УДК 517.956.4
DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-44-57

ФУНКЦІЯ ГРІНА ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

І. В. Буртняк, Г. П. Малицька
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ;
e-mail: ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

У статті розглянуто новий клас рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією. Цей клас рівнянь має три групи змінних за якими є виродження параболічності, крім того при похідних нижчого порядку коефіцієнти спеціальним чином зростають, лише в початку координат рівняння стає рівнянням теплопровідності. Побудовано, зокрема, функцію Гріна для лінійного виродженого параболічного рівняння типу дифузії з інерцією, коефіцієнти якого в параболічній частині залежать від параметрів. Розглянуто об'ємний потенціал від згортки функції Гріна з абсолютно інтегровною функцією, що задовольняє умову Гельдера. Доведено, що всі похідні існують при умові гельдеровості функції, хоча в оцінках по t *і вироджених змінних порядку* $t^{-3/2}, t^{-5/2}, t^{-7/2}$ *встановлено існування всіх похідних, що входять у рівняння. Доведено оцінки всіх похідних. Коефіцієнти рівняння неперервні, обмежені в смузі* $0 \leq t_0 < t \leq T, x \in R^{4n}, n \in N$ *та задовольняють умову Гельдера з показником* $0 < \alpha \leq 1$. *Методом Леві побудовано функцію Гріна для рівняння із змінними коефіцієнтами в невиродженій параболічній частині рівняння. Доведено існування та неперервність всіх похідних, що входять у рівняння. Встановлено оцінки похідних фундаментального розв'язку та їхню гельдеровість по всіх змінних.*

Ключові слова: *функція Гріна, фундаментальний розв'язок, рівняння Колмогорова, метод Леві, вироджені параболічні рівняння, дифузійні процеси.*

В цій роботі ми будуємо функцію Гріна (фундаментальний розв'язок) вироджених лінійних параболічних рівнянь другого порядку з трьома групами виродження параболічності. Такі рівняння описують дифузійні системи з $4n$ ступенями вільності.

Ми використовуємо явний вигляд фундаментального розв'язку (параметрикс) рівняння з параметрами і застосовуємо до нього метод Леві Е.Е., ця робота є узагальненням праці [1], в ній є одна n-вимірна група змінних виродження, що відповідає системі дифузійних процесів з $2n$ ступенями вільності.

Ця проблема для рівнянь з однією групою змінних виродження параболічності розв'язана в роботі [9] з двома групами змінних [2], [3]. Зацікавленість такими рівняннями викликана їхнім використанням в економічній теорії, зокрема в теорії опціонів та широке застосування при дослідженні процесів ціноутворення деривативів. Аналітичні формули, що відображають функцію Гріна, узгоджені з емпіричними даними і при практичному застосуванні адекватно відображають проходження процесів на фондових ринках. Таке подання дозволяє розрахувати ринкову вартість портфелю акцій, оцінити внутрішню волатильність на ринку в будь-який час, а також проаналізувати динаміку фондового ринку [8], [9].

Позначення $n \in N$, $x \in R^{4n}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_j \in R^n$, $j = \overline{1,4}$, $\xi \in R^{4n}$, $\xi_j \in R^n$, $j = \overline{1,4}$, $0 < \tau < t \le T < +\infty$, $\bar{x} := (x_1, x_2)$, $\bar{\bar{x}} := (x_1 x_2 x_3)$.

$$\rho_{1k}(x_1, t; \xi_1, \tau) := 2^{-1}(x_{1k} - \xi_{1k})(t-\tau)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\rho_{2k}(\bar{x}, t; \bar{\xi}, \tau) := \sqrt{3}(x_{2k} - \xi_{2k} + 2^{-1}(x_{1k} + \xi_{1k})(t-\tau))(t-\tau)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\rho_{3k}(\bar{\bar{x}}, t; \bar{\bar{\xi}}, \tau) := 6\sqrt{5}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}(x_{3k} - \xi_{3k} + 2^{-1}(x_{2k} + \xi_{2k})(t-\tau) +$$
+(x1k−ξ1k)t−τ212−1,

$$\rho_{4k}(x, t; \xi, \tau) := 60\sqrt{7}(t-\tau)^{-\frac{7}{2}}(x_{4k} - \xi_{4k} + 2^{-1}(x_{3k} + \xi_{3k})(t-\tau) +$$
+10−1(x2k−ξ2k)t−τ2+(x1k+ξ1k)t−τ3120−1,

$$\rho_k^2(x, t; \xi, \tau) = \rho_{1k}^2(x_1, t; \xi_1, \tau) + \rho_{2k}^2(\bar{x}, t; \bar{\xi}, \tau) + \rho_{3k}^2(\bar{\bar{x}}, t; \bar{\bar{\xi}}, \tau) + +\rho_{4k}^2(x, t; \xi, \tau), \qquad k = \overline{1, n}.$$

$$r_1(t-\tau; x_1, \xi_1) = (x_1 - \xi_1)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}, r_2(t-\tau; \bar{x}, \xi_2) = (x_2 - \xi_2 +$$
+x1t−τ)t−τ−32,

$$r_3(t-\tau; \bar{\bar{x}}, \xi_3) = (x_3 - \xi_3 + x_2(t-\tau) + x_1(t-\tau)^2 2^{-1})(t-\tau)^{-\frac{5}{2}},$$
$$r_4(t-\tau; x, \xi_4) = (x_4 - \xi_4 + x_3(t-\tau) + x_2(t-\tau)^2 2^{-1} + +x_1(t-\tau)^3 (3!)^{-1})(t-\tau)^{-\frac{7}{2}}.$$

Нехай

$$w^{y,\beta}(x, t; \xi, \tau) = \sum_{l,j=1}^{n} a^{lj}(y, \beta)(\rho_{1j}(x_1, t; \xi_1, \tau)\rho_{1l}(x_1, t; \xi_1, \tau) + +\rho_{2j}(\bar{x}, t; \bar{\xi}, \tau)\rho_{2l}(\bar{x}, t; \bar{\xi}, \tau) + \rho_{3j}(\bar{\bar{x}}, t; \bar{\bar{\xi}}, \tau)\rho_{3l}(\bar{\bar{x}}, t; \bar{\bar{\xi}}, \tau) + +\rho_{4j}(x, t; \xi, \tau)\rho_{4l}(x, t; \xi, \tau)),$$

де $(a^{lj})_{l,j=1}^{n}$ – обернена матриця до матриці $(a_{lj})_{l,j=1}^{n}$, $a_{lj} = a_{jl}$, $y \in R^{4n}, \beta \in [\tau, T]$, (y, β) – фіксована точка

Розглянемо рівняння

$$Lu(x, t) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x, t)\, \partial^2_{x_{1k} x_{1l}} u(x, t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)\partial_{x_{1k}} u(x,t) + a(x,t)u(x,t) +$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}}\, u(x,t) - \partial_t u(x,t) = 0, \qquad (1)$$

де $\left(a_{kl}(x,t)\right)_{k,l=1}^{n}$ додатно визначена матриця в смузі $\Pi_{[0,T]} = \{(x,t), x \in R^{4n}, t \in [0,T]\}$.

Ми припускаємо, що

a_1) існують додатні сталі$v_0 > 0, v_1 > 0$, такі що для будь-якого дійсного $\xi_1 \in R^n$

$$v_0|\xi_1|^2 = \sum_{l,j=1}^{n} a_{lj}(x,t)\,\xi_{1l}\xi_{1j} \le v_1|\xi_1|^2, \qquad (2)$$

$v_0|\xi|^2 = \sum_{l,j=1}^{n} a^{lj}(x,t)\,\xi_{1l}\xi_{1j} \le v_1|\xi_1|^2$, для всіх $(x,t) \in \Pi_{[0,T]}$, де $a^{lj}(x,t)$ – елементи оберненої матриці до $\left(a_{lj}(x,t)\right)_{l,j=1}^{n}$

a_2) коефіцієнти $a_{lj}(x,t), a_l(x,t), a(x,t)$ неперервні і обмежені в $\Pi_{[0,T]}$.

a_3) для будь-яких двох точок $(x,t) \in \Pi_{[0,T]}, (x_0,t_0) \in \Pi_{[0,T]}$ існує стала $A > 0$, яка не залежить від (x,t) i $0 < \alpha \le 1$, що

$$\left|a_{lj}(x,t) - a_{lj}(x_0,t_0)\right| \le A\left(|x-x_0|^{\alpha} + |\,t-t_0|^{\frac{\alpha}{2}}\right);$$
$$|a_l(x,t) - a_l(x_0,t)| \le A|x-x_0|^{\alpha};$$
$$|a(x,t) - a(x_0,t)| \le A|x-x_0|^{\alpha}.$$

Позначимо при $t > \tau$

$$G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = \Phi(\xi,\tau)(t-\tau)^{-8n}\exp\left\{-\mathrm{w}^{y,\beta}(x,t;\xi,\tau)\right\},$$
$$G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = 0, \quad t \le \tau,$$

де

$$\Phi(x,t) = \left(\pi^{-2}180\sqrt{105}\right)^{n} / (\det(a^{lj}(t,x)))^{-2}\,. \qquad (3)$$

Основний результат.

Теорема 1.

Якщо $f(x,t)$ задовольняє рівномірну умову Гельдера по x з показником $\alpha, 0 < \alpha \le 1$ в $\Pi_{[0,T]}$ абсолютно інтегровна в $\Pi_{[0,T]}$, тоді об'ємний потенціал

$$V(x,t) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, f(\xi,\beta)d\xi \qquad (4)$$

має неперервні похідні $\partial_t V(x,t)$, $\partial_{x_{jk}} V(x,t), \partial^2_{x_{1k}x_{1l}} V(x,t), j = \overline{1,4}$, $k = \overline{1,4}$ і правильні формули

$$\partial_t V(x,t) = f(x,t) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_t G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,[f(\xi,\beta) - f(x,\beta)]d\xi +$$

$$+\int_{\tau}^{t} f(x,\beta)d\beta \int_{R^{4n}} \partial_t G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,d\xi, \quad (5)$$

$$\partial_{x_{1k}} V(x,t) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{1k}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, f(\xi,\beta)d\xi, k=\overline{1,n}. \quad (6)$$

$$\partial_{x_{jk}} V(x,t) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{jk}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,[f(\xi,\beta)-f(x,\beta)]d\xi +$$

$$+\int_{\tau}^{t} f(x,\beta)d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{jk}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,d\xi, \quad (7)$$

$$\partial^2_{x_{1k}x_{1l}} V(x,t) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \partial^2_{x_{1k}x_{1l}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,[f(\xi,\beta)-f(x,\beta)]d\xi +$$

$$+\int_{\tau}^{t} f(x,\beta)d\beta \int_{R^{4n}} \partial^2_{x_{1k}x_{1l}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\,d\xi. \quad (8)$$

Теорема 2. Якщо виконуються умови: $a_1)-a_3)$ то рівняння (1) має фундаментальний розв'язок $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$.

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)+$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\gamma,\beta,\gamma,\beta)\,\varphi(\gamma,t;\xi,\tau)d\gamma, \quad (9)$$

де $\varphi(x,t;\xi,\tau)$ – шукана функція така, що $L\Gamma(x,t;\xi,\tau)\equiv 0,\ t>\tau$.

I. Об'ємний потенціал функції $f(x,t)$ відносно параметрикса $G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)$.

Розглянемо задачу Коші

$$L_0 u(x,t) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(y,\beta)\,\partial^2_{x_{1k}x_{1l}} u(x,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}}\, u(x,t) - \partial_t u(x,t) = 0,$$

$(x,t)\in \Pi_{[0,T]}$, (y,β) – фіксована точка, параметр $(y,\beta)\in\Pi_{[0,T]}$.

$$u(x,t)|_{\ t=\tau} = u_0(x), \quad 0\le\tau<t\le T<+\infty.$$

Використовуючи перетворення Фур'є і [4], знайдемо фундаментальний розв'язок задачі Коші для L_0 при $t<\tau$, довизначимо його 0, одержимо $G_0(x,t;\xi,\tau,y,\beta)$ і, підставивши $(y,\beta)=(\xi,\tau)$, одержимо формулу (3)

$$G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = \Phi(\xi,\tau)(t-\tau)^{-8n}\exp\{-\mathrm{w}^{y,\beta}(x,t;\xi,\tau)\} \text{ при } t>\tau,$$

$$G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = 0 \text{ при } t<\tau.$$

Для $G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)$ та її похідних правильні оцінки:

$$|\partial_t^m \partial_x^s G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)| \le C_{ms}(t-\tau)^{-8n-\frac{7m}{2}-\sum_{j=1}^{4}\frac{(2j-1)|s_j|}{2}} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{4}(t-\tau)^{(4-j)m}|x_j|^m \exp\{-c_0\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \qquad (10)$$

$$s=\sum_{j=1}^{4}|s_j|,\ \ s_j=(s_{ji},\dots,s_{jn}),\ \ s_{jk}\in N\cup\{0\},\ \ m\in N\cup\{0\}, \qquad k=\overline{1,n}.$$

$$|\partial_t^m \partial_r^s G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)-\partial_t^m \partial_x^s G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-8n-\frac{7m}{2}-\sum_{j=1}^{4}\frac{(2j-1)|s_j|}{2}}|\xi-\xi'|\sum_{j=1}^{4}(t-\tau)^{(4-j)m}|x_j|^m \times$$
$$\times \exp\{-c_0\rho^2(x,t;\xi,\tau)\},\ \ t>\tau. \qquad (11)$$

Оскільки $r^2(t-\tau;x,\xi)=\rho^2(x,t;\xi,\tau)$, то в (10), (11) можна замінити ρ^2 на r^2.

З оцінок (10) випливає, що $\partial_t G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)$, $\partial_{x_{jk}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)$, $j=\overline{2,n}$, $k=\overline{1,n}$, мають неінтегровну особливість при $t=\tau$. Розглянемо границю відношення: $(t-\tau)^{-2}\exp\{-c_0\gamma^2(t-\tau)^{-2}\}$ і $(t-\tau)^{-p}\exp\{-c_0\gamma^2(t-\tau)^{-p}\}, p=3,5,7$, $\gamma^2>0$ при $t\to\tau$. Границя рівна нулю, тому при $0<t-\tau<\frac{1}{2}$

$$(t-\tau)^{-p}\exp\{-c_0\gamma^2(t-\tau)^{-p}\} \le$$
$$\le (t-\tau)^{-2}\exp\{-c_0\gamma^2(t-\tau)^{-2}\}. \qquad (12)$$

З (12) випливає, що для збіжності повторних інтегралів від похідних $\partial_t G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)$, $\partial_{x_{jk}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)$, $j=\overline{2,n}$, $k=\overline{1,n}$, досить умов теореми 1.

Зокрема при $j=4$, візьмемо $h>0$

$$\partial_{x_{4k}} V_h(x,t) := \int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, f(\xi,\beta)d\xi =$$
$$= \int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)[f(\xi,\beta)-f(x,\beta)]\, d\xi +$$
$$+\int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, d\xi\, f(x,\beta) = I_1+I_2. \qquad (13)$$

Оскільки

$$\left|\partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)-\partial_{x_{1k}} G_0(x,t;\xi,\tau,y,\tau)\right|_{\ y=x}\Big| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-8n-\frac{7}{2}}|\xi-x|^{\alpha}\exp\{-c_0\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \qquad (14)$$

то, використавши формулу Гаусса-Остроградського, маємо

$$\int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau,y,\tau)|_{\ y=x} d\xi = -\int_{R^{4n}} \partial_{\xi_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau,x,\tau)d\xi = 0. \qquad (15)$$

Із (10), (12), (14), (15) маємо

$$|I_2| \le CM \int_{\tau}^{t-h} (t-\beta)^{-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} d\beta \le C\left(h^{\frac{\alpha}{2}} + (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right). \qquad (16)$$

Аналогічно із (10) одержимо

$$|I_1| \le \int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} (t-\beta)^{-8n-\frac{7}{2}} (t-\beta)^{-7+\frac{\alpha}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-c \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{jl}^2 \,(t-\beta)^{-(2j-1)}\right\} d\gamma.$$

Якщо $(t-\tau) \le \frac{1}{2}$, то зразу використаємо (12), якщо $(t-\tau) > \frac{1}{2}$ розіб'ємо на два інтеграли $\int_{\tau_1}^{t-h}$ і $\int_{\tau}^{\tau_1}$, де $(t-h-\tau_1) < \frac{1}{2}$, інтеграл

$$\left|\int_{\tau}^{\tau_1} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{1k}} G_0 \,[f(\xi,\beta) - f(x,\beta)]\right| \le C^*.$$

Отже,

$$|I_1| \le C \int_{t_1}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} (t-\tau)^{-8n+\frac{7}{2}} (t-\beta)^{-2+\frac{\alpha}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-c_0^* \sum_{j=1}^{4} \sum_{k\ne l}^{n} \gamma_{jl}^2 \,(t-\beta)^{-(2j-1)} - c_0^* \gamma_{4k}^2 (t-\beta)^{-2}\right\} d\gamma +$$
$$+C^* \le c_1 h^{\frac{\alpha}{2}} + C^*, 0 < c_0^* < c_0. \qquad (17)$$

Із (16), (17) випливає існування $\lim_{h\to 0} \partial_{x_{4k}} V_h(x,t)$. Покажемо рівність границі виразу (7) при j=4, тобто I.

$$I = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\beta;\xi,\beta)[f(\xi,\beta) - f(x,\beta)] d\xi +$$
$$+ \int_{\tau}^{t} \left(\int_{R^{4n}} \partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\beta;\xi,\beta) d\xi\right) f(x,\beta) d\beta.$$

Розглянемо різницю $I - \partial_{x_{4k}} V_h(x,t)$ і оцінимо її

$$\left|I - \partial_{x_{4k}} V_h(x,t)\right| \le C \int_{t-h}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} (t-\beta)^{-8n+\frac{7}{2}} (t-\beta)^{-2+\frac{\alpha}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-c_0^* \sum_{l\ne k}^{n} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{jl}^2 \,(t-\beta)^{-(2j-1)} - c_0^* \gamma_{4k}^2 (t-\tau)^{-2}\right\} d\gamma \le C h^{\frac{\alpha}{2}}. \qquad (18)$$

З (18) випливає формула (7) у випадку $j = 4$.

У випадку $j = 3,2$ доведення (7) проводиться аналогічно. При цьому використовуємо, що

$$\partial_{x_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\partial_{\xi_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau), \qquad (19)$$

$$\partial_{x_{3k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\partial_{\xi_{3k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -(t-\tau)\partial_{\xi_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau), \qquad (20)$$

$$\partial_{x_{2k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\partial_{\xi_{2k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -(t-\tau)\partial_{\xi_{3k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) + 0.9\, \partial_{\xi_{4k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,t). \qquad (21)$$

У випадку $j=1$

$$\left|\partial_{x_{1k}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau)\right| \le C(t-\tau)^{-8n+\frac{1}{2}} \exp\{-c_0\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, t > t, \\ k=\overline{1,n}.$$

Тому як і у випадку лінійних параболічних рівнянь встановлюємо існування і неперервність $\partial_{x_{,1k}} V(x,t)$.

$$\partial_{x_{1k}} V(x,t) = \int_{\tau}^{t} \int_{R^{4n}} \partial_{x_{1k}} G_0(x,t;\xi,\beta;\xi,\beta) f(\xi,\beta)\, d\xi d\beta.$$

Для встановлення формули (8) запишемо
$\partial^2_{x_{1i}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau)$ через похідні $\partial_{\xi_l} l=\overline{1{,}4}$. Зокрема

$$\partial_{x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\sum_{i=1}^{n} a^{(ij)}(-\rho_{1i} + 2^{-1}(t-\tau)\,\rho_{2i} + \\ +10^{-1}(t-\tau)^2\rho_{3i} + 120^{-1}(t-\tau)^3\rho_{4i})e^{-w^{(y,\beta)}(x,t,\xi,\tau)}\Phi(y,\beta)\Bigg|_{\substack{y=x,\\ \beta=\tau}};$$

$$\partial_{\xi_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\sum_{i=1}^{n} a^{(ij)}(\rho_{1i} + 2^{-1}(t-\tau)\,\rho_{2i} + \\ +10^{-1}(t-\tau)^2\rho_{3i} + 120^{-1}(t-\tau)^3\rho_{4i})e^{-w^{(y,\beta)}(x,t,\xi,\tau)}\Phi(y,\beta)\Bigg|_{\substack{y=x,\\ \beta=\tau}}.$$

Враховуючи (19)-(21), одержимо

$$\partial_{x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\partial_{\xi_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -2\sum_{i=1}^{n} a^{(ij)}(2^{-1}(t-\tau)\rho_{2i} + 120^{-1}(t-\tau)^3\rho_{4i})e^{-w^{(y,\beta)}(x,t,\xi,\tau)} = \\ =-\partial_{\xi_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - (t-\tau)\partial_{\xi_{2j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -2^{-1}(t-\tau)^2\partial_{\xi_{3j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -24^{-1}(t-\tau)^3\partial_{\xi_{4j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau)\,. \qquad (22)$$

Враховуючи (22), маємо

$$\partial^2_{x_{1l}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) = -\partial^2_{x_{1i}\xi_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -(t-\tau)\partial^2_{x_{1i}\xi_{2j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - 2^{-1}(t-\tau)^2\partial^2_{x_{1i}\xi_{3j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) - \\ -24^{-1}(t-\tau)^3\partial^2_{x_{1i}\xi_{4j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau)\,. \qquad (23)$$

Отже, маємо

$$\int_{R^{4n}} \left|\partial^2_{x_{1l}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;\xi,\tau) - \partial^2_{x_{1l}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau)\right| d\xi \le C\,(t-\tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}}. \quad (24)$$

Із (23) та теореми Гаусса-Остроградського випливає

$$\int_{R^{4n}} \partial^2_{x_{1l}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;x,\tau) d\xi = 0. \quad (25)$$

Оскільки

$$\left|\partial^2_{x_{1i}x_{1j}} G_0(x,t;\xi,\tau;\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]\right| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha}{2}} \exp\{-c_0\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \quad (26)$$

то із (24)–(26) випливає існування усіх інтегралів у формі (8) при $h \to 0$.

Доведемо (5). Оскільки

$$\partial_t G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}}\, G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) +$$
$$+\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}(\xi,\tau)\,\partial^2_{x_{1k}x_{1l}} G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau),$$

то звідси випливає існування

$$\lim_{h\to 0}\int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} \partial_t G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, d\beta f(x,\beta).$$

Формула (5) встановлюється аналогічно, як (6)-(8). При диферен-ціюванні $\int_{\tau}^{t-h} d\beta \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta) f(\xi,\beta) d\xi$ по верхній межі маємо

$$\int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,t-h,\xi,t-h) f(\xi,t-h) d\xi =$$
$$= \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,t-h,\xi,t-h) d\xi f(x,t-h) +$$
$$+\int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,t-h,\xi,t-h)[f(\xi,t-h)-f(x,t-h)] d\xi \to f(x,t),$$

рівномірно по t при фіксованому x. Зокрема перший доданок прямує до $f(x,t)$, другий доданок не перевищує $Ch^{\frac{\alpha}{2}}$, тому прямує до 0 при $h \to 0$. Як наслідок маємо $V(x,t)$ задовольняє рівняння

$$L_0 V(t,x) = f(x,t) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} L_0 G_0 [f(\xi,\beta) - f(x,\beta)]\, d\xi +$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} L_0 G_0(x,t;\xi,\beta,\xi,\beta)\, d\xi f(x,\beta) = f(x,t).$$

II. Метод Е.Е.Леві знаходження фундаментального розв’язку рівняння (1).

Шукаємо фундаментальний розв’язок$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$Е.Е. Леві у вигляді

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) +$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\lambda,\beta,\lambda,\beta)\, \varphi(\lambda,\beta;\xi,\tau) d\lambda = G_0 + U, \qquad (27)$$

де $\varphi(x,t;\xi,\tau)$ –шукана функція, яка апріорі при $t > \tau$ неперервна і задовольняє нерівності

$$|\varphi(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha}{2}} \exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \qquad (28)$$

$$\left|\Delta_{x_{ji}} \varphi(x,t;\xi,\tau)\right| = \left|\varphi(x,t;\xi,\tau) - \varphi(x',t;\xi,\tau)\right| \le$$

$$\le C\left|x-x'\right|^{\frac{\alpha_1}{2j-1}} (t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha_2}{2}} \times$$

$$\times \max\{\exp\{-c'\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \exp\{-c\rho^2(x',t;\xi,\tau)\}, \qquad (29)$$

$\alpha_1 < \alpha,\ \alpha_2 = \alpha - \alpha_1, x' = x + \Delta x_{ij}$. Із апріорних припущень неперервності φ та (28), (29) випливає, що для будь-якої неперервної і обмеженої функції $u_0(x)$, маємо

$$\lim_{t\to\tau} \int_{R^{4n}} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\, u_0(\xi) d\xi = \lim_{t\to\tau^+} \int_{R^{4n}} G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)\, u_0(\xi) d\xi,$$

а $\int_{R^{4n}} U\, u_0(\xi) d\xi$ має слабшу другорядну особливість, оскільки

$$|U(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-8n+\frac{\alpha_1}{7}} \exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}.$$

При належному виборі $\varphi(x,t;\xi,\tau)$ функція $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ задовольняє рівняння $L\Gamma(x,t;\xi,\tau) = 0$.

Обчислимо оцінку $LG_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = \mathrm{K}(x,t;\xi,\tau)$,

$$|\mathrm{K}(x,t;\xi,\tau)| = \left|\sum_{k,l=1}^{n} [a_{kl}(\xi,\tau) - a_{kl}(x,t)]\, \partial^2_{x_{1k}x_{1l}} G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) - \right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)\, \partial_{x_{1k}} G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) - a(x,t) G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau)\right| \le$$

$$\le A_1(t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha}{2}} \exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}. \qquad (30)$$

Розглянемо $LU(x,t;\xi,\tau)$.

$$LU(x,t;\xi,\tau) = \varphi(x,t;\xi,\tau) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\, \partial^2_{x_{1k}x_{1l}} + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}} - \partial t\Bigg)\times$$
$$\times\, G_0(x,t;\lambda,\beta,\lambda,\beta)[\varphi(\lambda,\beta;\xi,\tau)-\varphi(x,\beta;\xi,\tau)]d\lambda +$$
$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)\,\partial_{x_{1k}} + a(x,t)\right) G_0(x,t;\lambda,\beta,\lambda,\beta)\,\varphi(\lambda,\beta;\xi,\tau)d\lambda +$$
$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} \left[\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\,\partial^2_{x_{1k}x_{1l}} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}} - \partial_t\right]\times$$
$$\times\, G_0(x,t;\lambda,\beta,\lambda,\beta)\varphi(x,\beta;\xi,\tau)d\lambda.$$

Враховуючи оцінку (30) для $\varphi(x,t;\xi,\tau)$, тобто

$$L_0 G_0(x,t;\xi,\tau) = \left[\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(\xi,\tau)\,\partial^2_{x_{1k}x_{1l}} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{n} x_{j\mu}\,\partial_{x_{j+1\,\mu}} - \partial_t\right]\times$$
$$\times\, G_0(x,t;\xi,\tau,\xi,\tau) = 0,$$

одержимо інтегральне рівняння

$$\varphi(x,t;\xi,\tau) = -K(x,t;\xi,\tau) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} -K(x,t;\lambda,\beta)\,\varphi(\lambda,\beta;\xi,\tau)d\lambda. \quad (31)$$

Інтегральне рівняння (31) розв'яжемо методом послідовних наближень

$$\varphi(x,t;\xi,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,t;\xi,\tau), \quad (32)$$
$$K_1(x,t;\xi,\tau) = K(x,t;\xi,\tau),$$
$$K_m(x,t;\xi,\tau) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{R^{4n}} K(x,t;\lambda,\beta)\,K_{m-1}(\lambda,\beta;\xi,\tau)d\lambda.$$

Використавши (30), знайдемо оцінку $K_2(x,t;\xi,\tau)$.

$$|K_2(x,t;\xi,\tau)| \le A_1^2 \int_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{1-\frac{\alpha}{2}}}\times$$
$$\times \int_{R^{4n}} (t-\beta)^{-8n} \exp\{-c\rho^2(x,t;\lambda,\beta)\}\times$$
$$\times\,(\beta-\tau)^{-8n}\exp\{-c\rho^2(\lambda,\beta;\xi,\tau)\} = A_1^2 B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\pi}{c}\right)^{2n}(t-\tau)^{-8n-1+\alpha}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}, \quad (33)$$

де $B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)-$ бета-функція Ейлера. Оцінку наближення $K_3(x,t;\xi,\tau), K_4(x,t;\xi,\tau)$ і т.д. проведемо аналогічно. Методом математичної індукції доведемо, що для будь-якого m

$$|K_m(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{\Gamma^m\left(\frac{\alpha}{2}\right)A_1^m\left(\frac{\pi}{c}\right)^{2n(m-1)}(t-\tau)^{-8n-1+\frac{m\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}. \qquad (34)$$

Із оцінок (30), (34) при $t-\tau\ge\varepsilon>0$ випливає рівномірна і абсолютна збіжність ряду (32) і правильність оцінки (28).

Зупинимось на оцінці (29). При $(t-\tau)^{\frac{1}{2}}<\left|x_{ji}-x_{ji}^{'}\right|^{\frac{1}{2j-1}}$ нерівність (29) випливає із (28). Тому розглянемо випадок $\left|x_{ji}-x_{ji}^{'}\right|^{\frac{1}{2j-1}}\le(t-\tau)^{\frac{1}{2}}$. Спочатку оцінимо $\Delta_{x_{ji}}K(x,t;\xi,\tau)$. Отже,

$$\left|\Delta_{x_{ji}}K(x,t;\xi,\tau)\right| \le \left|\sum_{k,l=1}^{n}\left[\Delta_{x_{ji}}a_{kl}(x,t)\,\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\xi,\tau)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(a_{kl}(\xi,\tau)-a_{kl}(x^{'},t)\right)\Delta_{x_{ji}}\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\xi,\tau)\right]-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta_{x_{ji}}a_k(x,t)\,\partial_{x_{1k}}G_0(x,t;\xi,\tau)+a_k(x^{'},t)\Delta_{x_{j\,i}}\partial_{x_{1k}}G_0(x,t;\xi,\tau)\right)-$$
$$\left.-\Delta_{x_{ji}}a(x,t)G_0(x,t;\xi,\tau)-a(x^{'},t)\Delta_{x_{ji}}G_0(x,t;\xi,\tau)\right|.$$

Використавши оцінки (28), (30) оцінимо члени $\Delta_{x_{ji}}\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\xi,\tau)$, $\Delta_{x_{ji}}\partial_{x_{1k}}G_0(x,t;\xi,\tau)$, $\Delta_{x_{ji}}G_0(x,t;\xi,\tau)$ за допомогою теореми про середнє та нерівності $\left|\Delta x_{ij}\right|\le(t-\tau)^{\frac{2j-1}{2}}$ і $-1<\Theta\le1$.

$$-1+\left|\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le \left|\frac{(x_{1i}-\xi_{1i})}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Theta\Delta x_{ij}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le \left|\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|+1;$$

$$-1+\left|\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le \left|\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Theta\Delta x_{ij}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le$$
$$\le\left|\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|+1;$$

$$-1+\left|\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{12(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le$$
$$\le\left|\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{12(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Theta\Delta x_{ij}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right| \le$$

$$\leq \left|\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{12(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|+1;$$

$$-1+\left|\frac{x_{4i}-\xi_{4i}}{(t-\tau)^{\frac{7}{2}}}+\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{2(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{10(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{120(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|\leq$$

$$\leq \left|\frac{x_{4i}-\xi_{4i}}{(t-\tau)^{\frac{7}{2}}}+\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{2(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{10(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{120(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Theta\Delta x_{ij}}{2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|\leq$$

$$\leq \left|\frac{x_{4i}-\xi_{4i}}{(t-\tau)^{\frac{7}{2}}}+\frac{x_{3i}-\xi_{3i}}{2(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x_{2i}-\xi_{2i}}{10(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x_{1i}-\xi_{1i}}{120(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right|+1;$$

тому

$$\left|\Delta_{x_{ji}}K(x,t;\xi,\tau)\right|\leq \mathrm{C}\left|\Delta x_{ij}\right|^{\frac{\alpha_1}{2j-1}}(t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}. \quad (35)$$

За допомогою нерівностей (28), (35) оцінимо $\Delta_{x_{ji}}U(x,t;\xi,\tau)$. Отже,

$$\left|\Delta_{x_{ji}}U(x,t;\xi,\tau)\right|=\left|\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{R^{4n}}K(x,t;\gamma,\beta)\,\varphi(\gamma,\beta;\xi,\tau)d\gamma\right|\leq \mathrm{C}A_1\left|\Delta x_{ij}\right|^{\frac{\alpha_1}{2j-1}}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha_2}{2}}(\beta-\tau)^{1-\frac{\alpha_2}{2}}}\int_{R^{4n}}(t-\tau)^{-8n}[\exp\{-c\rho^2(x,t;\gamma,\beta)\}+$$

$$+\exp\{-c\rho^2(x',t;\gamma,\beta)\}]\exp\{-c\rho^2(\gamma,\beta;\xi,\tau)\}(\beta-\tau)^{-8n}d\gamma\leq$$

$$\leq \mathrm{C}_2\left|\Delta x_{ij}\right|^{\frac{\alpha_1}{2j-1}}(t-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}\exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}.$$

Оскільки оцінки (28), (29) доведено, то функція $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ при $t>\tau$ є розв'язком рівняння (1). Встановимо оцінки похідних $\Gamma(x,t;\gamma,\beta)$, для цього досить оцінити похідні $U(x,t;\xi,\tau)$. За теоремою 1 існують усі похідні, що входять в рівняння (1). Розбивши точкою $t_1=\frac{t-\tau}{2}$ інтеграл на два інтеграли розглянемо $\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}U(x,t;\xi,\tau)$. Таким чином,

$$\left|\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}U(x,t;\xi,\tau)\right|\leq\left|\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{R^{4n}}\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\gamma,\beta,\gamma,\beta)\times\right.$$

$$\times[\varphi(\gamma,\beta;\xi,\tau)-\varphi(x,\beta;\xi,\tau)]d\gamma+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{R^{4n}}\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\gamma,\beta,\gamma,\beta)\varphi(\gamma,\beta;\xi,\tau)\,d\gamma+$$

$$\left.+\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{R^{4n}}\partial^2_{x_{1k}x_{1l}}G_0(x,t;\gamma,\beta,\gamma,\beta)\,d\gamma\varphi(x,\beta;\xi,\tau)\right|\leq$$

$$\leq CC_2 \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)(\beta-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \int\limits_{R^{4n}} [\exp\{-c\rho^2(x,t;\gamma,\beta)\} -$$

$$-\exp\{-c\rho^2(\gamma,t;\xi,\tau)\}\,[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-8n}d\gamma +$$

$$+CC_2 \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{R^{4n}} \frac{|x-\gamma|^{\frac{\alpha_1}{7}}}{(t-\tau)^{8n+1}} [\exp\{-c\rho^2(x,t;\gamma,\beta)\} -$$

$$-\exp\{-c\rho^2(\gamma,t;\xi,\tau)\}]\,(\beta-\tau)^{-8n-1+\frac{\alpha}{2}}d\gamma + CC' \int\limits_{t_1}^{t} [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-1+\frac{\alpha}{7}} \times$$

$$\times \exp\{-c\rho^2(x,\beta;\xi,\tau)\}\,d\beta \leq \tilde{C}(t-\tau)^{-8n+\frac{\alpha}{2}-1}\exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\}.$$

Аналогічно встановлюються оцінки для $\partial_{x_{ij}} U(x,t;\xi,\tau)$, $\partial_t\ U(x,t;\xi,\tau)$. Тому для $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ та її похідних правильна оцінка

$$\left|\partial_t^m \partial_{x_j}^{m_j} \partial_{x_1}^{m_1} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\right| \leq$$

$$\leq C_m (t-\tau)^{-8n-\frac{(2j-1)}{2}(m_0+|m_j|)} \exp\{-c\rho^2(x,t;\xi,\tau)\},$$

$$m_0 + |m_j| \leq 2,\ \ |m_1| \leq 2, \qquad m_0 \leq 1, \qquad |m_j| \leq 1, \qquad j=\overline{2,4}.$$

Надалі доцільно побудувати фундаментальний розв’язок рівняння з довільною кількістю груп змінних, у якого коефіцієнти залежать від усіх змінних, за якими є виродження параболічності, що узагальнюють рівняння Колмогорова.

Література

1. Weber M. The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type. Trans. Amer. Math. Soc. 1951, 1 (71), 24-37
2. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P. A modified Levi method: development and application // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 1998. – № 5. – P. 14–19.
3. Malytska A., Burtnyak, I.V. On the Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Kolmogorov Systems of the Second Order. Ukrainian Mathematical Journal. Volume 70, Issue 8, 1 January 2019, 1275-1287. DOI: 10.1007/s11253-018-1568-y.
4. Eidelman S. D. Parabolic systems. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969. – 475 p.
5. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. – xiv+347 p.
6. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkh¨auser, 2004. – IX + 387 p.
7. Polidoro S. On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type // Le Mathematiche. – 1994. – 49. – P. 53–105.

8. Burtnyak, I.V. Malytska A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. Carpathian Math. Publ. 2018, 10 (2), 273–287. doi:10.15330/cmp.10.2.273-287.
9. Lorig M.J. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. Math. Finance 2014, 24 (2), 331–363.

Стаття надійшла до редакційної колегії 18.10.2022 р.

GREEN'S FUNCTION OF ONE CLASS OF SECOND-ORDER DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

I. V. Burtniak, A. P. Malytska
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str. 57, Ukraine;
e-mail: ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

The article considers a new class of equations that generalize diffusion equations with inertia, this class of equations has three groups of variables for which there is degeneracy of parabolicity, in addition, with derivatives of lower order, the coefficients increase in a special way, only at the origin of the coordinates the equation becomes a heat conduction equation. In particular, the Green's function was constructed for a linear degenerate parabolic equation of the diffusion type with inertia, the coefficients of which in the parabolic part depend on the parameters. The volume potential from the convolution of the Green's function with an absolutely integrable function that satisfies the Hölder condition is considered. It is proved that all derivatives exist under the condition that the function is Gelderian, although in estimates of t and degenerate variables of the order $t^{-3/2}, t^{-5/2}, t^{-7/2}$. *The existence of all derivatives included in the equation has been established. Estimates of all derivatives are proved. The coefficients of the equation are continuous, limited in the band* $0 \leq t_0 < t \leq T, x \in R^{4n}, n \in N$ *and satisfy the Hölder condition with the index* $0 < \alpha \leq 1$. *The Green's function for the equation with variable coefficients in the non-degenerate parabolic part of the equation is constructed by Levy's method. The existence and continuity of all derivatives included in the equation are proved. Estimates of the derivatives of the fundamental solution and their Gelderianity for all variables have been established.*

Keywords: *Green's function, fundamental solution, Kolmogorov's equation, Lévy's method, degenerate parabolic equations, diffusion processes.*