УДК 515.12

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МЕТРИКИ ПРОХОРОВА НА ПРОСТОРІ НОРМОВАНИХ ЄМНОСТЕЙ

І. Д. Глушак

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, Івано-Франківськ, Шевченка 57; e-mail: inna_gl@rambler.ru

Доведено, що метрика Прохорова на просторі нормованих ємностей є частковим випадком ліпшицевої метрики, побудованої за допомогою інтеграла Сугено.

Ключові слова: *метрика Прохорова, інтеграл Сугено.*

Вступ

Ємності (не обов'язково адитивні регулярні міри) набувають щораз більшого значення у сучасній математиці. До їх традиційних застосувань у математичній фізиці, теорії оптимізації тощо останнім часом додалися тісні зв'язки з моделюванням процесів прийняття рішень у економіці. Це спонукає досліджувати не тільки окремі ємності, але й їх сукупності, зокрема, з погляду топології. Наша праця присвячена порівнянню природних способів, у які множина нормованих ємностей на метричному компакті може бути наділена топологією та метрикою.

Термінологія та позначення

Компактом називаємо компактний гаусдорфів топологічний простір. Якщо компактна топологія породжена деякою фіксованою метрикою, то такий компакт називаємо метричним. Вважаємо, що топологія на дійсній прямій R є стандартною, топології на одиничному відрізку $I=[0,1]$ і півпрямій $R_+=[0,+\infty)$ індуковані вкладенням у дійсну пряму з природною топологією. Для топологічного простору X позначаємо $\exp X$ множину всіх непорожніх замкнених множин у X.

Надалі вважаємо, що (X,d) – метричний простір скінченного діаметра. Як звичайно, для $x\in X$ та $A\subset X$ величину $d(x,A)=\inf\{d(x,a)\mid a\in A\}$ називаємо відстанню від точки x до множини A. Множини

$$O_\varepsilon(A)=\{x\in X\mid d(x,A)<\varepsilon\},\ де\ \mathrm{A}\subset \mathrm{X},\ \varepsilon>0$$

та

$$\overline{O}_\varepsilon(A)=\{x\in X\mid d(x,A)\le\varepsilon\},\ де\ \mathrm{A}\subset \mathrm{X},\ \varepsilon\ge 0$$

називаємо відповідно відкритим ε-околом та замкненим ε-околом множини A. Очевидно, що вони дійсно є відповідно відкритою та замкненою множиною, оскільки $d(x,A)$ неперервно залежить від x при фіксованому A.

Притримуючись термінології [2], називаємо *ємністю* на компакті X функцію $c:\exp X \bigcup \{\emptyset\} \to R_+$, якщо виконуються три наступні властивості для всіх замкнених підмножин $F, G \subset X$:

(1) $c(\emptyset)=0$;

(2) якщо $F \subset G$, то $c(F) \le c(G)$ (монотонність);

(3) якщо $c(F) < a$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожного $G \subset U$ виконано $c(G) < a$ (напівнеперервність згори).

Якщо крім того виконано $c(X)=1$ (чи $c(X) \le 1$), то ємність називається *нормованою* (відповідно *субнормованою*). Множину всіх нормованих на X ємностей позначаємо MX.

Доведено [2], що множина MX із визначеною на ній топологією, передбазу якої складають множини вигляду

$$O_-(F,a)=\left\{c\in MX \mid c(F)<a\right\}, \textit{для замкненої множини } F \subset X \textit{ та } a \in I,$$

$$O_+(U,a)=\left\{c\in MX \mid c(U)>a\right\}=\left\{c \in MX \middle| \textit{існує компакт } F \subset U, c(F)>a\right\},$$

$$\textit{для відкритої множини } U \subset X \textit{ та } a \in I,$$

теж є компактом.

Порівняння метрик на просторі нормованих ємностей

Для метричного компакта (X,d) на просторі ємностей MX розглядаємо метрику:

$$\hat{d}(c,c')=\inf\left\{\varepsilon>0 \middle| c\left(\overline{O}_\varepsilon(F)\right)+\varepsilon \ge c'(F),\right.$$
$$\left. c'\left(\overline{O}_\varepsilon(F)\right)+\varepsilon \ge c'(F), \textit{для всіх замкнених } F \subset X \right\}.$$

Це відома метрика Прохорова, традиційно означена на підмножині $PX \subset MX$ ймовірнісних мір, тобто нормованих адитивних ємностей. Згідно однойменної теореми ця метрика сумісна зі стандартною топологією на PX (насправді індукованою з MX). Природно (і доведено в [2]), що метрика $\hat{d}$ на усьому просторі MX сумісна з топологією на ньому.

Інша метрика на PX породжується порівнянням значень інтегралів у сенсі Лебега від ліпшицевих функцій на X (достатньо розглянути тільки невід'ємні функції). Позначимо через $Lip_+(X,d)$ множину усіх нерозтягуючих невід'ємних дійснозначних функцій на метричному компакті (X,d). Кожній функції $f \in Lip_+(X,d)$ та ймовірнісній мірі $m \in PX$ відповідає інтеграл Лебега

$$I_m(f)=\int_X f(x)dm(x)=\int_0^{+\infty} m(f_\alpha)d\alpha,$$

де $f_\alpha=\left\{x\in X \middle| f(x)\ge\alpha\right\}$. Тоді ліпшицева відстань між ймовірнісними мірами m та m' рівна

$$\sup\left\{\left|I_m(f)-I_{m'}(f)\right| : f \in Lip_+(X,d)\right\}.$$

Ця метрика для ймовірнісних мір еквівалентна метриці Прохорова. Для неадитивних мір (ємностей) аналогом інтеграла Лебега є інтеграл Шоке [1], визначений тією ж формулою. Зарічним у [2] було запропоновано поширити на ємності ліпшицеву відстань і доведено її еквівалентність метриці у стилі Прохорова.

Мета нашої праці – показати, що дві основні метрики на просторі ємностей значно ближчі, ніж видається, а саме метрику Прохорова теж можна означити за допомогою інтеграла, специфічного для неадитивних мір.

Метризація простору ємностей за допомогою інтеграла Сугено

Кожній ємності $c \in MX$ можна зіставити інтеграл Сугено I_C^S, який є функціоналом на множині $C_+(X)$ невід'ємних неперервних функцій на X і для $f \in C_+(X)$ визначається формулою:

$$I_c^s(f) = \sup_{\alpha \in I} \min\{\alpha, c(f_\alpha)\},$$

де $f_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$. Попри зовнішню відмінність, інтеграл Сугено є аналогом інтеграла Шоке (тобто Лебега), який отримуємо, коли звичні алгебраїчні операції над дійсними числами замінюємо на так звані ідемпотентні операції (див., наприклад, праці Маслова).

Лема. *Для довільної функції $f \in C_+(X)$ виконується рівність*

$$I_c^s(f) = c\left(f_{\alpha_f}\right),$$

де $\alpha_f = \max\{\alpha \in I \mid c(f_\alpha) \geq \alpha\}$.

Доведення. Покажемо, що множина $A = \{\alpha \in I \mid c(f_\alpha) \geq \alpha\}$ замкнена. Нехай $\beta \in I \setminus A$ тобто, $c(f_\beta) < \beta$ тоді знайдеться таке $\delta > 0$, що $c(f_\beta) < \delta < \beta$. Згідно властивості напівнеперервності згори для ємності існують такий окіл $U \supset f_\beta$ та $\Delta > 0$, що $\delta < \beta - \Delta < \beta$ та $f_\beta \subset f_{\beta-\Delta} \subset U$, тоді $c(f_{\beta-\Delta}) < \delta < \beta - \Delta$. Звідки отримуємо, що $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \subset I \setminus A$, тобто множина $I \setminus A$ відкрита.

В замкненій множині A існує згаданий у формулюванні найбільший елемент $\alpha_f = \max\{\alpha \in I \mid c(f_\alpha) \geq \alpha\}$. Оскільки $\alpha_f \in A$, то $c\left(f_{\alpha_f}\right) \geq \alpha(f)$.

Обчислимо інтеграл Сугено:

$$\begin{aligned} I_c^s(f) &= \sup_{\alpha \in I} \min\{\alpha, c(f_\alpha)\} = \\ &= \max\{\sup_{\alpha \in A} \min\{\alpha, c(f_\alpha)\}, \sup_{\alpha \in I \setminus A} \min\{\alpha, c(f_\alpha)\}\} = \\ &= \max\{\sup_{\alpha \in A} \alpha, \sup_{\alpha \in I \setminus A} c(f_\alpha)\} == \max\{\alpha(f), c(f_\alpha)\} = c(f_\alpha). \end{aligned}$$

Цим доведення закінчено.

Відновити ємність $c \in MX$ за її інтегралом Сугено I_c^s можна наступним способом:

$$c(F) = \inf\left\{ I_c^s(f) \,\middle|\, f \in C_+(X), f|_F \geq 1 \right\}.$$

Позначимо через $Lip(X,d)$ множину усіх нерозтягуючих дійснозначних функцій на метричному компакті (X,d). Для $c, c' \in MX$ покладемо

$$\tilde{d}(c,c') = \sup\left\{ \left| I_c^s(f) - I_{c'}^s(f) \right| : f \in Lip(X,d) \right\}.$$

Теорема 1. *Функція $\tilde{d} : MX \times MX \to R$ є метрикою на просторі ємностей MX, яка збігається з метрикою $\tilde{d}$.*

Доведення. Очевидно, що $\tilde{d}(c,c') = 0$ для кожної $c \in MX$. Покажемо, що функція $\tilde{d}$ відокремлює точки. Нехай $c \neq c'$, тоді існує така замкнена множина $A \subset X$, що $c(A) < c'(A)$ (або $c(A) > c'(A)$). Згідно властивості напівнеперервності згори для ємності, знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що $c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon < c'(A)$. Визначимо функцію $f : X \to R$ формулою:

$$f(x) = c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \max\{0, \varepsilon - d(x,A)\}.$$

Ця функція є нерозтягуючою і приймає значення $f(x) = c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon$ при $x \in A$ та $f(x) = c(\overline{O}_\varepsilon(A))$ при $x \notin c(\overline{O}_\varepsilon(A))$. Крім того, для f відповідні інтеграли Сугено володіють властивостями:

$$I_c^s(f) \geq \min\left\{ c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon, c'\left(f^{-1}\left(\left[c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon; +\infty\right)\right)\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{ c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon, c'(A) \right\} = c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon.$$

та

$$I_c^s(f) = \max\left\{ \sup\left\{ \min\left\{ \alpha, c\left(f^{-1}([\alpha, +\infty))\right)\right\} \,\middle|\, c(\overline{O}_\varepsilon(A)) < \alpha < c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon \right\}; c(\overline{O}_\varepsilon(A)) \right\}.$$

Тому

$$\tilde{d}(c,c') \geq I_{c'}^s(f) - I_c^s(f) \geq c(\overline{O}_\varepsilon(A)) + \varepsilon - c(\overline{O}_\varepsilon(A)) = \varepsilon > 0.$$

Перевіримо нерівність трикутника. Нехай $c, c', c'' \in MX$. Для кожного $\delta > 0$ існує така функція $f \in Lip(X,d)$, що

$$\tilde{d}(c,c') \leq \left| I_c^s(f) - I_{c'}^s(f) \right| + \delta \leq \left| I_c^s(f) - I_{c''}^s(f) \right| + \left| I_{c''}^s(f) - I_{c'}^s(f) \right| + \delta \leq$$

$$\leq \tilde{d}(c,c'') + \tilde{d}(c'',c') + \delta.$$

Перейшовши до границі при $\delta \to 0$, отримаємо шукану нерівність.

Отже, функція $\tilde{d} : MX \times MX \to R$ дійсно є метрикою, оскільки решту властивостей невід'ємності та симетричності є очевидними.

Покажемо, що метрики $\tilde{d}$ та $\hat{d}$ збігаються. Нехай $\hat{d}(c,c') \leq \varepsilon$, тоді для довільної замкненої множини $F \subset X$ виконується нерівність

$c\left(\overline{O}_\varepsilon(A)\right) \ge c'(F) - \varepsilon$. Оскільки $\{x \in X \mid f(x) \ge \alpha\} \supset \overline{O}_\varepsilon\left(\{x \in X \mid f(x) \ge \alpha - \varepsilon\}\right)$, тобто $f_{\alpha-\varepsilon} \supset \overline{O}_\varepsilon(f_\alpha)$ для довільної функції $f \in Lip(X,d)$ то

$$I_c^s(f) \ge \min\{\alpha - \varepsilon, c(f_{\alpha-\varepsilon})\} \ge \min\{\alpha - \varepsilon, c(\overline{O}_\varepsilon(f_\alpha))\} \ge \min\{\alpha - \varepsilon, c'(f_\alpha) - \varepsilon\}.$$

Тобто $I_c^s(f) \ge \min\{\alpha, c'(f_\alpha)\} - \varepsilon$ для кожного $0 \le \alpha \le 1$. Це означає, що $c\left(\overline{O}_\varepsilon(A)\right) \ge c'(F) - \varepsilon$ $I_c^s(f) \ge \sup_{\alpha\in I} \min\{\alpha, c'(f_\alpha)\} - \varepsilon = I_{c'}^s(f) - \varepsilon$.

Аналогічно можна показати, що $I_{c'}^s(f) \ge I_c^s(f) - \varepsilon$. Отже $\tilde{d}(c,c') \le \varepsilon$, тобто $\tilde{d}(c,c') \le \hat{d}(c,c')$.

Нехай тепер $\hat{d}(c,c') > \varepsilon$. Це означає, що існує така замкнена множина $F \subset X$, що не виконано принаймні одну із нерівностей, які визначають метрику $\hat{d}$, наприклад, будемо вважати, що $c\left(\overline{O}_\varepsilon(F)\right) + \varepsilon < c'(F)$. Побудуємо функцію $\varphi : X \to R$ вигляду:

$$\varphi(x) = c'(F) - \varepsilon + \max\{0, \varepsilon - d(x,F)\}.$$

Зрозуміло, що $\varphi \in Lip(X,d)$, крім того, виконуються нерівності $I_{c'}^s(\varphi) \ge c'(F)$

та

$$I_c^s(\varphi) = \max\left\{\sup\{\min\{\alpha, c(f_\alpha)\} \mid c'(F) - \varepsilon < \alpha < c'(F)\}, \min\{c'(F) - \varepsilon, c(X)\}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\sup\left\{\min\{\alpha, c(\overline{O}_\varepsilon(F))\} \,\middle|\, c'(F) - \varepsilon < \alpha \le c'(F)\right\}, c'(F) - \varepsilon\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\left\{c'(F) - \varepsilon, c(\overline{O}_\varepsilon(F))\right\}, c'(F) - \varepsilon\right\} = c'(F) - \varepsilon.$$

Отже, $I_{c'}^s(\varphi) - I_c^s(\varphi) \ge c'(F) - I_c^s(\varphi) > c'(F) - (c'(F) - \varepsilon) = \varepsilon$, тобто для побудованої функції $\varphi \in Lip(X,d)$ нерівність $\left|I_{c'}^s(\varphi) - I_c^s(\varphi)\right| \le \varepsilon$ не виконується, а це означає, що $\tilde{d}(c,c') > \varepsilon$, звідки $\hat{d}(c,c') \le \tilde{d}(c,c')$.

Цим показано, що обидві метрики збігаються, тобто теорему доведено.

Література

1. Choquet G. Theory of Capacity / G.Choquet // Ann. l'Institute Fourier. – 1953-1954. – 5. – P. 131-295.
2. Zarichnyi M.M. Capacity functor in the category of compacta / M.M. Zarichnyi, O.R. Nykyforchyn // Mat. Sb. – 2008. – 199:2. – C. 3-26.
3. Hlushak I.D. Submonads of the capacity monad / I.D. Hlushak, O.R. Nykyforchyn // Carpathian Journal of Mathematics. – 2008. – 24:1. – P. 56-67.
4. Глушак І.Д. Оптимальні наближення ємностей на метричному компакті / І.Д. Глушак // Математичні Студії. – 2009. – Т31, №2 – С. 115-127.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2016 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***
д.ф.-м.н., професором ***Заторським Р.А.***

INTEGRAL IMAGE OF PROHOROV CALCULUS ON SPACE OF THE RATIONED CAPACITIES

I. D. Glushak
Pricarpatscky National University named by Vasil Stefanik;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57; e-mail: inna_gl@rambler.ru

It is proved that Prokhorov metric on the space of normed regular non-additive measures is a particular case of Lipschitz metric constructed using Sugeno integral.

Key words: *Prokhorov metric, Sugeno integral.*