

Механіка

УДК 539.4

DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-119-127

ПОБУДОВА СТАТИСТИЧНОГО КРИТЕРІЮ МІЦНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДЕЯКИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДЕТЕРМІНІСТИЧНИХ АСПЕКТІВ КРИХКОГО РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

Р. І. Квіт

*Національний університет «Львівська політехніка»;
79013, Львів, вул. С. Бандери 12; e-mail: kvit_rom@ukr.net*

Розглянуто модель стохастично дефектної пластини з ізотропного матеріалу за умов усебічного розтягу-стиску. Дефекти-тріщини характеризуються двома статистично незалежними геометричними параметрами, закони ймовірнісного розподілу яких задаються. На основі детерміністичного критерію руйнування, який враховує початковий напрямок поширення тріщини, записані рівняння статистичних діаграм міцності пластини в середніх значеннях руйнівного навантаження. Такі діаграми побудовані для пластин з різною дефектністю структури і різною структурною неоднорідністю матеріалу. Досліджено вплив врахування початкового напрямку поширення тріщини на отримані криві граничного стану.

Ключові слова: *ізотропний матеріал, пластини, тріщина, функція розподілу, критерій міцності.*

Вступ.

Для високоміцних матеріалів, схильних до крихкого руйнування, актуальною є проблема розроблення і дослідження критеріїв міцності. Для описових параметрів структури таких матеріалів характерна випадковість, певний ймовірнісний розподіл (стохастичність). Адекватніше оцінити їх надійність дає змогу комплексне застосування детерміністичних розв'язків механіки крихкого руйнування та методів теорії ймовірностей і математичної статистики. Проблема міцнісної надійності конструкційних матеріалів у ймовірнісному аспекті досліджувалася у [1–6].

Метою даного дослідження є побудова діаграм міцності стохастично дефектних пластин із застосуванням детерміністичного

критерію крихкого руйнування, що враховує початковий напрямок поширення тріщини, аналіз їх залежності від кількості дефектів та структурної неоднорідності матеріалу.

Постановка задачі.

Розглянемо прямокутну пластину, матеріал якої є ізотропним та має однакову тріщиностійкість K_{IC} . Вона перебуває під дією однорідного навантаження P та $Q = \eta P$ (рис. 1) за умов всебічного розтягу-стиску. Навантаження P та Q можна розглядати як головні напруження за плоского напруженого стану. Розглядаємо модель стохастично дефектної пластини, тобто в ній рівномірно розподілені прямолінійні дефекти-тріщини (вважаємо, що їх кількість дорівнює певному числу N), які пронизують по нормалі товщину. Число N пропорційне площі пластини S : $N = N_0 S$, де N_0 – кількість дефектів у одиниці площі. Тріщини не взаємодіють між собою і характеризуються двома статистично незалежними параметрами. Першим з них є довжина $2l$ ($0 \leq 2l \leq d$, d – скінченна структурна характеристика), другим – кут нахилу α відносно напрямку дії сили P ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$). Щільність ймовірності розподілу випадкової величини l вибираємо у вигляді узагальненого β -розподілу [7]: $f(l) = \frac{r+1}{d} \left(1 - \frac{l}{d}\right)^r$, де $r \geq 0$ – структурний параметр матеріалу (зі збільшенням r ймовірніші малі тріщини). Для ізотропного матеріалу випадкову величину α задаємо [7] щільністю рівномірного розподілу ймовірностей: $f(\alpha) = 1/\pi$.

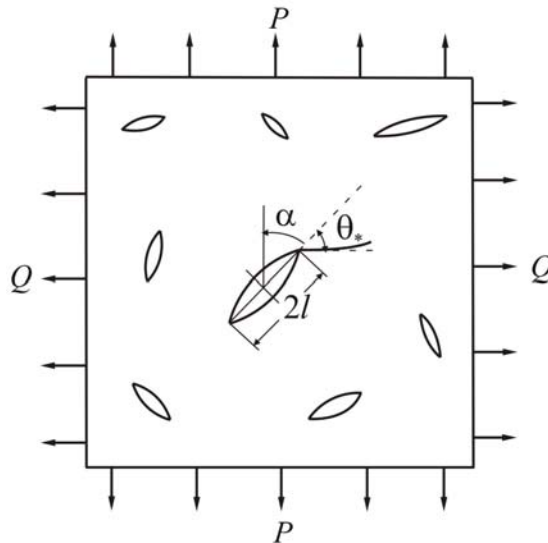


Рис. 1. Модель стохастично дефектної пластини за умов усебічного розтягу-стиску

Будемо розглядати пластину як сукупність N первинних дефектних елементів (з одною тріщиною). Руйнівне навантаження для неї співпадає з руйнівним навантаженням для її найслабшого елемента (гіпотеза найслабшої ланки Вейбулла).

За детерміністичний критерій руйнування (руйнівне навантаження $P_*, Q_* = \eta P_*$) для пластини з прямолінійною тріщиною за умов розтяг-стиску вибираємо критерій, що враховує початковий напрямок її поширення [8]

$$|P_*| = \frac{K}{\sqrt{l}} \varphi_i(\alpha, \eta, \rho, \theta_*), \quad K = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi}} \quad (i=1,2), \quad (1)$$

де K_{Ic} – коефіцієнт інтенсивності напружень (стала, яка характеризує опір матеріалу поширенню тріщини), ρ – коефіцієнт тертя між її берегами ($0 \leq \rho \leq 1$), кут $\theta = \theta_*$ (рис. 1) визначає початковий напрямок поширення тріщини і визначається так:

$$\theta_* = 2 \arctg \frac{1 - \sqrt{1 + 8b^2}}{4b}, \quad b = \frac{(1 - \eta) \sin 2|\alpha|}{2(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)}. \quad (2)$$

Функція $\varphi_i(\alpha, \eta, \rho, \theta_*)$ залежно від типу тріщини має таке аналітичне подання:

а) для відкритих тріщин ($\sigma_n \geq 0$)

$$\varphi_1(\eta, \alpha, 0, \theta_*) = \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left(\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - \frac{3}{2} (1 - \eta) \sin \frac{\theta_*}{2} \sin 2|\alpha| \right)^{-1}, \quad (3)$$

де σ_n – нормальні до лінії тріщини напруження ($\sigma_n = P \sin^2 \alpha + Q \cos^2 \alpha$).

б) для закритих тріщин ($\sigma_n < 0$)

$$\varphi_2(\eta, \alpha, \rho, 0) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left((1 - \eta) \sin 2|\alpha| + 2\rho \operatorname{sign} P (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) \right)^{-1}. \quad (4)$$

Функція розподілу руйнівного навантаження.

На основі детерміністичного критерію руйнування (1)–(4) отримано [7] вирази функції розподілу руйнівного навантаження для елемента пластини з одною тріщиною з врахуванням початкового напрямку її поширення, для таких випадків прикладеного навантаження:

за двовісного розтягу $0 \leq \eta \leq 1$ ($P > 0$)

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \left(1 - \Psi_1 \left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \theta_* \right) \right)^{r+1} d\alpha, \quad \frac{K}{\sqrt{d}} \leq P \leq \frac{K}{\eta \sqrt{d}} \quad (\eta \neq 1); \quad (5)$$

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \Psi_1 \left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \theta_* \right) \right)^{r+1} d\alpha, \quad \frac{K}{\eta \sqrt{d}} \leq P < \infty \quad (\eta \neq 0); \quad (6)$$

зокрема, за двовісного симетричного розтягу ($P = Q > 0$, $\eta = 1$)

$$F_1(P, 1) = \left(1 - \frac{K^2}{P^2 d}\right)^{r+1}, \quad \frac{K}{\sqrt{d}} \leq P < \infty; \quad (7)$$

за розтягу-стиску $-1 \leq \eta < 0$ ($P > 0$, $Q < 0$)

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right)\right)^{r+1} d\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}K}{8\sqrt{|\eta|d}} \leq P < \frac{\phi_1(\eta)K}{\sqrt{d}} \quad (\eta \neq -1) \quad (8)$$

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left(1 - \Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right)\right)^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_1\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \theta_*\right)\right)^{r+1} d\alpha, \\ \frac{\phi_1(\eta)K}{\sqrt{d}} \leq P < \infty; \quad (9)$$

за переважаючого стиску-розтягу ($-\infty < \eta < -1$)

при $-\left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2}\right)^2 \leq \eta < -1$

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right)\right)^{r+1} d\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}K}{8\sqrt{|\eta|d}} \leq P \leq \frac{\phi_2(\eta)K}{\sqrt{d}}; \quad (10)$$

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left(1 - \Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right)\right)^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(1 - \Psi_1\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \theta_*\right)\right)^{r+1} d\alpha, \\ \frac{\phi_2(\eta)K}{\sqrt{d}} \leq P < \infty; \quad (11)$$

при $-\infty < \eta \leq -\left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2}\right)^2$

$$F_1(P, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \left(1 - \Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right)\right)^{r+1} d\alpha, \\ \frac{\sqrt{3}K}{4\sqrt{d}((1-\eta)\sqrt{1+\rho^2} + \rho(1+\eta))} \leq P \leq \frac{\sqrt{3}K}{8\sqrt{|\eta|d}}. \quad (12)$$

Тут введені позначення:

$$\Psi_1\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \theta_*\right) = \frac{K^2}{P^2 d} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left(\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - \frac{3}{2}(1-\eta) \sin \frac{\theta_*}{2} \sin 2|\alpha|\right)^{-2};$$

$$\Psi_2\left(\frac{K^2}{P^2 d}, \eta, \alpha, \rho\right) = \frac{3K^2}{16P^2 d} \left((1-\eta) \sin 2|\alpha| + 2\rho(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)\right)^{-2};$$

$\alpha_0 = \text{arctg} \sqrt{-\eta}$; $\alpha_1 \in (0, \pi/2)$ – розв’язок рівняння

$$K^2 P^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, 0) = d; \quad \alpha_2 = \text{arctg} \frac{\eta - 1 + \sqrt{(1-\eta)^2 - 4\eta\rho^2}}{2\rho};$$

$$\alpha_3 = \text{arctg} \frac{(1-\eta)P\sqrt{d} - \sqrt{(1-\eta)^2 P^2 d - 4(\sqrt{3}K/8 - \rho P\sqrt{d})(\sqrt{3}K/8 - \eta\rho P\sqrt{d})}}{2(\sqrt{3}K/8 - \rho P\sqrt{d})};$$

$$\alpha_4 = \text{arctg} \frac{(1-\eta)P\sqrt{d} + \sqrt{(1-\eta)^2 P^2 d - 4(\sqrt{3}K/8 - \rho P\sqrt{d})(\sqrt{3}K/8 - \eta\rho P\sqrt{d})}}{2(\sqrt{3}K/8 - \rho P\sqrt{d})};$$

$$\phi_1(\eta) = \varphi_1(\pi/3, \eta); \quad \phi_2(\eta) = \varphi_1(\alpha_0, \eta).$$

У випадку $\frac{\sqrt{3}K}{8\sqrt{|\eta|d}} \leq P \leq \frac{\phi_2(\eta)K}{\sqrt{d}}$ функція розподілу $F_1(P, \eta)$ має

вигляд (10).

Для $\frac{\phi_2(\eta)K}{\sqrt{d}} \leq P < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ визначається фо-

рмулою (11).

Якщо $1 < \eta < \infty$ ($P > 0$) або $-\infty < \eta < 0$ ($Q > 0$), то здійснивши заміну P на Q та η на $\eta_1 = 1/\eta$ у відповідних виразах для $F_1(P, \eta)$, отримаємо функцію розподілу $F_1(Q, \eta_1)$.

Статистичні діаграми міцності.

Рівняння статистичної діаграми міцності для пластини з N тріщинами, яка записана в середніх значеннях руйнівного навантаження [9]

$$\langle P \rangle = P_{\min}(\eta) + \int_{P_{\min}(\eta)}^{P_{\max}(\eta)} (1 - F_1(P, \eta))^N dP, \quad \langle Q \rangle = \eta \langle P \rangle. \quad (13)$$

Підставимо аналітичні подання функції розподілу руйнівного навантаження (5)–(12) у співвідношення (13) та проведемо заміну змінних

$x = \frac{K^2}{P^2 d}$. Отримаємо вирази середніх значень руйнівного навантаження

(записуємо як безвимірну величину):

за двовісного розтягу $0 \leq \eta \leq 1$ ($P > 0$)

$$\begin{aligned} \langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\eta^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \Psi_1(x, \eta, \alpha, \theta_*))^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\eta^2}^1 \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} (1 - \Psi_1(x, \eta, \alpha, \theta_*))^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; \end{aligned} \quad (14)$$

зокрема, за двовісного симетричного розтягу ($P = Q > 0$, $\eta = 1$)

$$\langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - (1-x)^{r+1} \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; \quad (15)$$

за розтягу-стиску $-1 \leq \eta < 0$ ($P > 0$, $Q < 0$)

$$\begin{aligned} \langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} = & \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{|\eta|}} + \frac{1}{2} \int_0^{\phi_1^{-2}(\eta)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left(1 - \Psi_2(x, \eta, \alpha, \rho) \right)^{r+1} d\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_1(x, \eta, \alpha, \theta_*) \right)^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\phi_1^{-2}(\eta)}^{\frac{64}{3}|\eta|} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_2(x, \eta, \alpha, \rho) \right)^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; \end{aligned} \quad (16)$$

за переважуючого стиску-розтягу ($-\infty < \eta < -1$)

при $-\left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2}\right)^2 \leq \eta < -1$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} = & \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{|\eta|}} + \frac{1}{2} \int_0^{\phi_2^{-2}(\eta)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left(1 - \Psi_2(x, \eta, \alpha, \rho) \right)^{r+1} d\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(1 - \Psi_1(x, \eta, \alpha, \theta_*) \right)^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\phi_2^{-2}(\eta)}^{\frac{64}{3}|\eta|} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left(1 - \Psi_2(x, \eta, \alpha, \rho) \right)^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}}; \end{aligned} \quad (17)$$

при $-\infty < \eta \leq -\left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2}\right)^2$

$$\langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} = \frac{\sqrt{3}}{4x_1} + \frac{1}{2} \int_{\frac{16}{3}x_1^2}^{\frac{64}{3}|\eta|} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \left(1 - \Psi_2(x, \eta, \alpha, \theta_*) \right)^{r+1} d\alpha \right)^N \frac{dx}{\sqrt{x^3}}, \quad (18)$$

$$x_1 = (1 - \eta)\sqrt{1 + \rho^2} + \rho(1 + \eta).$$

Середнє значення другої компоненти руйнівного навантаження знаходимо з умови

$$\langle P \rangle \frac{\sqrt{d}}{K} = \eta \langle Q \rangle \frac{\sqrt{d}}{K}. \quad (19)$$

Відповідно до виразів (14)–(19) на рис. 2-3 побудовані статистичні діаграми міцності пластин. На рис. 2 – для пластин з різною дефектніс-

тю ($r = 1$, $\rho = 0,5$). Щільність імовірності розподілу випадкової величини l матиме вигляд лінійно спадного закону: $f(l) = \frac{2}{d} \left(1 - \frac{l}{d}\right)$. Суцільні лінії відповідають випадку врахування початкового напрямку поширення тріщини, а штрихові – без його врахування [9].

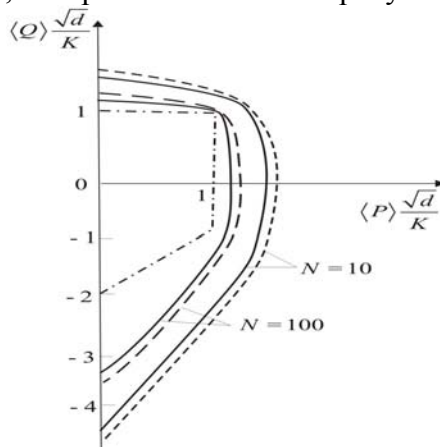


Рис. 2. Діаграми міцності за різної кількості дефектів

На рис. 3 побудовані статистичні діаграми міцності для пластин з різною структурною неоднорідністю ($\rho = 0,5$). Позначення суцільних і штрихових ліній аналогічні до рис. 2.

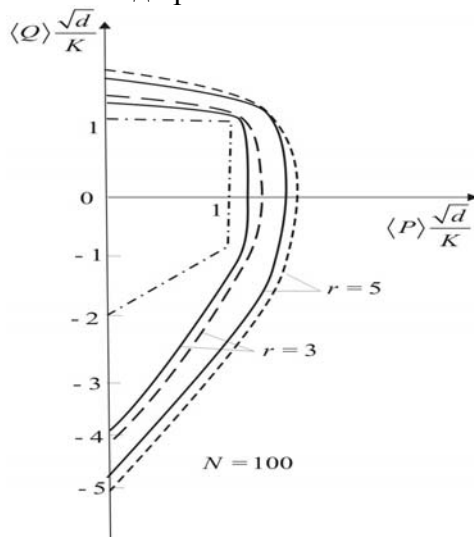


Рис. 3. Діаграми міцності за різної структурної неоднорідності матеріалу

Висновки

Аналізуючи побудовані діаграми міцності на рис. 2 бачимо, що за однакової кількості дефектів середні значення руйнівного навантаження є меншими у випадку врахування початкового напрямку поширення

тріщин, причому це зменшення в області двовісного розтягу залежить від виду напруженого стану (від η). На міцність матеріалу впливає вид напруженого стану та кількість тріщин (розміри пластини). На рис. 3 досліджено вплив на міцність матеріалу його структурної неоднорідності (параметра r). Зі збільшенням параметра r міцність пластини збільшується. Даний факт підтверджує фізичний зміст параметра r і пояснюється збільшенням однорідності матеріалу. З ускладненням напруженого стану міцність матеріалу знижується. Наприклад, за двовісного розтягу вона нижча ніж за одновісного. Ця різниця зменшується зі збільшенням числа N дефектів. Одночасно зі збільшенням N область допустимих (безпечних) навантажень зменшується, тобто зменшується міцність матеріалу. При $N \rightarrow \infty$ будемо мати, що $\langle P \rangle \rightarrow P_{\min}$, $\langle Q \rangle \rightarrow Q_{\min} = \eta P_{\min}$, тобто статистичні діаграми міцності переходять у детерміністичну криву мінімальних руйнівних навантажень (штрихпунктирні лінії на рис. 2-3). Зменшення середнього значення руйнівного навантаження за збільшення розмірів пластини (числа N) є проявом масштабного ефекту, статистична природа якого полягає у збільшенні ймовірності появи найнебезпечнішого дефекту зі збільшенням розмірів пластини. Проявом масштабного ефекту також є збільшення середнього значення руйнівного навантаження зі збільшенням параметра r за постійних розмірів пластини.

Література

1. Bazant Z. Statistical aspects of quasibrittle size effect and lifetime with consequences for safety and durability large structures / Z. Bazant, J.-L. Le, Q. Yu // Proc. of FraMCoS-7. – 2010. – P. 1–8.
2. Keles Ö. Stochastic failure of isotropic brittle materials with uniform porosity / Ö. Keles, R. Garcia, K. Bowman // Acta Materialia. – 2013. – Vol. 61, Is. 8. – P. 2853–2862.
3. Bertalan Z. Fracture strength: stress concentration, extreme value statistics, and the fate of the Weibull distribution / Z. Bertalan, A. Shekhawat, J.P. Sethna, S. Zapperi // Phys. Rev. – 2014. – Vol. 2, Is. 3. – P. 034008.
4. Heckmann K. Comparative analysis of deterministic and probabilistic fracture mechanical assessment tools / K. Heckmann, Q. Saifi // Kerntechnik. – 2016. – Vol. 81, No. 5. – P. 484–497.
5. Luo W. Fishnet statistics for probabilistic strength and scaling of nacreous imbricated lamellar materials / W. Luo, Z. Bazant // J. Mech. Phys. Solids. – 2017. – Vol. 109. – P. 264–287.
6. Zhang T. Failure probability analysis and design comparison of multi-layered sic-based fuel cladding in PWRs / T. Zhang, R. Yue, X. Wang, Z. Hao // Nucl. Eng. Des. – 2018. – Vol. 330. – P. 463–479.
7. Квіт Р.І. Стохастичне моделювання руйнування крихких матеріалів / Р.І. Квіт // Вісник НУ “Львівська політехніка”: Фіз.-мат. науки. – 2009. – №660. – С. 61–67.

8. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К.: Наукова думка, 1968. – 246 с.
9. Витвицкий П.М. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел / П.М. Витвицкий, С.Ю. Попина. – К.: Наукова думка, 1980. – 186 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.11.2018 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Кузьом І.В.,
д.ф.-м.н., професором Сулимом Г.Т.*

**CONSTRUCTION OF THE STRENGTH STATISTICAL
CRITERIA WITH CONSIDERATION OF SOME BRITTLE
MATERIALS FAILURE
DETERMINISTIC ASPECTS FEATURES**

R. I. Kvit

*Lviv Polytechnic National University;
79013, Lviv, Stepan Bandera St., 12; e-mail: kvit_rom@ukr.net*

The model of a stochastically defective plate from an isotropic material under conditions of comprehensive tension-compression is considered. Defect-cracks are characterized by two statistically independent geometric parameters, whose laws of probabilistic distribution are given. Based on the deterministic failure criteria, which takes into account the initial direction of the crack propagation, the statistical diagrams equations of the plate strength are written in the fracture loading mean values. Such diagrams are constructed for plates with different defect structure and different structure materials inhomogeneity. The effect of taking into account the initial direction of the crack propagation on the obtained limiting state curves is investigated.

Key words: *isotropic material, plate, crack, distribution function, strength criteria.*