/2).$$

Входящие сюда функции $f_{r,\lambda}(t)$ зависят от загружения покрытия. Если нагрузки загружены по линиям $x=b_j$, $j=1,2,3$ (изображенных на рис. 2) эти коэффициенты представим в виде

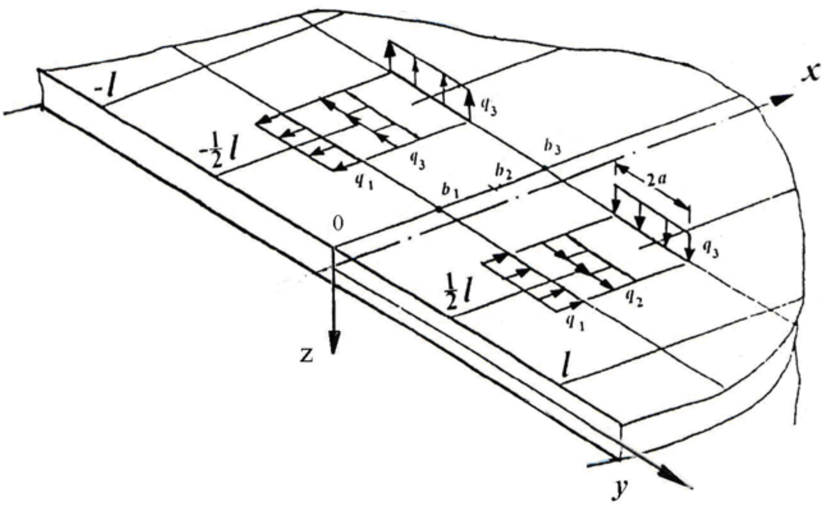

Рис. 2

$$\bar{f}_{m,1} = -2R_m^{1,0}(\beta_1) + \gamma R_m^{2,0}(\beta_1) + \gamma R_m^{2,1}(\beta_2) - 3h^{-1}R_m^{2,1}(\beta_3); \quad \beta_j = cb_j;$$

$$\bar{f}_{m,2} = \gamma\ R_m^{2,1}(\beta_1) + \frac{2}{1-\nu}R_m^{1,0}(\beta_1) - \gamma R_m^{2,0}(\beta_2) + 3h^{-1}R_m^{2,0}(\beta_3); \qquad (11)$$

$$\bar{f}_{m,3} = -3h^{-1}\left[R_m^{2,1}(\beta_1) + R_m^{2,0}(\beta_2) + h^{-1}R_m^{2,0}(\beta_3)\right]; \quad R_m^{2,1}(x) = \left(R_m^{2,0}(x)\right)'.$$

Функции $R_n^{p,0}(z)$ будут определяться формулами

$$R_0^{1,0}(z)=e^{-z}\left[0{,}5\cdot\Gamma^*(x)+\sqrt{2z}\right]/\sqrt{\pi},\quad \Gamma^*(z)=e^{2z}\Gamma(0{,}5;2z),$$
$$R_0^{2,0}(z)=e^{-z}\left[(2{,}5-2z)\cdot 1{,}5\cdot\Gamma^*(z)+(3{,}75+2z)\sqrt{2z}\right]/6/\sqrt{\pi},$$
$$R_1^{1,0}(z)=-e^{-z}(2z)^{2+\alpha}\left[2\Gamma(3+\alpha)\right]^{-1}, \qquad (12)$$
$$R_1^{2,0}(z)=-e^{-z}\left\{3{,}75\cdot\left[0{,}5\cdot\Gamma^*(z)+\sqrt{2z}\right]+(2z)^{1,5}(2{,}5+2z)\right\}/15/\sqrt{\pi},$$
$$R_m^{p,0}(z)=\frac{(-1)^p 2^{1-2p}}{\Gamma(p+0{,}5+m)}(m-p)!e^{-z}(2z)^{2p-0,5}L_{m-p}^{2p-0,5}(2z),\quad p=1,2;\quad m=2,3,\ldots\ ,$$

где $\Gamma(\alpha,2z)$ – неполная Гамма-функция [4] (штрих означает производную).

Входящие в искомое решение (9) коэффициенты $\varphi_{n,k}$ находятся из бесконечной системы (10). Так как правые части системы содержат неизвестные произвольные постоянные A_r, B_r ($r=1,2,3$), которые выражаются согласно (8) через a_j ($j=1,2,3,4$), то пользуясь линейностью этой системы, коэффициенты $\varphi_{n,k}$ будем разыскивать в виде

$$\varphi_{n,k}=\sum_{p=1}^{3}\left(A_{p,\lambda}\varphi_{n,k,p}+B_{p,\lambda}\overline{\varphi}_{n,k,p}\right)+\varphi_{n,k,p};\quad (n=0,1,2,\ldots;\quad k=1,2,3), \qquad (13)$$

где $\varphi_{n,k,r}$, $\overline{\varphi}_{n,k,r}$, $\varphi_{n,k,4}$ находятся из бесконечной системы (12), в правых частях которых, соответственно записанных в (17) слагаемым, вместо $f_{m,r}$ находятся величины

$$\delta_{ip}\delta_{1m},\quad \delta_{rp}(\delta_{0m}-2\delta_{1m})/4,\quad \bar{f}_{m,r}\,. \qquad (14)$$

Бесконечные системы (10) с учетом (13), (14) удобно решать приближенно методом редукции.

Постоянные $a_{j,\lambda}$ ($j=1,2,3,4$), входящие в (5) и (13), определяются из формул (6) при $x=0$. Подставив формулы (5) в (13) и положив $x=0$, получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(1-\nu)\lambda c^{-1}\left[(1-\nu)/(1+\nu)a_2-a_1\right]-\sigma_1\varphi_{0,1}+\sigma_2\varphi_{0,2}+\sigma_3(\varphi_{1,1}+\varphi_{1,2})=\\
&=2h\ \sigma_{x,\lambda}(0)-\bar{\sigma}_{x,\lambda}(0,\beta_1);\\
&(1-\nu)\lambda c^{-1}\left[2/(1+\nu)a_2-a_1\right]-\tau_1\varphi_{0,1}+\tau_2\varphi_{0,2}+\tau_3(\varphi_{1,1}+\varphi_{1,2})=\\
&=2h\ \tau_{xy,\lambda}(0)-\bar{\tau}_{xy,\lambda}(0,\beta_2);\\
&h\lambda(3c)^{-1}\left[2a_4-(1-\nu)a_3\right]+m_1\left(\varphi_{0,2}+\varphi_{0,3}/h\right)-m_3\varphi_{0,1}-\\
&-m_3\left(\varphi_{1,1}+\varphi_{1,2}+\varphi_{0,3}/h\right)=M_{x,\lambda}(0)/h-\bar{M}_{x,\lambda}(0,\beta_3);\\
&h^2\lambda(3c)^{-1}\left[(1+\nu)a_4-(1-\nu)a_3\right]+h\left[q_1\left(\varphi_{0,2}+\varphi_{0,3}/h\right)\right]+\\
&+q_2\varphi_{0,1}-m_3\left(\varphi_{1,1}+\varphi_{1,2}+\varphi_{1,3}/h\right)=Q_{x,\lambda}(0)-\bar{Q}_{x,\lambda}(0,\beta_3);\\
&\quad\sigma_1=(9+\nu)/16;\quad \sigma_2=(3-5\nu)/16;\quad \sigma_3=(1+\nu)/8;\\
&\quad\tau_1=(5-3\nu)/16;\quad \tau_2=(7-\nu)/16;\\
&\quad m_1=(3+5\nu)/16;\quad m_2=(7+\nu)/16;\quad m_3=(1-\nu)/8;\\
&\quad q_1=(9-\nu)/16;\quad q_2=(5+3\nu)/16.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь $\sigma_{x,\lambda}(0)$, $\tau_{xy,\lambda}(0)$, $M_{x,\lambda}(0)$, $Q_{x,\lambda}(0)$ – соответственно нормальные и касательные напряжения, изгибающий момент и поперечная сила в торцах покрытий; $\bar{\sigma}_{x,\lambda}(0,\beta_1)$, $\bar{\tau}_{xy,\lambda}(0,\beta_1)$, $\bar{M}_{x,\lambda}(0,\beta_3)$, $\bar{Q}_{x,\lambda}(0,\beta_3)$ – аналогичные усилия, действующие по линиям $\xi=\beta_i$ $(i=1,2,3)$ (рис. 2).

Коэффициенты $\varphi_{n,j}$ определяются формулой (13), в которую входят постоянные $a_{j,\lambda}$ $(j=1,2,3,4)$. Подставив формулу (13) в (15) и собрав слагаемые, содержащие одинаковые постоянные, получим линейную систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных $a_{j,\lambda}$. Определив эти постоянные, найдем напряжения и изгибные усилия в покрытиях.

В качестве примера были проведены вычисления приведенного изгибающего момента в балочной плите, загруженной только вертикальной сосредоточенной силой, приложенной в точке $\beta=cb$. При этом не учитывались касательные контактные напряжения. Из вычислений следует, что при $\beta H\geq 3{,}2$ слой можно заменить на упругое полупространство, для которого расчетные формулы существенно упрощаются. Если же $\beta H\leq 0{,}1$ упругий слой можно моделировать как винкреровское основание с коэффициентами податливости $k_j = \lambda_j H$ ($j = 1,2,3$). В этом случае контактные напряжения вычисляются по формулам $p_{j,\lambda}(x) = k_j^{-1} U_{j,\lambda}(x)$. Из результатов вычисления для всех толщин слоя при нагрузках на пластину, приложенных на расстояниях $\beta \geq 1{,}8$, расчетные усилия в пластине практически совпадают с аналогичными усилиями в бесконечной пластине, для которой получено точное решение уравнения (7) при $-\infty < x < \infty$ и $A_{r,\lambda} = B_{r,\lambda} = 0$.

Выводы

1. Построена математическая модель задачи для упругого слоя и полностью сцепленной с ним полубесконечной пластины, загруженной движущейся с постоянной скоростью наклонной силой.
2. Получено приближенное решение этой математической модели методом ортогональных многочленов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – К.: Вища школа, 1982. – 167 с.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тяжких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 324 с.
4. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1971. – 1108 с.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Фитматгиз, 1961. – 387 с.
6. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнение в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 420 с.

Рукопись поступила в редакцию 28.04.2013 г.