

Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.912

СИМЕТРИЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ДЕЯКІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

М. І. Сєров, Ю. В. Приставка

*Полтавський національний технічний університет імені
Юрія Кондратюка; 36011, м. Полтава, Першотравневий проспект, 24;
тел. 0993063636; e-mail: YuliaPrystavka@rambler.ru*

Літвську симетрію двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії використано для побудови інваріантних анзаців, редуції та знаходження його точних розв'язків.

Ключові слова: *двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії, симетрія, метод Лі, максимальна алгебра інваріантності, інваріантний анзац, редукована система, точні розв'язки.*

Математичні моделі багатьох фізичних процесів найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. До таких рівнянь відносять рівняння реакції-конвекції-дифузії.

Розглянемо двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$w_0 = \partial_a(f(w)w_a) + g^a(w)w_a + H(w), \quad (1)$$

де $w = w(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f(w_a)$, $g^a(w)$, $H(w)$ – коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1, 2\}$.

Рівняння (1) описує багато фізичних процесів. Воно використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів.

Заміна $u = \int f(w)dw$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$ – нова невідома функція, зводить рівняння (1) до вигляду

$$\Delta u = f^0(u)u_0 + f^a(u)u_a + h(u). \quad (2)$$

в якому ми і будемо його досліджувати.

Найбільш цікавим із симетрійної точки зору рівнянням класу (2) є рівняння

$$\Delta u = u^k u_0 + \lambda_a u_a - \frac{1}{4} \bar{\lambda}^2, \quad (3)$$

де λ_a, k – довільні сталі.

Теорема 1. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (3) є наступна алгебра

$$\langle \partial_0, \partial_1, \partial_2, D = kx_0 \partial_0 + u \partial_u, Q_1, Q_2 \rangle, \quad (4)$$

$$\text{де } Q_1 = e^{\frac{k}{4}w} [(\lambda_a \cos \frac{k}{4} \omega - \lambda_a^\perp \sin \frac{k}{4} \omega) \partial_a + \frac{\bar{\lambda}^2}{2} \cos \frac{k}{4} \omega],$$

$$Q_2 = e^{\frac{k}{4}w} [(\lambda_a^\perp \cos \frac{k}{4} \omega + \lambda_a \sin \frac{k}{4} \omega) \partial_a + \frac{\bar{\lambda}^2}{2} \sin \frac{k}{4} \omega],$$

$$w = \bar{\lambda} \bar{x}, \quad \omega = \bar{\lambda}^\perp \bar{x}, \quad \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \bar{\lambda}^\perp = (-\lambda_2, \lambda_1).$$

Теорема 1 доводиться стандартним методом Лі (див. [2], [4]).

Поставимо задачу використати симетрійні властивості рівняння (3) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Використавши заміну

$$\frac{16}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \rightarrow x_0, \quad \frac{k}{4} \bar{\lambda} \bar{x} \rightarrow x_1, \quad \frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \rightarrow x_2, \quad u \rightarrow u$$

перейдемо до рівняння

$$\Delta u = u^k u_0 + \frac{4}{k} u_1 - \frac{4}{k^2} u. \quad (5)$$

Оператори (4) в нових змінних набудуть вигляду

$$\langle \partial_0, \partial_1, \partial_2, D = kx_0 \partial_0 + u \partial_u, Q_1, Q_2 \rangle$$

$$\text{де } Q_1 = e^{x_1} (\cos x_2 \partial_1 - \sin x_2 \partial_2 + \frac{2}{k} \cos x_2 u \partial_u),$$

$$Q_2 = e^{x_1} (\sin x_2 \partial_1 + \cos x_2 \partial_2 + \frac{2}{k} \sin x_2 u \partial_u).$$

Проведемо редукцію рівняння (5) до диференціального рівняння з меншою кількістю незалежних змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0 \partial_0 + d_a \partial_a + c_0 D + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \quad (6)$$

Один з анзаців (див., наприклад, [6]), отриманий за допомогою оператора (6) має вигляд

$$u = e^{\frac{2}{k}x_1} \varphi(x_0, \omega), \quad \omega = \dot{z}(x_2)e^{x_1} + te^{2x_1}, \quad \ddot{z} + z = 0.$$

Він редукує рівняння (5) до диференціального рівняння

$$\varphi^k \varphi_0 = (4t\omega + \bar{c}^2) \varphi_{\omega\omega} + 4t\varphi_{\omega}.$$

Припустивши, що $t = 0$, прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \varphi^k \varphi_0 = \varphi_{\omega\omega}.$$

Використавши заміну

$$x_0 \rightarrow \frac{1}{\bar{c}^2} x_0, \quad \omega \rightarrow \omega, \quad \varphi \rightarrow \varphi,$$

одержимо рівняння

$$\varphi^k \varphi_0 = \varphi_{\omega\omega}. \quad (7)$$

Теорема 2 [3]. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (7) є алгебра

$$1) \langle \partial_0, \partial_{\omega}, D_1 = x_0 \partial_0 + \frac{1}{k} \varphi \partial_{\varphi}, D_2 = x_{\omega} \partial_{\omega} - \frac{2}{k} \varphi \partial_{\varphi} \rangle, \quad (8)$$

якщо $k \neq -4$.

$$2) \langle \partial_0, \partial_{\omega}, D_1 = x_0 \partial_0 - \frac{1}{4} \varphi \partial_{\varphi}, D_2 = x_{\omega} \partial_{\omega} + \frac{1}{2} \varphi \partial_{\varphi} \rangle, \quad (9)$$

$$K = x_{\omega}^2 \partial_{\omega} + \omega x_{\omega} \partial_{\omega} \rangle,$$

якщо $k = -4$.

Використаємо ліівську симетрію рівняння (7) для побудови його інваріантних анзаців, редукції та знаходження розв'язків (див., [7]).

Розв'язок рівняння (7) будемо шукати у вигляді

$$\varphi = A(x_0, \omega) \psi(y), \quad (10)$$

де $A(x_0, \omega), y = y(x_0, \omega)$ – деякі гладкі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{d\omega}{\xi^1} = \frac{d\varphi}{\eta} = d\tau, \quad (11)$$

$\varphi(y)$ – нова невідома функція.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (7) при $k \neq -4$ є алгебра (8). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_0 x_0 + d_0; \\ \xi^1 &= c_1 \omega + d_1; \\ \eta &= \frac{1}{k} (c_0 - 2c_1) \varphi, \end{aligned}$$

де c_0, c_1, d_0, d_1 – довільні групові параметри. Система (11) має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= c_0 x_0 + d_0, \\ \dot{\omega} &= c_1 \omega + d_1, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{k}(c_0 - 2c_1)\varphi,\end{aligned}\tag{12}$$

де c_0, c_1, d_0, d_1 – довільні числові параметри. Зінтегрувавши систему (12) методом, розглянутим наприклад у роботах [7], [5] наведемо вигляд інваріантних анзаців, які одержуються в результаті:

$$\varphi = \psi(y), y = \omega + mx_0;\tag{13}$$

$$\varphi = x_0^{\frac{1}{k}} \psi(y), y = \omega + m \ln x_0;$$

$$\varphi = e^{\frac{2m}{k}x_0} \psi(y), y = e^{mx_0} \omega;$$

$$\varphi = x_0^{\frac{1+2m}{k}} \psi(y), y = x_0^m \omega,$$

де m – довільна стала, яка виражається через сталі c_0, c_1, d_0, d_1 .

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (7). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\ddot{\psi} - m\psi^k \dot{\psi} = 0,\tag{14}$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k \dot{\psi} - \frac{1}{k}\psi^k \psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k \omega \dot{\psi} - \frac{2m}{k}\psi^k \psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k \omega \dot{\psi} - \frac{2m+1}{k}\psi^k \psi = 0.$$

Розв'язками редукованого рівняння (14) є

$$\psi = \left(-\frac{mk}{k+1}y + c\right)^{\frac{1}{k}}, k \in R;\tag{15}$$

$$\psi = -th\left(\frac{m}{2}y + c\right), k = 1;\tag{16}$$

$$\psi = tg\left(\frac{m}{2}y + c\right), k = 1;\tag{17}$$

$$\operatorname{arcth} \psi + \operatorname{arctg} \psi = -\frac{m}{2}y + c, k = 3,\tag{18}$$

де c – довільна стала.

Використавши анзац (13) та розв'язки (15)-(18), знаходимо розв'язки рівняння (3):

$$\begin{aligned}
 u &= e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} \left[-\frac{mk}{k+1} \left(\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right) e^{\frac{k}{4}\bar{\lambda}\bar{x}} + \frac{16m\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2} x_0 \right) + c \right]^{\frac{1}{k}}; \\
 u &= -e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} \operatorname{th} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right) e^{\frac{k}{4}\bar{\lambda}\bar{x}} + \frac{16m\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2} x_0 \right) + c \right]; \\
 u &= e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} \operatorname{tg} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right) e^{\frac{k}{4}\bar{\lambda}\bar{x}} + \frac{16m\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2} x_0 \right) + c \right]; \\
 \operatorname{arcth} \left(e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} u \right) + \operatorname{arctg} \left(e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} u \right) &= -\frac{m}{2} \left[\left(\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right) e^{\frac{k}{4}\bar{\lambda}\bar{x}} + \frac{16m\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2} x_0 \right) + c \right].
 \end{aligned}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння(7) при $k = -4$ є алгебра (9). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами:

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= c_0 x_0 + d_0, \\
 \xi^1 &= c_1 \omega^2 + c_2 \omega + d_1, \\
 \eta &= -\frac{1}{4} (c_0 - 4c_1 x_1 - 2c_2) \varphi,
 \end{aligned}$$

де c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 – довільні групові параметри. Система (11) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= c_0 x_0 + d_0, \\
 \dot{\omega} &= c_1 \omega^2 + c_2 \omega + d_1, \\
 \dot{\varphi} &= -\frac{1}{4} (c_0 - 4c_1 x_1 - 2c_2) \varphi,
 \end{aligned} \tag{19}$$

де c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 – довільні числові параметри.

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (19), наведемо вигляд інваріантних анзаців, які одержуються в результаті.

$$\begin{aligned}
 \varphi &= (\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \psi(y), \quad y = \operatorname{arcth} \omega + mx_0; \\
 \varphi &= (\omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \psi(y), \quad y = -\operatorname{arcth} \omega + mx_0; \\
 \varphi &= \omega \psi(y), \quad y = \frac{1}{\omega} + mx_0; \\
 \varphi &= x_0^{-\frac{1}{4}} (\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \psi(y), \quad y = \operatorname{arcth} \omega + \ln x_0; \\
 \varphi &= x_0^{-\frac{1}{4}} (\omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \psi(y), \quad y = -\arctan \omega - \ln x_0; \\
 \varphi &= x_0^{-\frac{1}{4}} \omega \psi(y), \quad y = \frac{1}{\omega} + \ln x_0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

де m – довільна стала, яка виражається через сталі c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 .

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаці підставити у рівняння (7). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} - \psi &= 0, \\ \ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} + \psi &= 0, \\ \ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} &= 0, \\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\psi &= 0, \\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\psi &= 0, \\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - \frac{1}{4}\psi &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Одним із розв'язків редукованого рівняння (21) є

$$\psi = \left(-\frac{4}{3}m\psi + c\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (22)$$

Використавши анзац (20) та розв'язок (22), знаходимо розв'язок рівняння (3):

$$u = e^{-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{x}} \dot{z}(-\bar{\lambda}^{\perp}\bar{x}) \left[\frac{1}{3}m \left(\frac{e^{\bar{\lambda}\bar{x}}}{\dot{z}(-\bar{\lambda}^{\perp}\bar{x})} + \frac{m\bar{c}^2}{\bar{\lambda}^2}x_0 \right) + c \right]^{\frac{1}{4}},$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (7) при умові $k = -2$. Застосуємо до даного рівняння сукупність двох перетворень (див., наприклад, [7], [9]):

$$x_0 = x_0, \quad \omega = \omega, \quad \varphi = v_{\omega}^{-1},$$

де $v = v(x_0, \omega)$ – нова невідома функція,

$$x_0 = t, \quad \omega = w, \quad v = x,$$

де t, x – нові незалежні змінні, $w = w(t, x)$ – нова залежна змінна.

У результаті одержимо рівняння

$$w_t = w_{xx}. \quad (23)$$

Це лінійне рівняння теплопровідності. Його симетрійні властивості добре відомо.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (23) є нескінченно вимірна алгебра, підалгеброю якої є узагальнена алгебра Галілея

$$\langle \partial_t, \partial_x, D = 2t\partial_t + x\partial_x, Q = -\frac{1}{2}w\partial_w, G = t\partial_x + xQ, \dots \rangle$$

$$P = t^2\partial_t - tx\partial_x + \left(\frac{x^2}{2} + t\right)Q, X^{\infty} = \beta(t, x), \beta_t = \beta_{xx} \rangle$$

Використаємо лівську симетрію рівняння для побудови його інваріантних анзаців. Розв'язок рівняння (23) будемо шукати у вигляді

$$w = A(t, y)\psi(y),$$

де $A(t, y)$, $y = y(t, x)$ – деякі гладкі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{dw}{\eta} = d\tau, \quad (24)$$

$w(t, x)$ – нова невідома функція.

Якщо обмежитися лише узагальненою алгеброю Галілея, то маємо чотири нееквівалентні випадки:

- 1) $\partial_x + m\partial_t + pQ$,
- 2) $D + pQ$,
- 3) $G + p\partial_t$,
- 4) $\Pi + \partial_t + pQ$.

Для даних чотирьох випадків система (24) має вигляд

$$\dot{t} = -\frac{1}{m}, \dot{x} = 1, \dot{w} = -\frac{p}{m}w. \quad (25)$$

$$\dot{t} = 2t, \dot{x} = x, \dot{w} = 2pw. \quad (26)$$

$$\dot{t} = -\frac{1}{p}, \dot{x} = t, \dot{w} = -\frac{1}{2}xw. \quad (27)$$

$$\dot{t} = t^2 + 1, \dot{x} = tx, \dot{w} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + p\right)w. \quad (28)$$

Проаналізувавши та розв'язавши системи (25)-(28), одержимо інваріантні лівські анзаци для рівняння (23)

$$w = e^{pt}\psi(y), y = x + nt; \quad (29)$$

$$w = t^p\psi(y), y = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$w = e^{xt + \frac{2}{3}t^3}\psi(y), y = x + t^2;$$

$$w = e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2 t}{t^2 + 1} \operatorname{arctg} t} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} \psi(y), y = \frac{x}{t^2 + 1}. \quad (30)$$

Підставивши анзац (29) у рівняння (23), одержимо наступні редуковані рівняння:

$$\ddot{\psi} - n\dot{\psi} - p\psi = 0, \quad (31)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{2}y\dot{\psi} - p\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - y\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\right)\psi = 0, \quad (32)$$

Розв'язками редукованого рівняння (31) в залежності від значень сталих n і p є

$$\psi = c_1 e^{k_1 y} + c_2 e^{k_2 y}, \quad (33)$$

$$\psi = (c_1 + c_2 y) e^{k_3 y}, \quad (34)$$

$$\psi = (c_1 \cos \beta y + c_2 \sin \beta y) e^{\alpha y}. \quad (35)$$

Використавши анзац (29) та розв'язки (33)-(35), знаходимо розв'язки рівняння (3), записані у параметричному вигляді:

$$\bar{\lambda} \bar{x} = \frac{4}{k} \ln \frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0} \left(c_3 e^{k_1 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} + c_4 e^{k_2 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \right)}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)},$$

$$u = \left[\frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0} \left(c_3 e^{k_1 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} + c_4 e^{k_2 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \right)}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)} \right]^{\frac{2}{k}} \times$$

$$\times e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0} \left(c_3 k_1 e^{k_1 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} + c_4 k_2 e^{k_2 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \right);$$

$$\bar{\lambda} \bar{x} = \frac{4}{k} \ln \frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 + k_3 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \left(c_3 + c_4 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right) \right)}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)},$$

$$u = \left[\frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 + k_3 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \left(c_3 + c_4 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right) \right)}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)} \right]^{\frac{2}{k}} \times$$

$$\times e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 + k_3 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \left(c_3 + c_4 \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right) \right);$$

$$\bar{\lambda} \bar{x} = \frac{4}{k} \ln \frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 + \alpha \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right)} \left(c_3 \cos \beta \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right) + c_4 \sin \left(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2 \bar{\lambda}^2} x_0 \right) \right)}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)},$$

$$u = \left[\frac{e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0 + \alpha(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0)} (c_3 \cos \beta(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0) + c_4 \sin(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0))}{\dot{z} \left(\frac{k}{4} \bar{\lambda}^\perp \bar{x} \right)} \right]^{\frac{2}{k}} \times$$

$$\times e^{\frac{16p\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0 + \alpha(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0)} \left[\alpha c_3 \cos \beta(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0) + \alpha c_4 \sin(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0) - \right.$$

$$\left. - c_3 \sin \beta(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0) + c_4 \cos(\tau + \frac{16n\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0) \right],$$

де τ – довільний параметр.

Розв'язком редукованого рівняння (32) (див. [1]) є

$$\psi = e^{\frac{1}{4}y^2} (c_1 + c_2 \int e^{-\frac{1}{2}y^2} dy). \quad (36)$$

Використавши анзац (30) та розв'язок (36), знаходимо розв'язок рівняння (3), записаний у параметричному вигляді:

$$\bar{\lambda}\bar{x} = \frac{4}{k} \ln \left(\dot{z}^{-1} \delta^{-\frac{1}{4}} e^{\tau^2 \frac{1 - \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0}{4\delta} - \frac{1}{2} \arctg \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0} W \right),$$

$$u = \left(\dot{z}^{-1} \delta^{-\frac{1}{4}} e^{\tau^2 \frac{1 - \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0}{4\delta} - \frac{1}{2} \arctg \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0} W \right)^{\frac{2}{k}} e^{\tau^2 \frac{1 - \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0}{4\delta} - \frac{1}{2} \arctg \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0} \times$$

$$\times \delta^{-\frac{3}{4}} \left(-\tau \frac{1 - \frac{16\bar{c}^2}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0}{2\delta} W + c_4 e^{\frac{\tau^2}{2\delta}} \right),$$

де $\delta = \delta(x_0) = \frac{16\bar{c}^4}{k^2\bar{\lambda}^2}x_0^2 + 1$, $z = z\left(\frac{k}{4}\bar{\lambda}^\perp\bar{x}\right)$, $W = c_3 + c_4 \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{\delta}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$,

τ – довільний параметр.

Таким чином, ми використали симетрійні властивості рівняння (3) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків. Знайдені нами точні розв'язки рівняння (3) містять довільні сталі $m, c, c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2, k_3, p, n, \alpha, \beta$. Отже, можна стверджувати, що ми побудували декілька багатопараметричних класів точних розв'язків даного рівняння. Це дає можливість застосувати одер-

жані розв'язки для розв'язування різноманітних граничних та початкових задач.

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР / Л.В. Овсянников. – Т.125, 1959. – С. 492-495.
4. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 581с.
5. Омелян О.М. Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О.М. Омелян // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: “Математика. Механіка”. – 2004. – № 11-12. – С. 95-100.
6. Фущич В.И. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов, Т.К. Амеров. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
7. Фущич В.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И.Фущич, В.М. Штельень, Н.И. Серов. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
8. Серов М.І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису: монографія / М.І. Серов, О.М. Омелян. – Полтава: ПолтНТУ, 2011. – 236 с.
9. King J.R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation/ монографія / J.R. King // Journal of Mathematical Physics. – 1990. – V. 23. – P. 5441-5464.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2016 р.

Рекомендовано до друку академіком НАН України,

*д.ф.-м.н., професором **Перестюком М.О.** (м. Київ),*

*д.ф.-м.н., професором **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

SYMMETRY PROPERTIES AND SOME EXACT SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR EQUATION OF REACTION-CONVECTION-DIFFUSION

M. I. Serov, Yu. V. Prystavka

Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University;

36011, Poltava, Pershotravneva Avenue, 24;

ph. 0993063636; e-mail: YuliaPrystavka@rambler.ru

Li's symmetry of two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion used to build invariantanzatze, reduction and finding its exact solutions.

Key words: *two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion, symmetry, the method of Lie, maximalinvariance algebra, invariant ansatz, reduced system, exact solutions.*