

**Рудницький В.Б.,  
Ярецька Н.О.,  
Венгер В.О.**

Хмельницький національний університет,  
м. Хмельницький, Україна  
**E-mail:** rudvb@ukr.net, massacr2@ukr.net

## ЗАСТОСУВАННЯ ІТ ТЕХНОЛОГІЙ В МЕХАНІЦІ ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

УДК 539.3

У статті з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності представлено розв'язок контактної задачі про контактну взаємодію пружного шару з початковими напруженнями і співвісних попередньо напружених циліндрів із застосуванням ІТ технологій. Розроблено алгоритм та комп'ютерна програма числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу.

**Ключові слова:** ІТ технології, лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, інтегральне рівняння Фредгольма, метод послідовних наближень.

### Вступ

Велика увага у механіці суцільних середовищ приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язане із проблемою визначення їх напружено - деформованих станів. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності. Праці з контактної взаємодії пружних штампів із півпростором або шаром навіть у лінійній теорії пружності досить мало. Це пояснюється тим, що їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, розв'язок яких пов'язаний із великими математичними труднощами. Тому дана робота присвячена застосуванню ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла, що дозволяє полегшити дослідження проблеми передачі навантаження пов'язаної із врахуванням початкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх контакту, а розрахунок важливих елементів конструкцій дозволить більш ефективно враховувати міцність матеріалів шляхом її правильної оцінки, зберігаючи у цілому необхідну функціональність.

Перші роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [1, 2]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [3 - 8].

### Мета, постановка задачі та граничні умови

*Метою роботи є:*

1. Розв'язок осесиметричних статичних задач: а) про тиск пружного циліндричного штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями без врахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності у випадку рівних коренів визначального рівняння [6] ( $n_1 = n_2$ ) в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу; б) про контактну взаємодію пружного шару з початковими напруженнями і співвісних попередньо напружених циліндрів. Відмітимо, що при  $R_1 = R_2$  (радіуси співвісних циліндрів), виходячи із умов симетрії, дана задача може бути трактована як задача про тиск попередньо напруженого циліндричного штампів на шар з початковими напруженнями, що знаходиться на жорсткій основі без тертя. Тому далі зробимо акцент на розв'язку задачі 1, а).

2. Врахування залишкових напружень під час контактної взаємодії пружних циліндра та шару на закон розподілу тиску в місцях їх дотику за допомогою ІТ технологій, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріалоемність, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

3. Розробка алгоритму та комп'ютерної програми, що принципово спрощуватиме процес отримання числових і графічних результатів досліджень.

*Постановка задачі:* Нехай пружний циліндричний штамп радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією сили  $P$  після виникнення там початкового деформованого стану [6 - 8].  $h_1$  – товщина шару в початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною  $h_2$  у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене

тільки до вільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки торця штамп переміщуються у напрямку осі симетрії  $u_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні. У випадку попередньо напруженого шару пропонується наступний вид закріплення із основою – шар лжить на жорсткій основі без тертя.

Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани в шарі, штампі та основі є однорідними та рівними. а пружні потенціали – двічі неперервно - диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2].

Для дослідження введено лагранжеві координати  $(x_1, x_2, x_3)$ , які в початковому стані співпадають з декартовими координатами  $(y_1, y_2, y_3)$ . Матеріали штамп, шару та основи вважаються ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат.

У системі циліндричних координат  $(\rho, \theta, z_1)$  такій постановці відповідають граничні умови [6 - 8].

### Виклад матеріалів досліджень

Методика розв'язання поставленої задачі поділяється на два етапи: аналітичний, який у повній мірі висвітлений у працях [6 - 8] і чисельний. Алгоритм чисельного розв'язку, що реалізований у вигляді програми в пакеті Maple і базується на наступних кроках:

1. Вводимо усі необхідні параметри, що стосуються характеристик конкретного пружного потенціалу та даних задачі (рис. 1).

```

Програма KNDS_CS_PZN:
> restart;
> with(DEtools): with(linalg):with(numapprox):with(stats):
Рівні корені n1=n2 (гармонічний потенціал)
> lambda := [0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3]; R := 1; E := 3.92; sigma := 0.47; h := 1.6; H := 10; M := E/(2*(1 + sigma));
> v[1] := 0, 3 : v := 0.5 : n := 32 : l := H/R : mu0 := E/(2*(1 + sigma)); C[10] := mu0/2; pi := 3.1415926535897932385;
> lambda := E*sigma/((1 + sigma)*(1 - 2*sigma)); lambda3 := ((1 + sigma) - 2*sigma*lambda[1])/(1 - sigma);
> n1 := lambda3^2/lambda[1]^2; n2 := n1; m1 := sqrt(n1);
> m2 := (lambda*lambda[1] + (lambda - 2*mu0)*lambda3)/(lambda*lambda[1] + (lambda + 2*mu0)*lambda3);
> v1 := sqrt(n1); v2 := sqrt(n2); v_p := 1/v1 + 1/v2; v_m := 0;
> c[44] := 2*M*lambda3/(lambda[1]*(lambda[1] + lambda3)); l1 := lambda[1]/lambda3;
> l2 := 0.5*(2*M + 3*lambda)/(lambda/lambda[1] - 1/lambda*(5*lambda + 4*M))/m1 + l1;
> s0 := (1 + m2)/(1 + m1); s1 := (m1 - 1)/m1; s2 := m2/m1*v1/v2; s3 := s0*v1/v2; s := s0*l2/l1; h0 := h/lambda3; pd3 := lambda3*g3*p0;
> pd1 := lambda[7]*q1*p0; c0 := 2*mu0*lambda3^(5/3)/(1 + lambda3^(2/3)); c1 := -2*mu0*lambda3^(5/3)/(1 + lambda3^(2/3))/n1; c2 := c1;
> mu1 := [3.83170596919664, -3.83170596919664, 7.01558666796478, -7.01558666796478, 10.1734681323788, -10.1734681323788, 13.3236919321055,
16.4706671908702, -16.4706671908702, 19.4346165878679, -19.4346165878679, 20.37639142 + 1.557202549*I, -20.37639142 - 1.557202549*I, 21.04870762
+ 3.976919340*I, -21.04870762 - 3.976919340*I, 21.5605929047436 + 6.65907022110337*I, -21.5605929047436 - 6.65907022110337*I, 21.8786784376482
+ 9.67260844485393*I, -21.8786784376482 - 9.67260844485393*I, 21.9462346968257 + 13.0952362048123*I, -21.9462346968257 - 13.0952362048123*I,
21.6766855327066 + 17.0482655214024*I, -21.6766855327066 - 17.0482655214024*I, 20.92507884 + 21.74117734*I, -20.92507884 - 21.74117734*I, 19.4115005528339
+ 27.5991196552632*I, -19.4115005528339 - 27.5991196552632*I, 16.4272460104813 + 35.8065438125979*I, -16.4272460104813 - 35.8065438125979*I,
16.4272460104813 - 35.8065438125979*I, -16.4272460104813 + 35.8065438125979*I, 19.4115005528339 - 27.5991196552632*I, -19.4115005528339
+ 27.5991196552632*I, 20.92507884 - 21.74117734*I, -20.92507884 + 21.74117734*I, 21.6766855327066 - 17.0482655214024*I, -21.6766855327066
+ 17.0482655214024*I, 21.9462346968257 - 13.0952362048123*I, -21.9462346968257 + 13.0952362048123*I, 21.8786784376482 - 9.67260844485393*I,
-21.8786784376482 + 9.67260844485393*I, 21.5605929047436 - 6.65907022110337*I, -21.5605929047436 + 6.65907022110337*I, 21.04870762 - 3.976919340*I,
-21.04870762 + 3.976919340*I, 20.37639142 - 1.557202549*I, -20.37639142 + 1.557202549*I];
> kappa := s0 - s;
> alpha := (2*mu0 + lambda)/(lambda*m1)*v1; beta := 2*(mu0 + lambda)/c[44]/(1 + m1)/l1; k := 1; k1 := 1;
> theta1 := C[44]*11*(1 + m1)*kappa; theta3 := m1*(s1 - s3)/v1; theta5 := (v2 + v1*s)*n1*n2/(E*(m1*v2^3 + m2*v1^3));
> theta4 := m1/n1 - m2/(n2*s0); theta6 := m1/v1^3 + m2/v2^3; theta8 := m1/n1 + m2/n2; theta7 := (1 + c0 - 2*c1)/v1 + (1 + c0 - 2*c2)/v2;
> epsilon := 0.01; theta9 := v2*(1 + m2)/(m2 - m1); n := h0/(v2*R);

```

Рис. 1 – Параметри, що стосуються характеристик конкретного пружного потенціалу та вхідні дані задачі

2. Для визначення напружено - деформованого стану у пружному шарі з початковими напруженнями, що виражені через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля, при  $n_1 = n_2$ :

$$u^{(2)} = \theta_3 \left( \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta\rho) d\eta \right) \quad Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (1)$$

де  $\theta_3 = m_1(s_1 - s_0)v_1^{-1}$ ,  $F(\eta)$  – невідома функція;

$J_n(\eta\rho)$ ,  $I_n(\gamma_k v_1\rho)$  – функції Бесселя;

$h = h_1/R$ ,  $\theta_1 = C_{44}l_1(1 + m_1)\kappa$ ;

$v_1 = \sqrt{n_1}$ ;

значення коефіцієнтів  $C_{44}$ ,  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $s_i$  залежать від характеру пружного потенціалу і подані в [2],

$\kappa = s_0 - s$ .

У співвідношення (1) вводиться позначення  $F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}$ . А вид функції  $G(\eta)$  визначається із граничних умов [6] і має вигляд:

$$G(t) = (t - e^{-t} + 1)(sht)^{-1} P(t), \quad P(t) = \kappa sht(t + \kappa sht)^{-1}, \quad t = 2h\eta v_1^{-1}. \quad (2)$$

Так для (2), при  $n_1 = n_2$ , спираючись на [2], апроксимується функція  $P(x)$  виразом:

$$P(x) \cong 1 - (\tilde{v}_1 + 1)^{-1} x(shx)^{-1} - 0.14x(\tilde{v}_1(\tilde{v}_1 + 1)chx)^{-1},$$

де  $\tilde{v}_1 = s - s_0$ .

Відмітимо, що (1) одержані за допомогою введених О.М. Гузем потенціалів  $\Phi_i(y_1, y_2, y_3)$  [1, 2].

Частина програми, що відображає даний крок, представлена на рис. 2.

```
> G1_0 := normal(G1);
> G1_2 := subs(exp(eta*2*h/v1)=t^(-2*h/v1), G1_1): G1_2 := subs(exp(-eta*2*h/v1)=t^(2*h/v1), G1_2): G1_2 := subs(eta=-ln(t), G1_2);
> G1_3 := normal(G1_2);
> G1_3 := convert(G1_3, rational);
> G1_4 := series(G1_3, t=1, 19);
> G1_5 := convert(G1_4, polynomial);
> G1_5 := collect(G1_5, t);
> G1_6 := evalf(G1_5);
> G1_7 := subs(t=exp(-eta), G1_6);
> a10r := coeff(G1_6, t, 0);
> a1r := [coeff(G1_6, t, 1), coeff(G1_6, t, 2), coeff(G1_6, t, 3), coeff(G1_6, t, 4), coeff(G1_6, t, 5), coeff(G1_6, t, 6), coeff(G1_6, t, 7), coeff(G1_6, t, 8), coeff(G1_6, t, 9),
coeff(G1_6, t, 10), coeff(G1_6, t, 11), coeff(G1_6, t, 12), coeff(G1_6, t, 13), coeff(G1_6, t, 14), coeff(G1_6, t, 15), coeff(G1_6, t, 16)];
> k1r := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16];
> C1 := array(1..7);
> for j to 7 do C1[j]:=0: for i to 16 do C1[j]:=C1[j]+a1r[i]/(k1r[i]^j) od: C1[j]:=C1[j]*GAMMA(j): j:=j+1: od:
> print(C1);
```

Рис. 2 – Числова реалізація обчислення функції  $G(\eta)$  для потенціалів конкретної структури

3. Вводимо нові змінні:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta = -\frac{8\varepsilon E}{\kappa\theta_2 IR} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\mu_k N_k}{\varepsilon R}.$$

та виражаємо через них невідомі коефіцієнти, що залежать від вигляду пружного потенціалу [2, 6 - 8].

4. Обчислюємо у вигляді процедур усі необхідні для подальшого чисельного розв'язку параметри:

$$b_1^{(k)} = J_0(\mu_k) \gamma_k t_{00} \left\{ t_{14} sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{11} \left[ (1 + m_1) sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ t_{12} sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{13} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + t_{11} \left[ (1 + m_1) sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ t_{12} sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{13} \right] + ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ c_0 sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + c_1 (1 - ch(\alpha_k H v_1^{-1})) \right] + c_1 (1 + m_2) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) (1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - ch(\alpha_k H v_1^{-1})) \right] \right] \right\} / \left\{ (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) \left[ t_{11} t_{21} t_{00} sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{22} \left[ c_1 t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) (1 + ch(\alpha_k H v_1^{-1})) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (1 + m_1) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) (t_{12} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + c_1 s_0 + t_{23} sh(\alpha_k H v_1^{-1})) \right] - c_1 (1 - ch(\alpha_k H v_1^{-1})) \left[ t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (1 + m_2) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) \right] + sh(\alpha_k H v_1^{-1}) (c_0 t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) - t_{24} sh(\alpha_k H v_1^{-1})) \right] \right\},$$

$$r_1(\mu_k) = \mu_k^{-1} \sin \mu_k, \quad r_2(\mu_k) = 3\mu_k \cos \mu_k + (2\mu_k^2 - 3) \sin \mu_k,$$

$$r_3(\mu_k) = 0.4\mu_k^4 \sin \mu_k + \mu_k^3 \cos \mu_k - r_2(\mu_k),$$

$$r_4(\mu_k) = 2/3\mu_k^5 (0.4\mu_k \sin \mu_k + \cos \mu_k) - 5\mu_k (\mu_k^2 - 3) \cos \mu_k - (2\mu_k^4 - 10\mu_k^2 + 15) \sin \mu_k,$$

$$r_5(\mu_k) = (2 - \mu_k^2) \sin \mu_k - 2\mu_k \cos \mu_k, \quad r_6(\mu_k) = (\mu_k^4 - 12\mu_k^2 + 1) \sin \mu_k + \mu_k (4\mu_k^2 - 1) \cos \mu_k,$$

$$r_7(\mu_k) = (\mu_k^6 - 30\mu_k^4 + 360\mu_k^2 - 720) \sin \mu_k + 6\mu_k (\mu_k^4 - 20\mu_k^2 + 120) \cos \mu_k,$$

$$r_8^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{m r_5(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_k^3} + \frac{r_5(\mu_n) r_1(\mu_k)}{\mu_n^3},$$

$$r_9^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{r_1(\mu_k) r_6(\mu_n)}{\mu_n^5} + \frac{6 r_5(\mu_n) r_5(\mu_k)}{\mu_k^3 \mu_n^3} + \frac{m r_6(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_n^3},$$

$$r_{10}^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{r_1(\mu_k) r_7(\mu_n)}{\mu_n^7} - \frac{15 r_6(\mu_n) r_5(\mu_k)}{\mu_k^3 \mu_n^5} - \frac{15 r_5(\mu_n) r_6(\mu_k)}{\mu_k^5 \mu_n^3} + \frac{r_7(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_n^7},$$

$$r_{11}(\mu_k) = 4\mu_k \cos \mu_k + (3\mu_k^2 - 4) \sin \mu_k,$$

$$r_{12}(\mu_k) = 6\mu_k (5\mu_k^2 - 12) \cos \mu_k + (13\mu_k^4 - 54\mu_k^2 + 72) \sin \mu_k,$$

$$r_{13}(\mu_k) = (55\mu_k^6 - 520\mu_k^4 + 2160\mu_k^2 - 2880) \sin \mu_k + \mu_k (184\mu_k^4 - 1200\mu_k^2 + 2880) \cos \mu_k,$$

$$t_{00} = \mu_k^2 (\mu_k^2 + R^2 \nu_1^2 \gamma_k^2), t_{01} = (1 + m_2) t_{23} + t_{10} \tilde{c}_1 s_0, t_{02} = 2(H \tilde{c}_1 \alpha_k - \tilde{c}_0 s_0), t_{03} = 2(m_2 - 1)(1 + m_1)$$

$$t_{04} = 0,5 t_{03} \gamma_k R^2 \nu_1^3 (2 \nu_1 \gamma_k J_0(\nu_1 \gamma_k R) - 1) - \mu_k^2 R I_1(\nu_1 \gamma_k R), t_{05} = t_{12} sh(\alpha_k H \nu_1^{-1}) - H \tilde{c}_1 \alpha_k (1 - ch(\alpha_k H \nu_1^{-1}))$$

$$t_{10} = \alpha_k H (1 + m_1), t_{11} = (1 + m_2) \nu_1 + m_1 s_0, t_{12} = \alpha_k H \tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 s_0, t_{13} = \nu_1 (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) + H \tilde{c}_1 \alpha_k - \tilde{c}_0 s_0,$$

$$t_{14} = \alpha_k H \tilde{c}_1 (\nu_1 (1 + m_1) (1 - m_2) + m_1 (1 + m_2)), t_{15} = \nu_1 (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) t_{10} - \tilde{c}_1 s_0 (1 + m_2),$$

$$t_{16} = \mu_k^2 (t_{21} H s_0 m_1 (1 + m_2) - t_{21} \nu_1 (m_2^2 - 1)) + 2 \nu_1^2 (t_{23} (m_2^2 - 1) - \tilde{c}_1 s_0 \alpha_k (1 + m_1) (1 - m_2)),$$

$$t_{17} = 2 \nu_1^2 t_{10} (1 - m_2), t_{18} = 2 \nu_1^2 (m_2 - 1) (1 + m_1), t_{19} = t_{21} \gamma_k^2 R^2 - 2(\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0),$$

$$t_{20} = s_0 m_1 R^2 H^2 \gamma_k^2 (2 \tilde{c}_2 + 3 - 4 \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) + H (2 \tilde{c}_1 \alpha_k (m_2 - 1) + m_1 s_0 R^2 \gamma_k^2 (1 - 2 \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0)) + 2 \tilde{c}_0 s_0 (1 - m_2),$$

$$t_{21} = H (H (3 + 2 \tilde{c}_2 - 4 \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) + 1 + 2 \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0), t_{22} = 2 \nu_1^4 R^2 \gamma_k^2 (m_2 - 1), t_{23} = \nu_1 (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) - \tilde{c}_0 s_0,$$

$$t_{24} = \nu_1 (1 + m_1) (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0) + \tilde{c}_0 (1 + m_2), t_{25} = \mu_k^2 t_{11} t_{21} + 2 t_{23} \nu_1^2 (m_2 - 1), t_{26} = t_{21} \gamma_k^2 R^2 m_1 - 2 \tilde{c}_0 (m_2 - 1),$$

$$t_{27} = t_{26} (m_2 + 1), \Psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt, N_n^m(\rho, z) = \int_0^\infty \eta^n \Psi_1(\eta, 0) e^{-\eta z} J_m(\eta \rho) d\eta,$$

$$M_n^m(\rho, z) = \int_0^\infty \eta^{n-2} e^{-\eta z} J_m(\eta \rho) d\eta, S_n^m(\rho, z) = \int_0^\infty \eta^{n-2} \sin \eta e^{-\eta z} J_m(\eta \rho) d\eta,$$

$$K_n^m(\rho, \mu_k, z) = \int_0^\infty \eta^n \Psi_0(\eta, \mu_k) e^{-\eta z} J_m(\eta \rho) d\eta.$$

Наприклад, на рис. 3 представимо деякі з них.

```

> psi:=proc(a,b)
> local p1;
> p1:=(a*sin(a)*cos(b)-b*sin(b)*cos(a))/(a^2-b^2);
> end;
> psil:=proc(a,b)
> local p1;
> p1:=- (a^2+b^2)/((a+b)^2*(a-b)^2+cos(a-b)/(2*(a-b)^2)+cos(a+b)/(2*(a+b)^2)+sin(a-b)/(2*(a-b))+sin(a+b)/(2*(a+b)));
> end;
> for i to 32 do gamm[i]:=2*i*pi/Hod;
> r1:=proc(a)
> local p1;
> p1:=sin(a)/a;
> end;
> r2:=proc(a)
> local p1;
> p1:=3*a*cos(a)+(2*a^2-3)*sin(a);
> end;
> r3:=proc(a)
> local p1;
> p1:=2/5*a^4*sin(a)+a^3*cos(a)-3*a*cos(a)-(2*a^2-3)*sin(a);
> end;

```

Рис. 3 – Приклад процедур, що використовуються при обчисленні

5. З умов неперервності напружень та переміщень в зоні контакту та поза нею [6], виписуємо парні інтегральні рівняння:

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1); \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1), \quad (3)$$

де

$$f(\rho) = \varepsilon \theta_3^{-1} (1 - \chi_0 - 2(m_2 - 1) R^2 \theta_2^{-1} \chi_0 \rho + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \frac{1}{2} (m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k J_0(\gamma_k \nu_1 R \rho)) +$$

$$+ \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho) d\eta, \quad \theta_2 = E(8m_1(1 + H)n_1^{-1} - 4H\nu_1^{-1} - (m_2 - 1)R^2 H^{-1}),$$

$$\theta_4 = n_1^{-1} (\nu_1 (m_2 - 1) - m_1 s_0).$$

6. Використовуючи формулу зворотності [2], матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду відносно функції  $F(\eta)$ , які представлені співвідношенням:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2}{\pi\theta_3} p(\eta) + \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty u^{-1} F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du. \quad (4)$$

де

$$p(\eta) = \varepsilon((1 - \chi_0)\psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1)R^2\theta_2^{-1}\chi_0\psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{1}{2}(m_2 - 1)R^2 \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k \times \\ \times \psi_0(\eta, i\gamma_k \nu_1 R)).$$

Розв'язок (4) будемо шукати методом послідовних наближень [2], взявши за нульові та наступні наближення функції представлені формулами:

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = -\frac{2}{\pi\theta_3} p(\eta), \quad \frac{F^{(k)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty u^{-1} F^{(k-1)}(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du.$$

Та (4) запишемо у вигляді:

$$F(\eta) = \sum_{k=1}^\infty F^{(k)}(\eta). \quad (5)$$

Відмітимо, що процес послідовних наближень (5) збіжний при  $h > 1$  та  $\lambda_1 > \lambda_{kp}$ , враховуючи дослідження проведені [1, 2].

При обчисленні функції (5) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функцій (2). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди за степенями  $h^{-1}$ , що дозволить обчислити (5) наближено:

$$F(\eta)\eta^{-1} = F^{(0)}(\eta)\eta^{-1} + 2\pi^{-1}\psi_0(\eta, 0)F^*(\eta), \quad (6)$$

де

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} ((\chi_0 - 1)\psi_0(\eta, 0) + 2(m_2 - 1)R^2\theta_2^{-1}\chi_0\psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \times \\ \times \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k \nu_1 R)), \\ F^*(\eta) = \frac{2\theta_4}{\pi} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(\mu_k) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1^2(\mu_k) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\mu_k) + \frac{D_2}{2} \frac{r_8^{(1)}(\mu_k, \eta)}{r_1(\mu_k)} \right) + \frac{2D_0 D_2}{\pi h^4} r_8^{(2)}(\mu_k, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h^5} \left( \frac{D_4}{24} \frac{r_9^{(1)}(\mu_k, \eta)}{r_1(\mu_k)} + \frac{2D_0^2 D_2}{\pi^2} r_1(\mu_k) r_8^{(3)}(\mu_k, \eta) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6\pi h^6} \left( D_0 D_4 r_9^{(2)}(\mu_k, \eta) + \frac{6D_2^2}{\mu_k^3 r_1(\mu_k)} r_5(\mu_k) r_8^{(1)}(\mu_k, \eta) \right) \right\} + \\ + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \left\{ \frac{D_0}{h} r_1(i\gamma_k \nu_1 R) + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1(i\gamma_k \nu_1 R) r_1(\eta) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1(i\gamma_k \nu_1 R) r_1(\eta) + \frac{D_2}{2} \frac{r_8^{(1)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta)}{r_1(\eta)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2D_0 D_2}{\pi h^4} r_8^{(2)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta) + \frac{1}{h^5} \left( \frac{D_4}{24} \frac{r_9^{(1)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta)}{r_1(\mu_k)} + \frac{2D_0^2 D_2}{\pi^2} r_1(\eta) r_8^{(3)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6\pi h^6} \left( D_0 D_4 r_9^{(2)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta) + \frac{6D_2^2 r_5(\mu_k)}{\mu_k^3 r_1(\mu_k)} r_8^{(1)}(i\gamma_k \nu_1 R, \eta) \right) \right\} + \frac{2}{\pi} (\chi_0 - 1) \left\{ \frac{D_0}{h} + \frac{4D_0^2}{\pi h^2} r_1(\eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\eta) - \frac{D_2}{3\eta^3} \frac{r_2(\eta)}{r_1(\eta)} \right) + \frac{2D_0 D_2}{3\eta^3 \pi h^4} (r_5(\eta) - 2r_2(\eta)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3\eta^3 h^5} \left( \frac{D_4 r_3(\eta)}{\eta^2 r_1(\eta)} + \frac{2D_0^2 D_2}{\pi^2} r_1(\eta)(3r_5(\eta) - r_2(\eta)) \right) + \frac{2}{3\pi\eta^5 h^6} \left( \frac{D_0 D_4}{8} (16r_3(\eta) + 3r_6(\eta)) - \frac{D_2^2 r_2(\mu_k)}{\eta r_1(\mu_k)} r_5(\eta) \right) \Bigg\} + \\
& + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2 \pi} \left\{ \frac{D_0}{h} + \frac{2D_0^2}{\pi h^2} r_1(\eta) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{4D_0^3}{\pi^2} r_1^2(\eta) - \frac{D_2}{4\eta^3} \frac{r_{11}(\eta)}{r_1(\eta)} \right) + \frac{D_0 D_2}{2\eta^3 \pi h^4} (2r_5(\eta) - r_{11}(\eta)) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\eta^5 h^5} \left( \frac{D_4 r_{12}(\eta)}{72\eta^2 r_1(\eta)} + \frac{\eta^2 D_0^2 D_2}{\pi^2} r_1(\eta)(4r_5(\eta) - r_{11}(\eta)) \right) + \frac{2}{36\pi\eta^6 h^6} \left( \eta D_0 D_4 (r_{12}(\eta) + 3r_6(\eta)) - \frac{9D_2^2 r_{11}(\mu_k)}{r_1(\mu_k)} r_5(\eta) \right) \right\}, \\
& \text{де } D_n = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(k_i)^{n+1}} \Gamma(n+1), \quad k_i, a_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

7. Використовуючи граничні умови на торці пружного штапу та ортогональності бesselевих функцій отримаємо умови для рівних коренів, з яких отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$v_k \chi_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_{kn} \chi_n = \bar{\omega}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

де  $\chi_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – шукані сталі через які виражаються компоненти напружень і переміщень пружних тіл з початковими напруженнями.

При визначенні коефіцієнтів (7) більшість інтегралів також не обчислюються, враховуючи складність функцій (2). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції аналогічно до (6) розкладаються у ряди за степенями  $h^{-1}$ , що дозволить обчислити коефіцієнти (7) наближено [6].

У розробленій програмі, система (6) обчислюється за допомогою матричного числення (рис. 4).

```

> XXI := linsolve(AA, BB);
> for i to 32 do XXI[i] := Re(XXI[i]) od;
> print(XXI);

```

Рис. 4 – Обчислення методом редукції системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

*AA* – матриця системи;  
*BB* – стовпчик вільних членів;  
*XXI* – матриця невідомих сталих  $\chi_i$

У табл. 1 представлено перші 8 значень невідомих, знайдених із системи (6) для випадку потенціала Бартенєва - Хазановича.

Таблиця 1

Значення сталих  $\chi_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) при  $h = 1,6$

№	Потенціал Бартенєва - Хазановича							
	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	0,7
0	0,0047081	0,005782	0,0047352	0,00397845	0,002365	0,00314	0,00273	0,0047081
1	-0,002516	$8,47 \cdot 10^{-8}$	$7,614 \cdot 10^{-8}$	$-6,252 \cdot 10^{-8}$	$7,73 \cdot 10^{-15}$	$6,91 \cdot 10^{-12}$	-0,000043	-0,002516
2	-0,001668	$3,53 \cdot 10^{-8}$	$1,389 \cdot 10^{-8}$	$-1,123 \cdot 10^{-8}$	$1,62 \cdot 10^{-15}$	$4,7 \cdot 10^{-12}$	-0,000023	-0,001668
3	$2,224 \cdot 10^{-10}$	$4,99 \cdot 10^{-15}$	$4,97 \cdot 10^{-17}$	$-3,982 \cdot 10^{-17}$	$-1,43 \cdot 10^{-18}$	$9,67 \cdot 10^{-17}$	$-2,08 \cdot 10^{-18}$	$2,224 \cdot 10^{-10}$
4	$9,881 \cdot 10^{-11}$	$-5,54 \cdot 10^{-17}$	$-2 \cdot 10^{-18}$	$6,213 \cdot 10^{-22}$	$1,04 \cdot 10^{-28}$	$1,19 \cdot 10^{-32}$	$-7,18 \cdot 10^{-26}$	$9,881 \cdot 10^{-11}$
5	$8,282 \cdot 10^{-15}$	$-2,94 \cdot 10^{-17}$	$-1,2 \cdot 10^{-19}$	$4,034 \cdot 10^{-22}$	$-5,85 \cdot 10^{-30}$	$8,51 \cdot 10^{-33}$	$-5,31 \cdot 10^{-26}$	$8,282 \cdot 10^{-15}$
6	$-8,096 \cdot 10^{-18}$	$-8,2 \cdot 10^{-26}$	$-1,28 \cdot 10^{-30}$	$9,927 \cdot 10^{-36}$	$5,76 \cdot 10^{-47}$	$-4,95 \cdot 10^{-48}$	$-3,5 \cdot 10^{-45}$	$-8,096 \cdot 10^{-18}$
7	$-3,38 \cdot 10^{-18}$	$-4,4 \cdot 10^{-26}$	$-6,62 \cdot 10^{-31}$	$-6,322 \cdot 10^{-36}$	$3,94 \cdot 10^{-47}$	$-4,56 \cdot 10^{-48}$	$3 \cdot 10^{-45}$	$-3,38 \cdot 10^{-18}$

8. Обчислюємо вирази для визначення напружено - деформованого стану в попередньо напруженому шарі, штампі та основі з початковими напруженнями [6 - 8] (рис. 5) та будуємо графіки у безрозмірних координатах для потенціалів конкретної структури, таких як: гармонічний потенціал (рис. 6, 7) та потенціал Бартенєва - Хазановича (рис. 8).

```

Циліндр
> for j to 31 do Xk[j]:=Xk_07[j+1]: od:
> rho:=0.1: z1:=0:
> Q33:=C[44]*epsilon*(-8*B*v1*X0/H/theta2*((1+m1)*11*(1/v1+z1)+(1+m2)*12*z1));
> for i to 31 do Q33:=Q33+Xk[i]*(R^2/2*b1(i)*gamma[i]*n1*Besseli(0,gamma[i]*v1*R*rho)*((1+m1)*11*gamma[i]*cos(gamma[i]*v1*z1)*
(v1*z1+H*(1+s0*(1-Besseli(0,v1*gamma[i]*R))/v1/gamma[i]/R/Besseli(1,v1*gamma[i]*R)))+(1+m2)*12*sin(v1*z1*gamma[i]))-mul[i]
/R*BesselJ(0,mul[i]*rho)*((1+m1)/v1*11*mul[i]/R*(Ek(i)*cosh(mul[i]/R*z1)+R*s0/mul[i]*sinh(mul[i]/R*z1))-v1*z1*(Mk(i)*sinh
(mul[i]/R*z1)+cosh(mul[i]/R*z1)))-(1+m2)*12*(Mk(i)*cosh(mul[i]/R*z1)+sinh(mul[i]/R*z1))) od:
> Q33_0_07:=Q33;
rho=0.1:{rho=0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1}
> U3:=epsilon*(m2-1)/v1+X0*(1+2*B/H/theta2*(R^2*rho^2-2*z1^2+4*m1*z1*(1/v1+z1)));
> for i to 31 do U3:=U3+epsilon*(Xk[i]*(R^2/2*b1(i)*gamma[i]*Besseli(0,gamma[i]*v1*R*rho)*((1-m2)*cos(gamma[i]*v1*z1)/gamma[i]
+m1*sin(gamma[i]*v1*z1)*(H*(1+s0*(1-Besseli(0,v1*gamma[i]*R))/v1*gamma[i]*R*Besseli(1,v1*gamma[i]*R))+v1*z1))-BesselJ(0,mul
[i]*rho)*(m1*mul[i]/R*(Ek(i)*sinh(mul[i]*z1/R)+R/mul[i]*s0*cosh(mul[i]*z1/R)-z1*v1*(sinh(mul[i]*z1/R)+Mk(i)*cosh(mul[i]*
z1/R)))-v1*(m2-1)*(cosh(mul[i]*z1/R)+Mk(i)*sinh(mul[i]*z1/R)))) od:
> U30_07:=U3;
> plot3d(Q33_0_07,zl=0..1,rho=0..1,color=grey,axes=BOXED);
> plot(-Q33_0_07_1,rho=0..1,color=black,thickness=3);
    
```

Рис. 5 – Обчислення характеристик напружено - деформованого стану в поперечно напруженому штампі

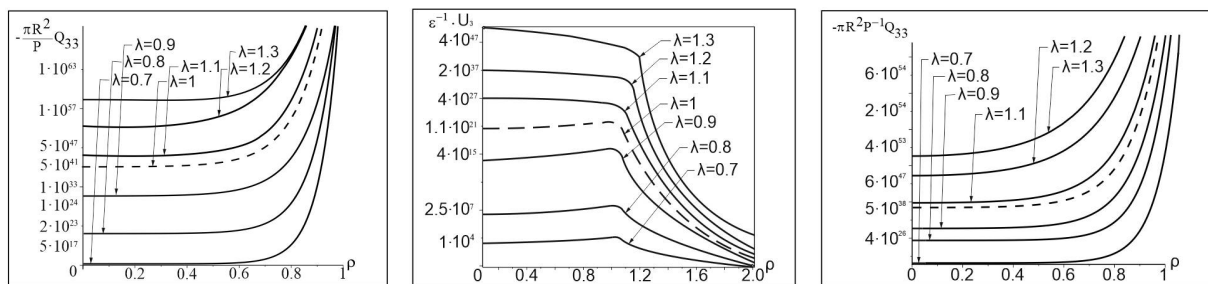


Рис. 6 – Контактне напруження,  $h = 1,6$     Рис. 7 – Контактне переміщення,  $h = 1,6$     Рис. 8 – Контактне напруження,  $h = 1,6$

На рис. 6 - 8 зображено криві, які відповідають значенням  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,3$ , де  $\lambda_1$  – визначає початковий стан шару і циліндра. На усіх рисунках штрих - пунктирна лінія відповідає стану без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ).

9. Аналізуємо отримані результати. Достовірність одержаних результатів підтверджується тим, що:

- 1) всі висновки досліджень отримані в результаті коректно поставленої задачі у рамках лінеаризованої теорії пружності;
- 2) залученням строгого математичного апарату;
- 3) використанням надійних чисельних методів та програмного забезпечення;
- 4) одержані результати у спрощених випадках співпадають з відомими розв'язками у літературі.

Перевірка одержаних результатів на еталонних задачах представлена в табл. 2, порівнянням числових значень сили, що діє на верхній торець штампця, при різних величинах початкових напружень із випадком без початкових напружень, що виділений у таблиці жирним шрифтом.

Таблиця 2

Числові значення сили  $P/\epsilon R$

Потенціал	$\lambda$						
	$h$	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
Гармонічний	1,6	0,5455	0,6177	0,6401	0,6478	0,6473	0,6372
	4	0,4878	0,5577	0,5843	0,5957	0,6003	0,6015
Бартенева-Хазановича	1,6	0,9864	0,6214	0,6710	0,6721	0,6803	0,6552
	4	0,9422	0,5179	0,6046	0,6298	0,6534	0,6619
Трелоара	1,6	1,4082	1,2487	1,2974	1,2315	1,2978	1,2043
	4	1,4025	1,2456	1,2945	1,2296	1,2653	1,2022

При розв'язанні рівнянь (4) в роботі був використаний метод послідовних наближень, що є збіжним (за принципом стиснутих відображень [2]) при виконанні умови  $h > \nu_1 \sqrt{D_1(2\pi)^{-1}}$ .

Гармонічний потенціал

$\lambda$	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$h$	1,54	1,25	1,02	0,83	0,67	0,54	0,42
$t$	1,49	1,27	1,08	0,83	0,65	0,51	0,41

Мінімальні значення товщини шару при використанні даного методу – представлені в таблиці 3, у випадку гармонічного потенціалу. Для порівняння, в табл. 3 приведені значення еталонної задачі у випадку, коли у циліндрі відсутні початкові напруження. Також з табл. 3 видно, що початкові напруження впливають на метод послідовних наближень, таким чином, що при розтягу його можна застосовувати для більш тонкої товщини шару, ніж при стиску.

### Висновки

Отже, з отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

1. У статті представлені результати дослідження впливу початкових напружень на тиск пружного циліндричного штампа та шару, а також пружного шару і співвісних циліндрів стосовно конкретних потенціалів (потенціал Бартенева - Хазановича, гармонічний потенціал) за допомогою ІТ технологій.

2. Розроблено алгоритм числового обчислення компонентів напружено - деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу. Це дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках та полегшує складність проведених досліджень. Запропонований алгоритм може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при проектуванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого.

3. Розроблена комп'ютерна програма «Розрахунок компонентів напружено-деформівного стану для осесиметричної статичної задачі про тиск пружного циліндричного штампа на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями» («KNDS\_CS\_PZN»), що спрощує процес отримання числових і графічних результатів досліджень (№ заявки на реєстрацію авторського права 55015 від 18.02.2014 та свідоцтво про реєстрацію авторського права № 54576 від 05.05.2014).

4. Числова реалізація дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик попередньо напружених тіл для потенціалів найпростішої структури.

Виявлено, що початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампі та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, а для переміщень все відбувається навпаки. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високо еластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається.

Виявлений при дослідженні вплив початкових напружень є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій.

### Література

1. Гузь А.Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Развитие идей Л.А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.

2. Гузь А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, вид. ПП Мельник.–2006.–710 с.

3. Максимчук Д.М. Розв'язання контактної задачі для попередньо напруженого шару та двох співвісних пружних штампів з початковими (залишковими) напруженнями. / Д.М. Максимчук // Доповіді Національної Академії наук України: Науково-теоретичний журнал. – 2015. – № 4. – с. 49–55.

4. Vasilikis D. Discussion: Mechanics of Confined Thin-Walled Cylinders Subjected to External Pressure / D. Vasilikis, S. Karamanos // Appl. Mech. Reviews. – 2014. – 66(1). – p. 312–321.

5. Gao X.-L., Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space. / X.-L. Gao, C. L. Mao J. // Appl. Mech. – 2014. – 81(4). – p. 107–119.

6. Ярецька Н.О. Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампа та пружного шару / Н.О. Ярецька // Доповіді НАН України.–2014.–№1.–с.57–62.

7. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses / N. A. Yaretskaya // International Applied Mechanics. – July 2014. – Vol. 50, Issue 4. – Pp. 378–388.

8. Iaretska N., Rudnitsky V. Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction. / Вісник Тернопільського національного технічного університету. Науковий журнал. – Тернопіль. – 2016 р. – №3 (83). – С. 28 – 37.

Поступила в редакцію 31.03.2017



Rudnickij V.B., Yarets'ka N.O., Venger V.O. **The use of IT technologies in the mechanics of deformable bodies.**

The article is devoted to the research of two problems of contact interaction of prestressed bodies, namely: 1) the pressure of an elastic cylinder die upon an elastic layer and foundation with initial (residual) stresses; 2) contact interaction of elastic layer with initial stresses and prestressed coaxial cylinders with using the IT technologies. The authors developed a computer program and algorithm of numerical calculation components deflected mode of contacting bodies with initial stresses.

In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation (the initial states of the layer, of the cylindrical punch and of the foundation remains uniform and equal).

Was used method of solving the dual integral equations. These equations are reduced to Fredholm integral equation of the second kind. Solution of integral equations was found by a method of successive approximations. The problem was reduced to solving an infinite system of algebraic equations. The system was solved by numerical methods (by reduction) and software tools.

**Key words:** IT technologies, linearized theory of elasticity, initial (residual) stress, Fredholm integral equations, the method of consecutive approximations.

### References

1. Guz' A.N., Babich S.Ju., Rudnickij V.B. Kontaktnoe vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami, Razvitie idej L.A. Galina v mehanike, M., Izhevsk, Institut komp'juternyh issledovanij, 2013, 480 p.
2. Guz' A.N., Rudnickij V.B. Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami, Hmel'nic'kij, vyd. PP Mel'nik, 2006, 710 p.
3. Maksymchuk D.M. Rozvyazannya kontaktnoyi zadachi dlya poperedn'o napruzhenoho sharu ta dvokh spivvisnykh pruzhnykh shtampiv z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenyamy, Dopovidi Natsional'noyi Akademiyi nauk Ukrayiny: Naukovo-teoretychnyy zhurnal, 2015, Vol. 4, P. 49 – 55.
4. Vasilikis D., Karamanos S. Discussion: Mechanics of Confined Thin-Walled Cylinders Subjected to External Pressure, Appl. Mech. Reviews, Vol. 66, No 1, 2014, P. 312 – 321.
5. Gao X.-L., Mao J.C.L. Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space, Appl. Mech., Vol. 81, No 4, 2014, P. 107 – 119.
6. Yarets'ka N.O., Vplyv pochatkovykh (zalyshkovykh) napruzhen' na kontaktnu vzayemodiyu pruzhnoho tsylindrychnoho shtampu ta pruzhnoho sharu, Dopovidi NAN Ukrayiny, Vol. 1, 2014, P. 57 – 62.
7. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses, International Applied Mechanics, Vol. 50, No 4, July 2014, P. 378 – 388.
8. Iaretska N.A., Rudnitsky V.B. Research of contact interaction of prestressed stamps, layer and foundation without friction, Visnyk Ternopil's'koho nacional'noho texnichnoho universytetu. Naukovyj zhurnal, Vol. 83. No 3, 2016, pp.28–37.