УДК 517.944
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51

ОПТИМІЗАЦІЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В МЕТОДАХ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

А. І. Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

У теорії систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку основними є питання розв'язності задачі Коші і обґрунтування наближених методів. Це обумовлено задачами в газовій динаміці і гідромеханіці. У другій половині попереднього століття було здійснено спроби побудувати коректну теорію розв'язності задач для систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку. З цим пов'язана необхідність правильного способу введення поняття узагальненого розв'язку задачі Коші.

У даній роботі виділено клас систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку, для яких введено поняття узагальненого розв'язку. Запропоновано спосіб конструювання наближених методів розв'язування задачі Коші. Отримано оцінки швидкості збіжності в наближених методах та доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для системи квазілінійних рівнянь першого порядку певного вигляду.

Ключові слова: *системи квазілінійних рівнянь, узагальнений розв'язок, наближений метод.*

1. Розглянемо задачу Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$u_t^j + \varphi^j\left(u^j\right)_x + \psi^j\left(u^1,...,u^N\right) = 0,\ j = 1,...,N, \tag{1}$$

$$u^j\Big|_{t=0} = u_0^j(x),\ j = 1,...,N, \tag{2}$$

де

$$u = (u^1,...,u^N), u = u(t,x), \varphi^j(v) \in C^{2,a}, \left|\frac{d\varphi^j}{dv}\right| \le K_1,$$

$$\psi^j(u^1,...,u^N) \in C^{1,a},\ u_0^j(x) \in L_\infty(R),\ j = 1,...,N.$$

Далі, нехай задані функції $\zeta_j(v) \in C^1(R), j = 1,...,N,$ для яких виконуються нерівності $\zeta_j(v) > 0, \dfrac{d\zeta_j(v)}{dv} v \geq 0,$ і $\zeta_j(v) \to +\infty$ при $|v| \to +\infty.$

І також нехай при $C = const > 0$ справджується нерівність

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{d\zeta_j(u^j)}{du^j} \psi^j(u^1,...,u^N) \leq C \sum_{j=1}^{N} \zeta_j(u^j). \tag{3}$$

Означення 1. *Обмежена вимірна вектор-функція* $u(t,x)$ *називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо*

$\forall k \in R^1 \; \forall f(t,x) \in C^{0,\infty}((0,T] \times R^1), f(t,x) \geq 0$ *при кожному* $j = 1,...,N$ *виконуються нерівності*

$$L_j(u,k,f) = -\int\int_{0-\infty}^{T+\infty} \begin{Bmatrix} |u^j - k| f_t + sign(u^j - k)\left(\varphi^j(u^j) - \varphi^j(k)\right) f_x - \\ sign(u^j - k)\psi^j(u^1,...,u^N) f \end{Bmatrix} dxdt \leq 0, \tag{4}$$

а початкові умови (2) приймаються у сильному сенсі.

2. Зауважимо, що результати існування та єдиності розв'язку задачі (1),(2) у випадку N=1 були отримані починаючи з 1950-х років в працях Олійник О. А., Кружкова С. М. та Lax P. Водночас викликає інтерес питання отримання розв'язків з допомогою конструктивних методів побудови наближених розв'язків. У працях [1],[2],[3] було розглянуто як конкретні методи, так і загальний підхід, який дозволяє обґрунтовувати збіжність разом з отриманням оцінок швидкості в наближених методах. У праці [4] розглянуто наближений метод з використанням методу в'язкості та методу згладжування. У даній роботі ми узагальнюємо цей підхід і розглядаємо апроксимації задачі (1), (2), які будуються на основі одночасного застосування довільних наближених методів.

3. Наближений метод довільній обмеженій вектор-функції $u_0(x)$ і скалярному параметру $\varepsilon > 0$ ставить у відповідність сім'ю функцій $\{u^\varepsilon(t,x)\}.$

При цьому якщо $var\left(u_0(x)\right) < +\infty$, то

$$L_j(u^\varepsilon, k, f) \leq \varepsilon \|\nabla f\|_C \underset{supp\, f}{var} u^\varepsilon(t,x). \tag{5}$$

Ми вважатимемо також, що наближений метод стійкий за початковими даними, і для функцій $u^\varepsilon(t,x)$ стійкими в $L_{1,loc}(R)$ є модулі неперервності $\lambda(h)$ за змінною x і $v_t(\tau) -$ за змінною t.

Нехай $\tau > 0$ і при $i \in N_0 : i(\text{mod}\,2) = 0$, $\tau \in [i\tau,(i+1)\tau)$ $u^\varepsilon(t,x)$ – наближений розв'язок за методом A задачі Коші (1), (2).

Далі, нехай при $i \in N_0 : i(\text{mod}2) = 1$, $\tau \in [i\tau,(i+1)\tau)$ $u^\varepsilon(t,x)$ наближений розв'язок за методом B задачі Коші (1), (2).

Отримано оцінки збіжності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку задачі (1),(2) у наступному сенсі.

Означення 2. *При* $\varepsilon > 0$ *функція* $u^{\varepsilon}(t,x)$, *яка на різних смугах є почерговим наближеним розв'язком за методом* A *і за методом* B, *називається* $AB-$*наближеним розв'язком задачі (1),(2).*

Теорема 1. *Нехай* $var(u_0(x)) < +\infty$. *Тоді для* $AB-$*наближеного розв'язку* $u^{\varepsilon}(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$ *справджується оцінка*

$$\left\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{\delta}, \tag{6}$$

де $\delta \in (0,1)$ *залежить від швидкості збіжності в наближених методах* A *і* B.

Доведення. Нехай $\chi(K_{r,T})$ – характеристична функція зрізаного конуса $K_{r,T} = \{(t,x) \big| (K_1 t + r)^2 \ge |x|^2, 0 < t < T\}$, а $\chi(K_{r,T})^h$ – її усереднення з параметром h. З врахуванням оцінки (5) при $f(t,x) = \chi(K_{r,T})^h$ отримуємо $\int\int_{0-\infty}^{T+\infty} L_j(u^{\varepsilon_1}, u^{\varepsilon_2}, f) dy d\tau \le (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/hC(T) \underset{supp f}{var}\, u^{\varepsilon}(t,x)$, а далі після оптимізації за параметром h отримуємо оцінку (6).

Теорема 2. *Нехай* $\varepsilon = 0(\tau)$. *Тоді для* $AB-$ *наближеного розв'язку* $u^{\varepsilon}(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$ *справджується оцінка*

$$\left\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \mu\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big), \tag{7}$$

де функція $\mu(\sigma) \to 0, \sigma \to 0$ *залежить від модуля неперервності* $\lambda(\sigma)$ *в* $L_{1,loc}(R)$ *початкової функції* $u_0(x)$ *та від модуля неперервності* $v_t(\tau)$ *за змінною* t, *що визначається наближеними методах* A *і* B

Доведення. Нехай $(u_0(x))^h$ – середні функції для початкової вектор-функцій $u_0(x)$. Використовуючи оцінку (5) для сім'ї функцій $\{u^{\varepsilon,h}(t,x)\}$, що будуються за $AB-$наближеним методом, і стійкість за початковими даними, маємо

$$\left\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \left\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} +$$
$$+ \left\|u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot) - u^{\varepsilon 2,h}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} + \left\|u^{\varepsilon 2}(t,\cdot) - u^{\varepsilon 2,h}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)}$$

Враховуємо стійкість наближених методів:

$$\left\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \left\|u_0(x) - (u_0(x))^h\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \lambda(h)$$
$$\left\|u^{\varepsilon_2}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot)\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \left\|u_0(x) - (u_0(x))^h\right\|_{L_{1,loc}(R)} \le \lambda(h),$$

а також оцінки (5) та (6)

$$\left\| u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc(R)}} \le (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{C\lambda(h)}{h},$$

і після оптимізації за параметром h отримуємо оцінку (7).

З теорем 1,2 випливають такі твердження.

Теорема 3. *Нехай* $var(u_0(x)) < +\infty$ *і* $var(v_0(x)) < +\infty$. *Тоді для* $AB-$*наближених розв'язків* $u^{\varepsilon}(t,x)$ *і* $v^{\varepsilon}(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$ *і таких, що відповідають початковим функціям* $u_0(x)$ *та* $v_0(x)$ *справджується оцінка* $\left\| u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - v^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc(R)}} \le \left\| u_0(\cdot) - v_0(\cdot) \right\|_{L_{1,loc(R)}} + C((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{\delta}$,

де $\delta \in (0,1)$ *залежить від швидкості збіжності в наближених методах* A *і* B

Теорема 4. *Нехай* $\varepsilon = 0(\tau)$. *Тоді для* $AB-$*наближених розв'язків* $u^{\varepsilon}(t,x)$ *і* $v^{\varepsilon}(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$, *і таких, що відповідають початковим функціям* $u_0(x)$ *та* $v_0(x)$ *справджується оцінка*

$$\left\| u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - v^{\varepsilon_2}(t,\cdot) \right\|_{L_{1,loc(R)}} \le \left\| u_0(\cdot) - v_0(\cdot) \right\|_{L_{1,loc(R)}} + \mu((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \qquad (8)$$

де функція $\mu(\sigma) \to 0, \sigma \to 0$ *залежить від сумісного модуля неперервності* $\lambda(\sigma)$ *в* $L_{1,loc}(R)$ *початкових функції* $u_0(x)$ *і* $v_0(x)$ *та від швидкості збіжності в наближених методах* A *і* B.

Зауважимо, що варіація розмірів смуг, на яких почергово застосовуються наближений метод A та наближений метод B , дозволяє оптимізувати швидкість збіжності наближених розв'язків до точного.

Зрозуміло, що із теорем 1-4 незалежно можна отримати існування та, що надзвичайно важливо, єдиність узагальненого розв'язку задачі (1),(2).

Теорема 5. Узагальнений розв'язок задачі (1),(2) існує і єдиний.

Доведення. Будуючи наближений розв'язок за методом в'язкості, в граничному переході отримаємо узагальнений розв'язок задачі (1),(2). А єдиність узагальненого розв'язку задачі випливає з оцінки (8).

Література

1. Казмерчук А.И. О сходимости приближённых решений задачи для квазилинейных уравнений первого порядка/ // Вестник МГУ. – Сер. матем. механ., – 1989. – Вып. 4, с. 68-70.
2. Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі/ // Вісник національного університету "Львівська політехніка", Прикладна математика. – 2000. – №411. – с. 147-151.
3. Казмерчук А.І. Наближення параболічними системами рівнянь вищих порядків систем квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку/ // "Veda a vznik – 2016".–

D. 10. – S. 95-97. Розміщена: Проблемы научной мысли. – Т. 12 – №10– 2016 – с. 095-097.

4. Казмерчук А.І. В'язкісно-згладжувальний метод розв'язання задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку, – "Veda a vznik – 2016". – D.10. – S. 98-100. Розміщена: Проблемы научной мысли. – Т. 12 – №10 – 2016 – с. 098-100.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Шариним С.В.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Гоєм Т.П.***

CONVERGENCE SPEED OPTIMIZATION IN METHODS OF APPROXIMATE SOLVING OF INITIAL VALUES PROBLEM FOR THE SYSTEM OF QUASILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

A. I. Kazmerchuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

In the theory of systems of quasilinear partial differential equations of the first order, the main questions are the solvability of initial values problem and justification of the approximate methods. This is due to problems in gas dynamics and hydromechanics. In the second half of the previous century attempts were made to construct a correct theory of solvability of problems or the systems of quasilinear partial differential equations of the first order. The necessity of the correct way of introductions the nothions of a generalized solution of initial values problems is connected with this.

In this paper a class of systems of quasilinear partial differential equations of the first order is singled out for which the concept of a generalized solution is introduced. A method for constructing approximate methods for solving initial values problem is proposed. We obtained estimates of the convergence speed in approximate methods and proved the existence and uniqueness of the solution of initial values problem for systems of quasilinear partial differential equations of the first order of a certain form.

Key words: *systems of quasilinear equations, generalized solution, approximate method.*