УДК 539.3.01

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНІ З ОТВОРОМ УТВОРЕНИМ ДУГАМИ ДВОХ КІЛ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ЗА ДІЇ ЧИСТОГО ЗСУВУ

О. М. Пономаренко

Львівський національний аграрний університет; 80381, Львівська обл., Жовківський р-н, м. Дубляни, вул. Володимира Великого, 1; тел. +380 (32) 224-23-35; e-mail: e-mail: lnau@mail.lviv.ua

Стаття присвячена дослідженню впливу двох кругових отворів, які частково накладаються, на концентрацію напружень у безмежній пластині за чистого зсуву. Аналіз розвинуто на основі функцій напружень Ері в загальному плоскому напруженому стані з використанням біполярних координат.

Ключові слова: *біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень.*

Постановка проблеми. В аграрному та транспортному машинобудуванні під час проектування машин широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами. У разі завантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування даної конструкції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значну кількість задач по дослідженню концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язано М.І. Мусхелішвілі [1] та його учнями і послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г.М. Савиним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я.С. Уфлянд [3;4]. Надзвичайно практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [5], Р.Р. Мавлютова [6], С.П. Тимошенко і Дж. Гудьєра [7].

Постановка завдання. Метою дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень в ізотропній пластині з отвором, утвореним дугами двох кіл, що перетинаються. Отримано вирази для напружень по контуру отвору і проведено їх аналіз.

Дослідження має прикладне значення при проектуванні деталей у вигляді тонких пластин із вирізами в транспортному та аграрному машинобудуванні.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо питання про концентрацію напружень у пластині, ослабленій отвором, утвореним дугами двох кіл, що перетинаються, за чистого зсуву для різних варіантів розміщення отвору (рис.1).

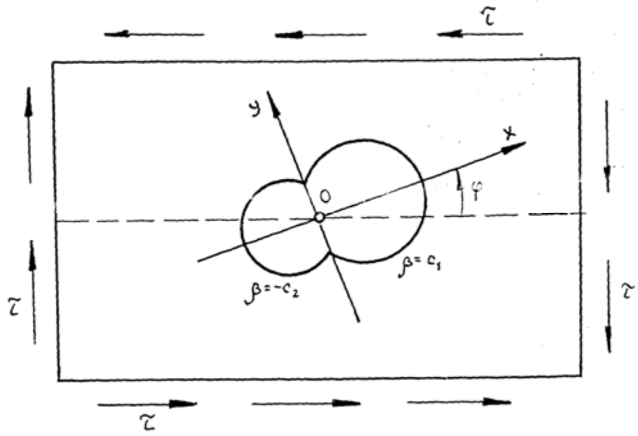

Рис.1. Розміщення отвору в полі зсуву.

При розв'язуванні приймаємо, що контур отвору вільний від зовнішніх навантажень і розмір отвору невеликий порівняно з шириною пластини.

Тоді основна функція напружень у системі координат XOY, що дає картину напруженого стану в пластині без отвору, має вигляд:

$$U_0(x,y) = -\tau[(x^2 - y^2)\frac{\sin 2\varphi}{2} + xy\cos 2\varphi] \tag{1}$$

або

$$U_0(x,y) = \sum_{i=1}^{3} U_{0,i}(x,y), \tag{2}$$

де

$$U_{0,1}(x,y) = \kappa_1 x^2, \qquad \kappa_1 = -\tau\frac{\sin 2\varphi}{2},$$

$$U_{0,2}(x,y) = \kappa_2 y^2, \qquad \kappa_2 = \tau\frac{\sin 2\varphi}{2}, \tag{3}$$

$$U_{0,3}(x,y) = \kappa_3 xy, \qquad \kappa_3 = -\tau\cos 2\varphi.$$

Використаємо біполярну систему координат:

$$x = \frac{a\sin\beta}{ch\alpha - \cos\beta}; \quad y = \frac{ash\alpha}{ch\alpha - \cos\beta}, \tag{4}$$

і функцію напружень подамо у вигляді суми основної функції і додатковової:

$$U(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{3}[U_{0,i}(\alpha,\beta)+\alpha\kappa_i U_{1,i}(\alpha,\beta)],\qquad(5)$$

де $\sum_{i=1}^{3}U_{1,i}(\alpha,\beta)$ – додаткова функція напружень, яку слід підібрати так, щоб напруження, що виникають від неї, знімали на контурі отвору напруження, які виникають від основної функції напружень, оскільки задача розв’язується за умови, що контур отвору вільний від зовнішніх навантажень, причому ця функція повинна зникнути на безмежності, не порушуючи тим самим основний напружений стан.

Задача зводиться до визначення функції $\sum_{i=1}^{3}U_{1,i}(\alpha,\beta)$, що задовольняє бігармонічне рівняння

$$[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1](g\hat{O})=0,\qquad(6)$$

і граничні умови на контурі отвору

$$\sigma_\beta\,|_{\beta=c_1}=\tau_{\alpha\beta}\,|_{\beta=c_1}=0,$$
$$\sigma_\beta\,|_{\beta=-c_2}=\tau_{\alpha\beta}\,|_{\beta=-c_2}=0,\qquad(7)$$

а також забезпечує вказану систему напружень на безмежності.

З урахуванням основного напруженого стану функції $U_{1,i}(\alpha,\beta)$ шукаємо у вигляді:

$$gU_{1,i}(\alpha,\beta)=2G_i\cos\beta+G_i(ch\alpha-\cos\beta)\ln\frac{ch\alpha-\cos\beta}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta}+\int_0^\infty f_i(\beta,m)\cos m\alpha dm,$$

(i=1,2) (8)

$$gU_{1,3}(\alpha,\beta)=\int_0^\infty f_3(m,\beta)\sin m\alpha dm,\qquad(9)$$

Причому $f_k(m,\beta)=A_k(m)chm\beta\cos\beta+B_k(m)chm\beta\sin\beta+$
$+C_k(m)shm\beta\cos\beta+D_k(m)shm\beta\sin\beta$, k=1,2,3. (10)

Далі з граничних умов (7) після перетворень і порівняння коефіцієнтів при відповідних значеннях синусів і косинусів отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих функцій $A_i(m)$, $B_i(m)$, $C_i(m)$, $D_i(m)$.

Умова на безмежності дозволяє знайти невідомі G_i:

$$\int_0^\infty A_i(m)dm=B_i-2\mathrm{G_i},\quad \text{(i=1,2)}\qquad(11)$$

$$b_1 = 0, \quad d_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = 1, \quad d_2 = -\frac{1}{2}.$$

Розглянемо більш детально випадок чистого зсуву пластини з отвором, контур якого обмежений дугами двох кіл однакового радіусу: $\beta = c$, $\beta = -c$, причому $C < \pi/2$ (рис.2).

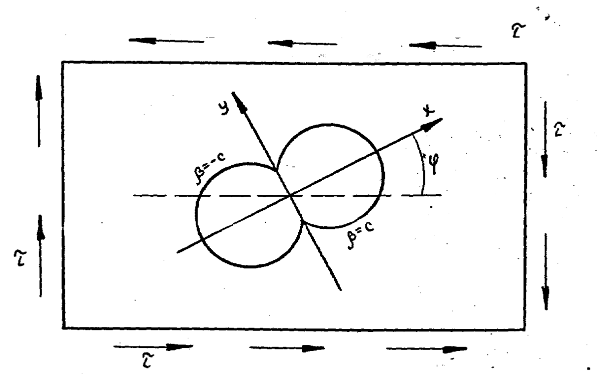

Рис.2. Випадок симетричного отвору.

В цьому випадку для значень i =1,2 отримаємо:

$$A_i(m) chmc \cos c + D_i(m) shmc \sin c =$$
$$= \frac{1}{(m^2+1) shm\pi}[2d_i(m^2+1)\sin c shm(\pi - c) + 4G_i mchmc \cos c -$$
$$-4G_i shm(\frac{\pi}{2} - c)(ch\frac{m\pi}{2}\sin c + \frac{1}{m} sh\frac{m\pi}{2}\cos c)], \tag{12}$$

$$A_i(m)[mshmc \cos c - chmc \sin c] + D_i(m)[mchmc \sin c + shmc \cos c] =$$
$$= \frac{1}{mshm\pi}\{2d_i m[\cos c shm(\pi - c) - m \sin c chm(\pi - c)] - \tag{13}$$
$$-4G_i[\sin c shm(\frac{\pi}{2} - c) + m \cos c shmc]\},$$

а для i=3 маємо:

$$B_3(m)[m \sin 2c - sh2mc] = \frac{2}{shm\pi}[m \sin c \cos c chm\pi - chm(\pi - c) shmc], \tag{14}$$

$$C_3(m)[m \sin 2c - sh2mc] = 2m \sin^2 c, \tag{15}$$

$$A_3(m) = D_3(m) = 0. \tag{16}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (12-16), отримуємо після перетворень значення функцій $A_1(m)$, $D_1(m)$, $A_2(m)$, $D_2(m)$, $B_3(m)$, $C_3(m)$:

$$A_1(m) = -2\frac{m \sin^2 c}{\Delta} - 4G_1 \frac{1}{m(m^2+1)}(\frac{1}{2} cth\frac{m\pi}{2} - \frac{m^2+1}{shm\pi} -$$
$$-\frac{sh^2 mc - m^2 \sin^2 c}{\Delta}), \tag{17}$$

$$D_i(m) = cthmc - 2\frac{ch^2 mc}{\Delta} + 4G_1 \frac{1}{m^2+1}\left(\frac{1}{2}cth\frac{m\pi}{2} - \frac{sh^2 mc + m^2\sin^2 c}{\Delta}\right), \quad (18)$$

$$A_2(m) = 2\frac{m\sin^2 c}{\Delta} - 4G_2 \frac{1}{m(m^2+1)}\left(\frac{1}{2}cth\frac{m\pi}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{m^2+1}{shm\pi} - \frac{sh^2 mc - m^2\sin^2 c}{\Delta}\right), \quad (19)$$

$$D_2(m) = -cthm\pi + \frac{2}{\Delta}ch^2 mc + \frac{4G_2}{m^2+1}\left(\frac{1}{2}cth\frac{m\pi}{2} - \frac{sh^2 mc + m^2\sin^2 c}{\Delta}\right), \quad (20)$$

$\Delta = sh2mc + m\sin 2c,$

$$B_3(m) = \frac{2}{shm\pi(m\sin 2c - shmc)}[m\sin c\cos c chm\pi - chm(\pi - c)shmc], \quad (21)$$

$$C_3(m) = \frac{2m\sin^2 c}{m\sin 2c - sh2mc}. \quad (22)$$

З умови на безмежності (11) визначаємо сталі G_1, G_2, які після перетворень мають вигляд:

$$G_1 = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 c\int_0^\infty \frac{mdm}{sh2mc + m\sin 2c}}{\int_0^\infty \frac{sh^2 mc - m^2\sin^2 c}{m(m^2+1)(sh2mc + m\sin 2c)}dm}, \quad (23)$$

$$G_2 = \frac{1}{4}\frac{1 - \sin^2 c\int_0^\infty \frac{mdm}{sh2mc + m\sin 2c}}{\int_0^\infty \frac{sh^2 mc - m^2\sin^2 c}{m(m^2+1)(sh2mc + m\sin 2c)}dm}. \quad (24)$$

Для напружень на контурі отвору отримуємо такі значення:

$$\sigma_\alpha |_{\beta=c} = \sigma_{\alpha,1} + \sigma_{\alpha,2} + \sigma_{\alpha,3}, \quad (25)$$

де

$$\sigma_{\alpha,1} = 8k_1(ch\alpha - \cos c)\sin c\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}[G_1 + \frac{1}{2}shmc(m^2 - - mctgccthmc)\cos m\alpha dm, \quad (26)$$

$$\sigma_{\alpha,2} = 8k_2(ch\alpha - \cos c)\sin c\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}[G_2 - \frac{1}{2}shmc(m^2 - - mctgccthmc)\cos m\alpha dm, \quad (27)$$

$$\sigma_{\alpha,3} = 8k_3(ch\alpha - \cos c)\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}(mshmc\cos c - m^2 chmc\sin c)\sin m\alpha dm. \quad (28)$$

У випадку $\varphi = 0$ для напружень на контурі отвору маємо:

$$\sigma_\alpha\,|_{\beta=c} = 8\tau(chc - \cos c)\int_0^\infty m\frac{\cos cshmc - m\sin cchmc}{sh2mc - m\sin 2c}\sin m\alpha dm. \qquad (29)$$

При $c = \pi/2$ маємо круговий отвір. Виразимо α через полярний кут θ. Використовуючи співвідношення (4) між біполярними α, β і прямокутними x,y координатами у разі $\beta = c = \pi/2$, R = a, маємо (рис.3):

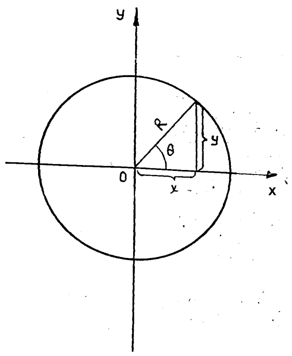

Рис. 3. Перехід до полярних координат

$$\cos\theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{ch\alpha}; \qquad (30)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{R} = \frac{sh\alpha}{ch\alpha} = th\alpha. \qquad (31)$$

Тоді після інтегрування формули (29) отримаємо відомий результат у полярних координатах [2]:

$$\sigma_\theta = -4\tau\sin 2\theta. \qquad (32)$$

У таблиці подано значення напружень σ_α у верхній частині отвору $\beta = \pi/3$ при $\varphi = 0^0$

Таблиця. Значення напружень σ_α у верхній частині отвору $\beta = \pi/3$ при $\varphi = 0^0$

α	*6,36*	*2,38*	*1,57*	*1,05*	*0,66*	*0,34*	*0*
σ_α/τ	*-3,46*	*-2,67*	*-1,01*	*1,43*	*3,66*	*3,83*	*0*

Дані таблиці свідчать про те, що максимальне значення напруження σ_α/τ досягається при $\alpha = 0{,}34$ і рівне 3,83.

Висновки. Отримано розв'язок задачі про концентрацію напружень у пластині з отвором, контур якого утворений дугами двох кіл, що перетинаються, при зсуві. Подано вирази для напружень по контуру отвору і проведено їх аналіз.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1996. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С.Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С.Уфлянд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
5. Петерсон Р. Коеффициенты концентраций напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных елементов на прочность / Р.Петерсон [пер. з англ.]. – М.: Мир, 1977. – 302 с.
6. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в елементах авиационных конструкций / Р.Р.Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 140 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1989. – 560 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.12.2012 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Векериком В.І.****,*
д.ф.-м.н., професором ***Сулимом Г.Т.*** *(м. Львів)*

INFLUENCE TWO CIRCULAR HOLES WICH COVER AGAIN ON CONCENTRATION OF STRESSES IN INFINITE PLATE BY DISPLACEMENT

O. M. Ponomarenko
Lviv national agrarian university; 80381, Lviv region, Zovkva district, t. Dybljany, V. Velykogo str., 1; tel./fax +380 (32) 224-23-35; e-mail: lnau@mail.lviv.ua

The paper is devoted to the investigation influence two circular holes wich cover again on concentration of stresses in infinite plate by displacement. The analysis is developed on the basis of the Airy`s stresses function in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

Key words: *bipolar coordinates, strainestate, concentration of stresses.*