УДК 515.12
DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-65-74

КОМПАКТНІ УЛЬТРАПСЕВДОМЕТРИКИ ТА ЗВОРОТНІ СПЕКТРИ

О. Р. Никифорчин, К. М. Копорх, С. І. Никорович
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, Шевченка 57, Івано-Франківськ, Україна;
e-mail: oleh.nykyforchyn@pnu.edu.ua, kateryna.koporkh@pnu.edu.ua, sviatoslav.nykorovych@pnu.edu.ua

Запропоновано спосіб побудови за компактною ультрапсевдометрикою зворотного спектра зі скінченних компактів, індексованого додатними дійсними числами. Доведено, що гомеоморфності та природному передпорядку на сукупності компактних ультрапсевдометрик відповідають строгі ізоморфізми та строгі морфізми відповідних спектрів. Розглянуто властивості часткового порядку на множині, отриманій ототожненням ізоморфних спектрів.

Ключові слова: *компактний простір, ультраметрика, псевдометрика, зворотний спектр.*

Вступ

Ідея зображення чогось у вигляді параметризованої сім'ї є поширеною і плідною у математиці. Наприклад, нечіткі (fuzzy) множини та відношення природно зображати як параметризовані числами з проміжка $[0, 1]$ сім'ї чітких (crisp) множин та відношень [1]. Аналогічний підхід застосовано до означення і вивчення нечітких метрик [6, 7]. Перший автор досліджував відношення, параметризовані елементами топологічних граток [5]. У топології успішним виявився запропонований Федорчуком, Щепіним та іншими [2, 8] спектральний підхід, коли “великий” (наприклад, неметризовний) топологічний простір подається у вигляді границі зворотного спектра простіших (метризовних чи навіть скінченних) просторів.

У цій праці ми розглядаємо можливість подання ультрапсевдометрики через сім'ю визначених нею відношень еквівалентності. Відповідна сім'я теж є спеціальним випадком згаданого вище зворотного спектра (індексованого множиною $(0, +\infty)$ з відношенням $\geqslant$). Еквівалентність та порівняння ультрапсевдометрик теж виражаються у термінах морфізмів спектрів.

Ми не подаємо доведень тверджень (зокрема, з міркувань об'єму), але підготовча інформація і коментарі є достатніми, щоб читач заповнив цю прогалину самостійно.

1. Використані терміни, факти та позначення

Вважаємо відомими базові поняття з загальної топології [9], зокрема, поняття топології, метрики та псевдометрики, відкритої чи замкненої множини, неперервності, неперервності тощо. Позначаємо $B_\varepsilon(x)$ та $\bar{B}_\varepsilon(x)$ відповідно кулю та замкнену кулю радіуса $\varepsilon > 0$ з центром x у (псевдо)метричному просторі.

Нагадаємо, що ультрапсевдометрикою на множині X називаємо будь-яку функцію $d : X \times X \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

(1) $d(x, y) \geqslant 0$ для всіх $x, y \in X$;

(2) $d(x, x) = 0$ для всіх $x \in X$;

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$;

(4) $d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ для всіх $x, y, z \in X$.

Якщо додатково відомо, що d відокремлює точки, тобто виконано:

(5) $d(x, y) > 0$ для всіх $x, y \in X$, $x \neq y$,

то d називаємо ультраметрикою.

Пару (X, d) з множини та ультраметрики (ультрапсевдометрики) на ній називаємо ультраметричним (ультрапсевдометричним) простором.

(Псевдо)метрика d є ультра(псевдо)метрикою, якщо і тільки якщо для кожних куль $B_\delta(x)$ та $B_\varepsilon(y)$ щодо неї, де $\delta < \varepsilon$, або $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(y)$, або $B_\delta(x) \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing$.

Відомо, що ультра(псевдо)метричний простір (X, d) є компактним, тобто з кожного його покриття відкритими множинами можна обрати скінченне підпокриття, якщо і тільки якщо :

(1) для кожного $\varepsilon > 0$ простір X є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості куль радіуса ε;

(2) для кожної послідовності куль

$$B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset B_{\varepsilon_2}(x_2) \supset B_{\varepsilon_3}(x_3) \supset \dots, \qquad \varepsilon_n \searrow 0 \text{ при } n \to \infty,$$

перетин є непорожнім.

Тоді називаємо відповідну ультра(псевдо)метрику компактною.

2. Зображення ультрапсевдометрики сім'єю відношень еквівалентності

Неважко зауважити, що для компактної ультрапсевдометрики d на множині X та числа $\varepsilon > 0$ бінарне відношення $\sim_\varepsilon$, означене як

$$x \sim_\varepsilon y \iff d(x, y) < \varepsilon, \qquad x, y \in X,$$

є відношенням еквівалентності і розбиває X на скінченну кількість відкрито-замкнених класів еквівалентності – куль радіуса ε, які насправді є замкненими кулями деякого радіуса $\varepsilon' < \varepsilon$.

Твердження 2.1. *Нехай на множині X задано сім'ю відношень $(\sim_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Ця сім'я визначається (у вказаний вище спосіб) деякою компактною ультрапсевдометрикою на X, якщо і тільки якщо виконано умови:*

(1) кожне відношення $\sim_\varepsilon$ є відношенням еквівалентності зі скінченною кількістю класів еквівалентності;

(2) при $\delta \leqslant \varepsilon$ виконано $\sim_\delta \subset \sim_\varepsilon$ (монотонність);

(3) для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, для якого $\sim_\delta = \sim_\varepsilon$ (напівнеперервність зліва);

(4) існує $\varepsilon > 0$, для якого $\sim_\varepsilon = X \times X$ (з певного моменту є тільки один клас);

(5) для кожної спадної послідовності чисел $\varepsilon_n \searrow 0$, $n \to \infty$, та таких точок $x_n \in X$, що $x_m \sim_{\varepsilon_n} x_n$ для всіх $m \leqslant n$, існує така точка $x \in X$, що $x \sim_{\varepsilon_n} x_n$ для всіх n (компактність).

Позначимо X_ε скінченну фактор-множину $X/_{\sim_\varepsilon}$, і $p_\varepsilon : X \to X_\varepsilon$ відповідне фактор-відображення. Воно є неперервним, якщо топологія на X_ε – дискретна, оскільки прообрази точок є кулями.

Зрозуміло, що при $\delta \leqslant \varepsilon$ виконано $\sim_\delta \subset \sim_\varepsilon$, тому класи еквівалентності для $\sim_\varepsilon$ є об'єднаннями класів еквівалентності для $\sim_\delta$. Отже, маємо сюр'єктивне відображення фактор-множин $\pi_\varepsilon^\delta : X_\delta \to X_\varepsilon$, що склеює менші кулі у більші, причому за побудовою $\pi_\varepsilon^\delta \circ p_\delta = p_\varepsilon$, і для $\delta \leqslant \varepsilon \leqslant \theta$ виконано $\pi_\theta^\varepsilon \circ \pi_\varepsilon^\delta = \pi_\theta^\delta$.

Остання рівність означає, що скінченні множини X_ε, $\varepsilon > 0$, разом з відображеннями $\pi_\varepsilon^\delta : X_\delta \to X_\varepsilon$ для всіх $\delta \leqslant \varepsilon$ утворюють індексований лінійно впорядкованою множиною $\big((0, +\infty), \geqslant\big)$ зворотний спектр. Нагадаємо, що зворотним спектром [2, 8, 9] у категорії топологічних просторів називаємо трійку $\mathcal{S} = \big((X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, (\pi_\alpha^\beta)_{\alpha\preceq\beta}, \mathcal{A}\big)$, де

(1) відношення $\preceq$ частково впорядковує множину $\mathcal{A}$;

(2) для кожних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ існує таке $\gamma \in \mathcal{A}$, що $\alpha \preceq \gamma$, $\beta \preceq \gamma$, тобто множина $\mathcal{A}$ є напрямленою відношенням $\preceq$;

(3) кожен з X_α є топологічним простором;

(4) якщо $\alpha \preceq \beta$ у $\mathcal{A}$, то відображення $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ є неперервним;

(5) якщо $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$ у $\mathcal{A}$, то $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$.

Тоді простори X_α називаємо об'єктами спектра, а відображення $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ – його проекціями. Зрозуміло, що умови (1),(2) виконані, якщо $(\mathcal{A}, \preceq)$ – лінійно впорядкована множина.

Комутативним конусом з топологічного простору Y у спектр $\mathcal{S} = \big((X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, (\pi_\alpha^\beta)_{\alpha\preceq\beta}, \mathcal{A}\big)$ називаємо такий такого набір f неперервних відображень $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, що $\pi_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ для всіх $\alpha \preceq \beta$.

Границею спектра $\mathcal{S} = \big((X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, (\pi_\alpha^\beta)_{\alpha\preceq\beta}, \mathcal{A}\big)$ називаємо такий топологічний простір X_0 разом з набором π неперервних відображень $\pi_\alpha : X_0 \to X_\alpha$ (названих наскрізними проекціями) для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$, що:

(1) $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta = \pi_\alpha$ для всіх $\alpha \preceq \beta$;

(2) для кожного топологічного простору Y та такого набору f неперервних відображень $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, що $\pi_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ для всіх $\alpha \preceq \beta$, існує і єдине таке неперервне відображення $\bar{f} : Y \to X_0$, що $f_\alpha = \pi_\alpha \circ \bar{f}$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$.

Сам простір X_0 теж називається границею даного спектра. Коротко можна сказати, що границя спектра $\mathcal{S}$ – це такий комутативний конус у нього з деякого простору X_0, що кожен комутативний конус f з можна отримати у вигляді $\pi \circ \bar{f}$ (тобто скомпонувавши всі відображення з π з $\bar{f}$) для єдиного неперервного відображення $\bar{f} : Y \to X_0$.

З означення границі випливає, що кожна точка $x \in X_0$ однозначно визначається набором всіх значень $x_\alpha = \pi_\alpha(x) \in X_\alpha$. Цей набір є ниткою спектра, тобто таким елементом $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ добутку $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$, що $x_\alpha = \pi_\alpha^\beta(x_\beta)$ для всіх $\alpha \preceq \beta$. Більш того, кожен спектр $\mathcal{S} = \big((X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}, (\pi_\alpha^\beta)_{\alpha\preceq\beta}, \mathcal{A}\big)$ топологічних просторів має границю, яку можна отримати, наділивши множину всіх ниток

$$\tilde{X} = \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \;\Big|\; x_\alpha = \pi_\alpha^\beta(x_\beta) \text{ для всіх } \alpha \preceq \beta\Big\}$$

топологією, індукованою топологією добутку, і взявши за наскрізні проекції всі відображення $\mathrm{pr}_\beta : \tilde{X} \to X_\beta$, $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}\big) = x_\beta$, які обирають з набору відповідну координату. Кожна інша границя цього спектра з простору X_0 та наскрізних проекцій $\pi_\alpha : X_0 \to X_\alpha$ ізоморфна до описаної у тому сенсі, що існує єдиний гомеоморфізм $h : X_0 \to \tilde{X}$, для якого $\pi_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha \circ h$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$.

Якщо простір X_0 разом з відображеннями $\pi_\alpha : X_0 \to X_\alpha$ є границею спектра $\mathcal{S}$, то кажуть, що X_0 розкладено у спектр $\mathcal{S}$. З означення границі випливає, що тоді довільне відображення f з топологічного простору Y у X_0 неперервне, якщо і тільки якщо всі композиції $\pi_\alpha \circ f$ з наскрізними проекціями є неперервними.

За теоремою Куроша [9] границя спектра, об'єктами якого є непорожні компакти (компактні гаусдорфові простори), теж є непорожнім компактом, і, якщо всі проекції спектра сюр'єктивні, то наскрізні проекції у його границі теж сюр'єктивні.

Повернемось до побудованого вище спектра зі скінченних множин X_ε, $\varepsilon > 0$, та відображень $\pi_\varepsilon^\delta : X_\delta \to X_\varepsilon$, $\delta < \varepsilon$. Ці множини з дискретною топологією є компактами, проекції π_ε^δ сюр'єктивні, тому границя спектра $\tilde{X}$ теж є компактом, а наскрізні проекції $\pi_\varepsilon : \tilde{X} \to X\varepsilon$ є сюр'єкціями. Щобільше, передбазу X_ε складають відкрито-замкнені одноточкові множини, тому передбазу $\tilde{X}$ утворюють їх прообрази, теж відкрито-замкнені. Отже, $\tilde{X}$ має базу з відкрито-замкнених множин, тобто є нульвимірним компактом. Згідно сказаного вище існує єдине неперервне відображення $\bar{p}$ з X у $\tilde{X}$, таке, що $p_\alpha = \pi_\alpha \circ p$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$. Неважко зауважити, що $\tilde{X}$ є фактор-простором X за відношенням $x \sim y \iff d(x, y) = 0$, а $\bar{p}$ – фактор-відображенням. Якщо ж d – ультраметрика, тобто розрізняє точки, то $\bar{p}$ є гомеоморфізмом.

Таким чином, кожна компактна ультрапсевдометрика на множині X визначає спектр

$$\mathcal{S} = \big\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, (0, +\infty)\big\},$$

такий, що:

(1) всі простори X_ε скінченні з дискретною топологією;

(2) при $\delta < \varepsilon$ відображення $\pi_\varepsilon^\delta : X_\delta \to X_\varepsilon$ сюр'єктивне;

(3) для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, для якого $\pi_\varepsilon^\delta : X_\delta \to X_\varepsilon$ є біекцією;

(4) існує $\varepsilon > 0$, для якого $|X_\varepsilon| = 1$.

Зауважимо, що звідси випливає, зо функція $\varepsilon \mapsto |X_\varepsilon|$ є напівнеперервним зліва незростаючим відображенням $(0, +\infty) \to \mathbb{N}$. Якщо d є ультраметрикою (розрізняє точки X), то маємо розклад X як топологічного простору у спектр $\mathcal{S}$.

Назвемо довільний спектр з властивостями (1)–(4) $\mathbb{R}_+$-спектром, надалі позначаючи $(0, +\infty) = \mathbb{R}_+$.

3. Морфізми $\mathbb{R}_+$-спектрів

Нагадаємо, що кожне відображення з множини з дискретною топологією у довільний топологічний простір неперервне. Якщо надалі йтиметься про конус із множини, то на ній матиметься на увазі дискретна топологія.

Твердження 3.1. *Нехай дано комутативний конус f з множини Y у $\mathbb{R}_+$-спектр*

$$\mathcal{S} = \big\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}.$$

Тоді формула

$$d(y_1, y_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid f_\varepsilon(x_1) = f_\varepsilon(x_2)\}, \qquad y_1, y_2 \in X,$$

визначає ультрапсевдометрику на Y. Якщо породжене цим конусом відображення $\bar{f}$ з Y у границю спектра $\mathcal{T}$ сюр'єктивне, то ультрапсевдометрика d компактна.

Зауважимо, що описаним вище способом за утвореною так ультрапсевдометрикою d можна побудувати $\mathbb{R}_+$-спектр

$$\mathcal{T} = \big\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}.$$

який виявляється строго ізоморфним до $\mathcal{S}$, тобто існує строгий ізоморфізм $i : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ – такий набір бієкцій $i_\varepsilon : X_\varepsilon \to Y_\varepsilon$, що для кожних $\delta < \varepsilon$ виконано $\lambda_\varepsilon^\delta \circ i_\delta = i_\varepsilon \circ \pi_\varepsilon^\delta$. Тоді пишемо $\mathcal{S} \simeq \mathcal{T}$.

Розширимо поняття строгого ізоморфізму. Строгим морфізмом з $\mathbb{R}_+$-спектра

$$\mathcal{S} = \big\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}$$

у $\mathbb{R}_+$-спектр

$$\mathcal{T} = \big\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}$$

називаємо такий набір сюр'єкцій $h = \big(h_\varepsilon : X_\varepsilon \to Y_\varepsilon\big)_{\varepsilon>0}$, що для кожних $\delta < \varepsilon$ виконано $\lambda_\varepsilon^\delta \circ h_\delta = h_\varepsilon \circ \pi_\varepsilon^\delta$. Якщо він існує, пишемо $\mathcal{S} \gtrsim \mathcal{T}$. Зрозуміло, що тоді $|X_\varepsilon| \geqslant |Y_\varepsilon|$ для кожного $\varepsilon > 0$. Оскільки всі множини X_ε та Y_ε скінченні, з $\mathcal{S} \gtrsim \mathcal{T}$ та $\mathcal{T} \gtrsim \mathcal{S}$ випливає $\mathcal{S} \simeq \mathcal{T}$.

Твердження 3.2. *Якщо конус* $f = (f_\varepsilon : Z \to X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *у* $\mathbb{R}_+$*-спектр*

$$\mathcal{S} = \big\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi^\delta_\varepsilon)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}$$

є комутативним, а $h = \big(h_\varepsilon : X_\varepsilon \to Y_\varepsilon\big)_{\varepsilon>0}$ *є строгим морфізмом з* $\mathcal{S}$ *у* $\mathbb{R}_+$*-спектр*

$$\mathcal{T} = \big\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda^\delta_\varepsilon)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\},$$

то набір усіх композицій $h_\varepsilon \circ f_\varepsilon : Z \to Y_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *є комутативним конусом* $Z \to \mathcal{T}$.

Називаємо його композицією конуса $f : Z \to \mathcal{S}$ та строгого морфізму $h : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ і позначаємо $h \circ f$. Якщо ця композиція збігається з конусом $g : Z \to T$, то h називаємо строгим морфізмом з f у g і пишемо $h : f \to g$ та $f \gtrsim g$. Зрозуміло, що з $f \gtrsim g$ разом з $g \gtrsim f$ випливає існування такого строгого ізоморфізму $i : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, що $g = i \circ f$. Тоді конуси f і g називаємо строго ізоморфними і пишемо $f \simeq g$.

Якщо всі відображення $f_\varepsilon : Z \to X_\varepsilon$, що складають комутативний конус $f : Z \to \mathcal{S}$, скомпонувати з неперервним відображенням $k : T \to Z$, отримаємо комутативний конус $f \circ k = \big(f_\varepsilon \circ k : T \to X_\varepsilon\big)$.

Назвемо відображення ϕ з множини Z в ультрапсевдометричний простір (X, d) майже сюр'єктивним, якщо для кожного $x \in X$ існує таке $z \in Z$, що $d(\phi(z), x) = 0$.

Твердження 3.3. *Нехай* $\mathbb{R}_+$*-спектри*

$$\mathcal{S} = \big\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi^\delta_\varepsilon)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}$$

та

$$\mathcal{T} = \big\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda^\delta_\varepsilon)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\big\}$$

разом з конусами $f : X \to \mathcal{S}$ *та* $g : Y \to \mathcal{T}$, *що складаються з сюр'єкцій, визначають ультрапсевдометрики відповідно* d *на* X *та* ρ *на* Y.

(1) *Майже сюр'єктивне відображення* $H : (X, d) \to (Y, \rho)$ *між ультрапсевдометричними просторами є нерозтягуючим, якщо і тільки якщо існує такий строгий морфізм* $h : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ *(який у цьому випадку є єдиним), що* $h \circ f = g \circ H$.

(2) *Якщо ультрапсевдометрика* ρ *є компактною, то для кожного строгого морфізму* $h : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ *існує майже сюр'єктивне нерозтягуюче відображення* $H : (X, d) \to (Y, \rho)$, *для якого* $h \circ f = g \circ H$.

Отже, відношення $\gtrsim$ між $\mathbb{R}_+$-спектрами відповідає існуванню майже сюр'єктивних нерозтягуючих відображень між компактними просторами з визначеними цими спектрами ультрапсевдометриками.

У частинному випадку, коли $X = Y$, отримуємо :

Наслідок 3.4. *Нехай $\mathbb{R}_+$-спектри*

$$\mathcal{S} = \left\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\right\}$$

та

$$\mathcal{T} = \left\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\right\}$$

разом з конусами $f : X \to \mathcal{S}$ та $g : X \to \mathcal{T}$, що складаються з сюр'єкцій, визначають ультрапсевдометрики відповідно d та ρ на X.

Виконано $d \geqslant \rho$, тобто $d(x, x') \geqslant \rho(x, x')$ для всіх $x, x' \in X$, якщо і тільки якщо існує строгий морфізм $h : f \to g$ (який у цьому випадку є єдиним).

4. Частково впорядкована множина класів строго ізоморфних спектрів

Відношення між $\mathbb{R}_+$-спектрами

$$\mathcal{S} \simeq \mathcal{T} \iff \mathcal{S} \gtrsim \mathcal{T} \wedge \mathcal{T} \gtrsim \mathcal{S}$$

є відношенням еквівалентності, і класи щодо нього утворюють множину, яку позначимо ES. Тоді відношення передпорядку (тобто рефлексивне і транзитивне відношення) $\gtrsim$ між спектрами коректно визначає відношення часткового порядку між класами, а саме $[\mathcal{S}] \gtrsim [\mathcal{T}]$, якщо $\mathcal{S} \gtrsim \mathcal{T}$. Множина ES спрямована вгору, тобто для кожних $\mathbb{R}_+$-спектрів

$$\mathcal{S} = \left\{(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\pi_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\right\}$$

та

$$\mathcal{T} = \left\{(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\lambda_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\right\}$$

існує $\mathbb{R}_+$-спектр

$$\mathcal{Q} = \left\{(Z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\theta_\varepsilon^\delta)_{\delta\leqslant\varepsilon}, \mathbb{R}_+\right\},$$

для якого $\mathcal{Q} \gtrsim \mathcal{S}$, $\mathcal{Q} \gtrsim \mathcal{T}$, наприклад, $Z_\varepsilon = X_\varepsilon \times Y_\varepsilon$, $\theta_\varepsilon^\delta = \pi_\varepsilon^\delta \times \lambda_\varepsilon^\delta$.

Найменший елемент у ES тривіальний – це клас спектру з одноточкових просторів, а найбільшого, як легко бачити, не існує.

На жаль, у множині ES для для всіх пар елементів існує супремум.

Приклад. *Ми подамо тільки ультрапсевдометрики на скінченних просторах, відповідні спектри легко будуються.*

(1) Псевдометрика ρ_1 на множині $\{a, b, c, d\}$, ρ_1 між кожною парою точок з $\{a, b, c\}$ дорівнює 1, між будь-якою з цих точок та d – 3.

(2) Псевдометрика ρ_2 на множині $\{a, b, c\}$, $\rho_2(a, b) = \rho_2(a, c) = 3$, $\rho_2(b, c) = 2$.

(3) Псевдометрика d_1 на множині $\{a, b, c, d, e\}$, d_1 між кожною з точок з $\{a, b, c\}$ та кожною з точок з $\{d, e\}$дорівнює 3, між будь-якою парою з точок a, b, c – 1, $d_1(d, e) = 2$.

(4) Псевдометрика d_2 на множині $\{a, b, c, d\}$, $d_2(a, b) = d_2(a, c) = 2$, $d_2(b, c) = 1$, $d_2(a, d) = d_2(b, d) = d_2(b, d) = 3$.

Неважко перевірити, що для побудованих на основі цих псевдометрик спектрів виконано $\mathcal{S}_{d_1} \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_1}$, $\mathcal{S}_{d_1} \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_2}$, $\mathcal{S}_{d_2} \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_1}$, $\mathcal{S}_{d_2} \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_2}$, тобто $[\mathcal{S}_{d_1}]$ та $[\mathcal{S}_{d_2}]$ є верхніми гранями $[\mathcal{S}_{\rho_1}]$, $[\mathcal{S}_{\rho_1}]$, однак не існує такої псевдометрики d, що $\mathcal{S}_{d_1} \gtrsim \mathcal{S}_d$, $\mathcal{S}_{d_2} \gtrsim \mathcal{S}_d$, $\mathcal{S}_d \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_1}$, $\mathcal{S}_d \gtrsim \mathcal{S}_{\rho_2}$, тому найменшої верхньої грані $[\mathcal{S}_{\rho_1}]$, $[\mathcal{S}_{\rho_1}]$ не існує.

Аналогічно можна показати, що не для всіх пар елементів існують інфімуми. Отже, множина ES не є ні верхньою, ні нижньою напівграткою.

5. Висновки та подальші дослідження

Як бачимо, частковому порядку на отриманій множині класів строго ізоморфних $\mathbb{R}_+$-спектрів бракує корисних властивостей. Є два шляхи до "поліпшення" цієї множини – перехід до класів строго ізоморфних конусів з фіксованою вершиною, яка є нульвимірним компактом зліченної ваги [4], або послаблення вимог до морфізмів – відмова від строгості, тобто розгляд складнішого поняття морфізму, прийнятого у теорії зворотних спектрів [9], і вивчення фактор-об'єктів [3]. Обидва шляхи ведуть до цікавих результатів, яким будуть присвячені наступні публікації.

Література

1. Dubois D., Prade H., The three semantics of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 1997, 90 (2), 141–150.

2. Fedorchuk V.V., Infinite-dimensional compact Hausdorff spaces, Izv. Math. 1979, 13 (2), 445-–460.

3. Koporkh K.M., Zarichnyi M.M., On the space of open maps of the Cantor set, Мат. методи та фіз.-мех. поля 2021, 64 (1), 15-–20. (2021)

4. Nykorovych S., Approximation relations on the posets of pseudometrics and of pseudoultrametrics, Carpathian Math. Publ. 2016, 8 (1), 150–157.

5. Nykyforchyn O., Repovš D., Ambiguous representations as fuzzy relations between sets, Fuzzy sets and systems 2011, 173 (1), 25-44.

6. Repovš D., Savchenko A., Zarichnyi M., Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures, Fuzzy Sets and Systems 2011, 175 (1), 96–104.

7. Savchenko A., Zarichnyi M., Open problems in the theory of fuzzy metric spaces, Математичні студії 2015, 43 (1), 110–112.

8. Щепин Е.В., Топология предельных пространств несчетных обратных спектров, Russian Math. Surveys 1976, 31 (5), 155–191.

9. Федорчук В.В., Филиппов В.В., Общая топология. Основные конструкции: Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М., 2006. - 336 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 18.11.2022 р.

COMPACT ULTRAPSEUDOMETRICS AND INVERSE SYSTEMS

O.R. Nykyforchyn, K.M. Koporkh, S.I. Nykorovych

Vasyl' Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Shevchenka 57, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
e-mail: oleh.nykyforchyn@pnu.edu.ua, kateryna.koporkh@pnu.edu.ua, sviatoslav.nykorovych@pnu.edu.ua

A method of construction of an inverse system of finite compacta, indexed with positive reals, from a compact ultrapseudometric, is proposed. It is proved that homeomorphisms and natural preorder on the class of compact ultrapseudometrics correspond to strict isomorphisms and strict morphisms of the respective inverse systems. Properties of the poset obtained with "gluing together" of the isomorphic inverse systems, are discussed.

Key words: *compact space, ultrametric, pseudometric, inverse system.*