

# АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙНОГО СИГНАЛУ ПІДШИПНИКОВОГО ВУЗЛА З РОЗВИНУТИМ ДЕФЕКТОМ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ СТАТИСТИКИ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

І. Й. МАЦЬКО

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 5. E-mail: matsko.ivan@gmail.com

Проведено аналіз вібрацій підшипникового вузла декантера з розвинутим дефектом на основі їх математичної моделі у вигляді періодично корельованого випадкового процесу. Розглянуто властивості як детермінованої, так і періодично нестационарної стохастичної складових. Встановлено ті особливості спектрально-кореляційної структури останньої, які характеризують дефект даного типу й можуть бути використані для його раннього виявлення. Бібліогр. 10, Рис. 13, табл. 2.

*Ключові слова:* підшипниковий вузол, вібрації, періодично корельований випадковий процес, розвинутий дефект, характерні ознаки дефекту

Виникнення дефектів в елементах механічних систем спричиняє нелінійні ефекти у властивостях вібраційних коливань. Такі ефекти приводять як до появи нових гармонік у детермінованій складовій вібрації, так і до взаємодії цієї складової зі стохастичними коливаннями, які зумовлені флуктуаціями товщини та в'язкості змазки, змінами сил тертя, спонтанними й некерованими змінами робочих навантажень і т. п. В результаті вказаної взаємодії порушується строга періодичність детермінованих коливань, вони модулюються за фазою та амплітудою. В багатьох випадках характеристики такої модуляції є важливими носіями інформації про стан того чи іншого об'єкту. Відмічені властивості вібрацій можуть бути адекватно описані математичною моделлю у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП), які представляються сумою модульованих за амплітудою та фазою гармонік з кратними частотами [1, 2]:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (1)$$

де  $\xi_k(t)$  – стаціонарно зв'язані випадкові процеси;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  – період нестационарності. Математичне сподівання процесу (1)  $m(t) = E\xi_k(t)$ , де  $E$  – оператор імовірнісного усереднення, та його кореляційна функція  $b(t, u) = E\xi_k(t)\xi_k(t+u)$ , де  $\xi_k(t) = \xi(t) - m(t)$ , періодично змінюються за часом  $t$  і можуть бути представлені рядами Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\omega_0 t} = m_0 + \sum_{k \in N} (m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t),$$

$$b(t, u) = \sum_{k \in Z} B_k(u) e^{ik\omega_0 t} = B_0(u) + \sum_{k \in N} (B_k^c(u) \cos k\omega_0 t + B_k^s(u) \sin k\omega_0 t),$$

при цьому

$$m_k = \frac{1}{2}(m_k^c - im_k^s), \quad B_k(u) = \frac{1}{2}(B_k^c(u) - iB_k^s(u))$$

$\forall k \neq 0$ , а  $Z$  і  $N$  є множинами, відповідно, цілих і натуральних чисел. Коефіцієнти Фур'є  $m_k$  є математичними сподіваннями модулюючих процесів  $m_k = E\xi_k(t)$ , а коефіцієнти Фур'є кореляційної функції  $B_k(u)$  (їх називають кореляційними компонентами [1, 2]) визначаються формулою

$$B_k(u) = \sum_{l \in Z} R_{l-k, l}(t) e^{il\omega_0 u}, \quad (2)$$

де  $R_{lk}(u) = E\xi_l(t)\xi_k(t+u)$ ,  $\xi_l(t) = \xi_l(t) - m_l$ , а « $\leftrightarrow$ » – знак спряження. Як випливає з (2), нульовий кореляційний компонент  $B_0(u)$  визначається автокореляційними функціями модулюючих процесів  $\xi_k(t)$ , а кореляційні компоненти номерів  $k$  – взаємкореляційними функціями тих модулюючих процесів, номери котрих відрізняються на число  $k$ .

Змінна спектральна густина

$$f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(t, u) e^{-i\omega u} du$$

також є періодичною функцією і може бути представлена у вигляді ряду Фур'є:

$$f(\omega, t) = \sum_{k \in Z} f_k(\omega) e^{ik\omega_0 t}.$$

Її коефіцієнти Фур'є – спектральні компоненти  $f_k(\omega)$ , є перетвореннями Фур'є кореляційних компонентів:

$$f_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(u) e^{-i\omega u} du = \sum_{l \in Z} f_{l-k,l}(\omega - l\omega_0).$$

Нульовий кореляційний компонент  $B_0(u)$  є кореляційною функцією стаціонарного наближення ПКВП, а нульовий спектральний компонент  $f_0(\omega)$  визначає розклад за частотами усередненої за часом потужності коливань. Він є суперпозицією зсунутих по частоті на величину  $l\omega_0$  спектральних густин потужності модулюючих процесів.

Періодична функція  $m(t)$  та її коефіцієнти Фур'є  $m_k$  описують властивості детермінованих вібрацій, а кореляційна функція  $b(t, u)$ , спектральна густина  $f(\omega, t)$ , кореляційні компоненти  $B_k(u)$  і спектральні компоненти  $f_k(\omega)$  – властивості стохастичних коливань. Всі ці величини можуть бути використані при дослідженні стану механізму. При цьому, як показали дослідження [1, 3], за характеристиками періодичної нестаціонарності другого порядку, якими є кореляційні та спектральні компоненти ненульових номерів, можна виявляти дефекти механізмів вже на ранніх стадіях, а також оцінювати ступінь їх розвитку. Інформативними тут є як гармонічні складові величин  $b(t, u)$  та  $f(\omega, t)$ , а також залежності кореляційних компонентів від зсуву та спектральних компонентів від частоти. Наведені вище співвідношення є основою для верифікації ПКВП-моделі, а також інтерпретації обробки експериментальних даних.

**Аналіз стаціонарного наближення вібраційного сигналу.** В даній роботі проаналізовано вібраційний сигнал, відібраний з підшипникового вузла декантера Flottweg 24E, схематичне зображення якого наведено на рис. 1, за допомогою створеної у ФМІ

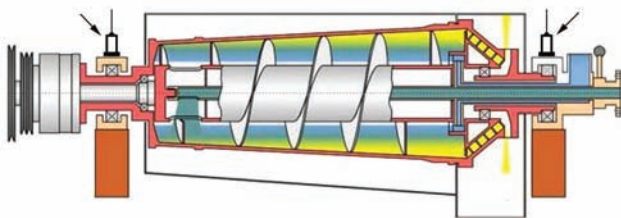


Рис. 1. Механічна схема декантера (стрілками показані місця кріплення акселерометрів)

ім. Г. В. Карпенка НАН України вібродіагностичної системи на одному з підприємств України.

Такий аналіз проводився на основі ПКВП-підходу з використанням всього комплексу імовірнісних характеристик першого й другого порядків. Потужність декантера становить 16 кВт, швидкість обертання валу – 3600 об/хв. Верхня частота пропускання аналогового фільтру – 5 кГц, частота дискретизації  $fs_{\text{ampl}}(\omega) = 10$  кГц. Час запису вібраційних сигналів – 20 с. Фрагмент реалізації вібраційного сигналу показаний на рис. 2. На рисунку видно чітко виражені викиди, що слідують один за одним з частотою обертання валу.

На початковому етапі аналізу вяснимо характерні особливості кореляційно-спектральної структури стаціонарного наближення сигналу. Оцінки кореляційної функції стаціонарного наближення обчислимо за формулою:

$$\hat{R}(lh) = \sum_{n=0}^{K-1} [\xi(nh) - \hat{m}] [\xi((n+l)h) - \hat{m}],$$

де  $\hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh)$ ,  $K = \frac{\theta}{h}$  – число відліків;  $\theta$  –

довжина реалізації;  $h$  – крок дискретизації;  $l$  – ціле число. Графік залежності від зсуву обчисленої оцінки представлений на рис. 3, а.

Як видно, оцінка  $\hat{R}(u)$  при малих відхиленнях зсуву  $u$  від нуля різко зменшується на величину, що становить біля однієї третини її значення в нулі. Далі вона має вигляд повільно згасаючих коливань, основний період яких є близьким до пе-

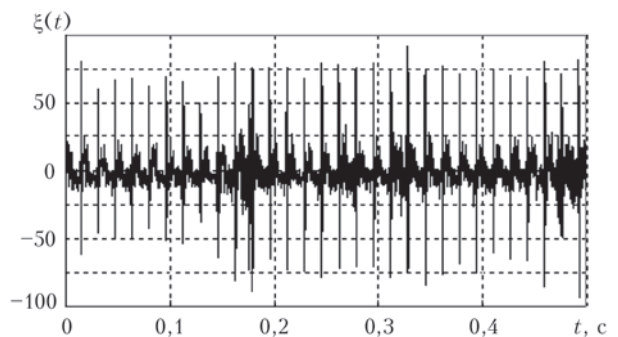


Рис. 2. Фрагмент реалізації вібраційного сигналу

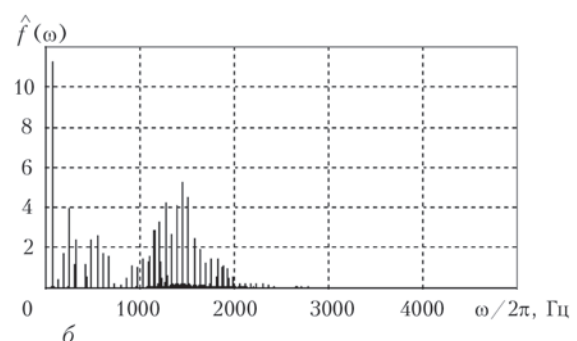
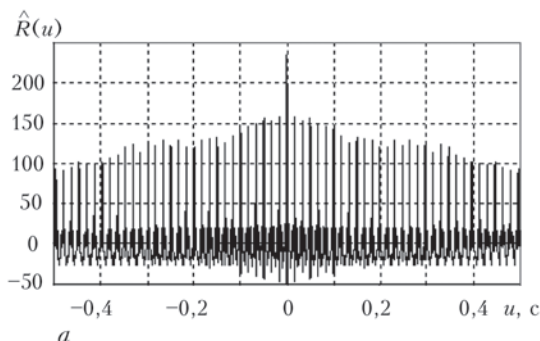


Рис. 3. Оцінки кореляційної функції (а) та спектральної густини потужності (б) стаціонарного наближення вібраційного сигналу

ріоду обертання валу. Для більших зсувів  $u$  оцінка  $\hat{R}(u)$  приймає вигляд незгасаючих періодичних коливань складної форми.

Оцінку спектральної густини потужності стаціонарного наближення вібраційного сигналу знайдемо, використовуючи корелограмний метод Блекмана–Тьюкі [1, 4]:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-L}^L R(n\Delta u) k(n\Delta u) e^{-i\omega n\Delta u},$$

де  $\Delta u = \frac{u_{\max}}{L}$  – інтервал дискретизації за зсувом;  $u_{\max}$  – точка усікання корелограми;  $L$  – натуральне число; а  $k(u_0)$  – кореляційне вікно, яке задовольняє умови:  $k(0) = 1$ ,  $k(-u) = k(u)$ . При обчисленні було вибрано вікно Хеммінга:

$$k(u) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi u}{u_{\max}}, & |u| \leq u_{\max} \\ 0, & |u| > u_{\max} \end{cases}$$

Графік отриманої оцінки представлено на рис. 3, б. Він має гребінчатий вигляд. Максимальне значення оцінка приймає на частоті, що відповідає основній частоті обертання валу. Спектральний склад коливань обмежується верхньою частотою, значення якої є трохи меншим від 2,5 кГц. На графіку можна виділити низькочастотну, середню й високочастотну смуги від 1,0 до 2,5 кГц. Коливання, частоти яких належать до останньої смуги, є найбільш потужними.

**Виділення й аналіз детермінованих коливань.**

Для детальнішого аналізу кореляційно-спектральної структури сигналу використаємо методи статистики ПКВП. Першим етапом при такому підході є розділення вібрацій на детерміновану та стохастичну складові. Для цього застосуємо методи виявлення прихованих періодичностей, які ґрунтуються на їх ПКВП-моделі [1, 5–7]. Найпростішими серед них є когерентний та компонентний методи, при яких використовуються статистики, аналогічні до відповідних оцінок імовірнісних характеристик, тільки з тією різницею, що в них замість істинного значення періоду використовується деяка пробна величина  $\tau$ . Такі статистики є селективними по відношенню до періоду нестационарності, а саме, вони приймають екстремальні значення в точках, які є близькими до значення періоду. Тому задача визначення періоду зводиться до пошуку точок екстремумів відповідних функціоналів. При когерентному оцінюванні, що є узагальненням на випадок ПКВП широко відомої схеми Бью-Балло, виявляються всі можливі гармоніки, частоти яких є кратними до основної, а при компонентному – тільки вибрана з них. В даному випадку, оскільки оцінка спектральної густини потужності має вигляд гребінки, застосуємо когерентний

метод, при якому статистика для визначення періоду математичного сподівання має вигляд [1, 7]:

$$\hat{m}(t, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau), \quad (3)$$

де  $\tau$  – пробний період. Оскільки дискретні значення вібраційного сигналу отримані з кроком  $h = 10^{-4}$  с, то й величини  $t$  і  $\tau$  можна також змінювати з таким же кроком. Для точнішого визначення періоду проведемо передискретизацію даних, використовуючи формулу Котельнікова–Шеннона:

$$\xi(t) = \sum_{n=-M}^M \xi(nh) \frac{\sin \omega_{\max}(t-nh)}{\omega_{\max}(t-nh)},$$

де  $\omega_{\max}$  – максимальна частота сигналу.

Час  $t$  виберемо близьким до точки максимуму статистики  $\hat{m}(t, \tau)$ . Залежність  $\hat{m}(t, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$  для такого  $t$  показана на рис. 4. Максимальне значення ця величина приймає при  $\tau = 1,6667 \cdot 10^{-2}$  с. Це значення приймемо за оцінку періоду математичного сподівання  $\hat{m}(t, \hat{T})$ . Йому відповідає частота  $\hat{f} = 59,998$  Гц. При такому  $\tau = \hat{T}$  величина (3) є оцінкою математичного сподівання  $\hat{m}(t, \hat{T})$ , яке описує детерміновану складову сигналу. Залежність від часу цієї складової, як видно з рис. 5, характеризується потужними викидами, які повторюються через період обертання валу. На основі значень  $\hat{m}(t, \hat{T})$  на періоді  $[0, \hat{T}]$  знайдемо амплітудний спектр детерміновано складової

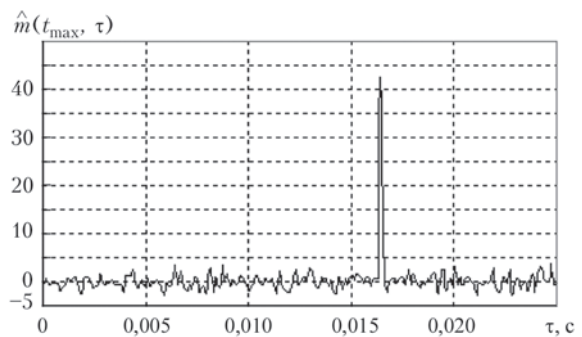


Рис. 4. Залежність статистики  $\hat{m}(t_{\max}, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$

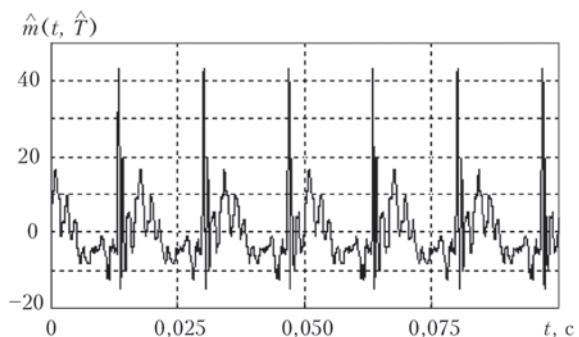


Рис. 5. Залежність статистики  $\hat{m}(t_{\max}, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$



вібраційного сигналу. Оцінки амплітуд гармонік  $|\hat{m}_k|$  обчислимо, використовуючи формули [8–10]:

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{m}_k^c \\ \hat{m}_k^s \end{matrix} \right\} = \frac{2}{L+1} \sum_{n=0}^L \hat{m}(n\tilde{h}, \hat{T}) \left\{ \begin{matrix} \cos k \frac{2\pi}{L+1} n \\ \sin k \frac{2\pi}{L+1} n \end{matrix} \right\},$$

$$|\hat{m}_k| = \sqrt{(\hat{m}_k^c)^2 + (\hat{m}_k^s)^2},$$

при цьому  $\tilde{h} = \frac{\hat{T}}{L+1}$ . Значення оцінок амплітуд гармонік подані у табл. 1, а на рис. 6 показана діаграма, яка є графічним представленням амплітудного спектру.

Слід відмітити, що перед обробкою вібраційний сигнал центрований на постійну складову, тому нульовий компонент математичного сподівання сигналу  $\hat{m}_0 = 0$ . Цей спектр є досить широким, значущим є біля 40 гармонік, що відповідає ширині спектру біля 2,5 кГц.

Потужність детермінованої складової  $P_{det} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{40} |\hat{m}_k|^2 = 69,79$ . Сумарну потужність детермінованої та стохастичної складових сигналу можна оцінити за значенням в нулі оцінки кореляційної функції стаціонарного наближення, яке дорівнює  $\hat{R}(0) = 234,27$ . Отже відношення потужностей детермінованої та стохастичних складових вібрації складає  $\frac{P_{det}}{P_{st}} = 0,424$ . Форма амплітудного спектру детермінованих коливань є подібною до

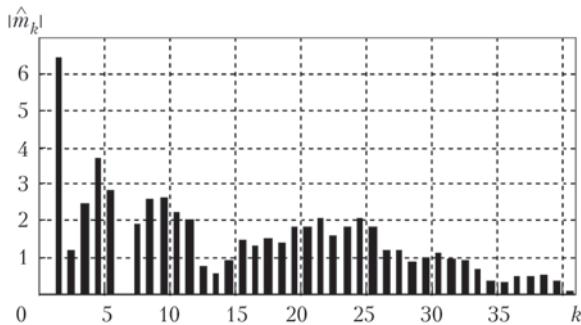
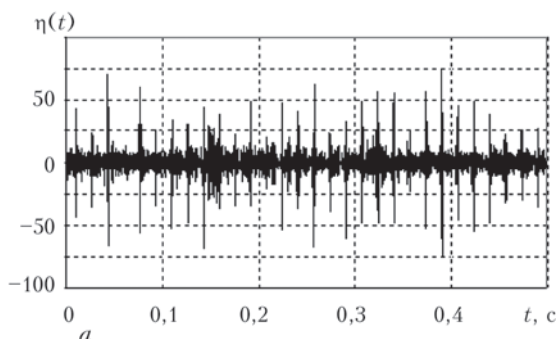


Рис. 6. Амплітудний спектр детермінованої складової вібраційного сигналу



форми оцінки спектральної густини стаціонарного наближення. Виразно виділяються ті ж характерні частотні смуги, близькими є точки максимальних і мінімальних значень. Однак судити про якісь числові співвідношення наразі неможливо, оскільки значення оцінки спектральної густини стаціонарного наближення сигналу, який містить детерміновану і стохастичну складові, залежать від довжини відрізка реалізації і ростуть, коли остання збільшується. Дослідити кореляційно-спектральні властивості стохастичної складової можна тільки провівши її окремий аналіз, використовуючи при цьому методи статистики ПКВП.

**Кореляційно-спектральний аналіз структури стохастичних коливань.** Графік стохастичного залишку  $\eta(t)$ , який отриманий центруванням початкової реалізації на оцінку математичного сподівання, тобто  $\eta(t) = \xi(t) - \hat{m}(t, \hat{T})$ , показаний на рис. 7, а. Флуктуаційні вібраційні коливання, як видно, також містять потужні викиди з випадково змінною амплітудою. Оцінка кореляційної функції, обчислена тепер за формулою

$$R_\eta(rh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \eta(nh) \eta((n+r)h),$$

де  $\eta(nh) = \xi(nh) - \hat{m}(nh, \hat{T})$ , графічно представлена на рис. 7, б. Вона має вигляд повільно загасаючих груп коливань. Такі групи слідують одна за одною з інтервалом, який є близьким до періоду обертання валу. Оскільки оцінка кореляційної функції згасає до малопотужних біля нуля флуктуацій, то можна зробити висновок про те, що отриманий залишок не містить жодних детермінованих коливань.

Графік корелограмної оцінки спектральної густини обчислений на основі першої групи коливань (рис. 8, а), коли точка усічення корелограми  $u_{max} = 0,002$  с, має одновершинну форму з максимальним значенням на  $f = 1485$  Гц (рис. 8, б). Ширина значущої смуги від 1,0 до 2,5 кГц. Оцінка спектральної густини, обчислена за кількома групами коливань кореляційної функції при  $u_{max} = 0,025$  с (рис. 9, а) має вже форму гребінки, відстань між вершинами котрої є близькою до частоти обертання валу (рис. 9, б).

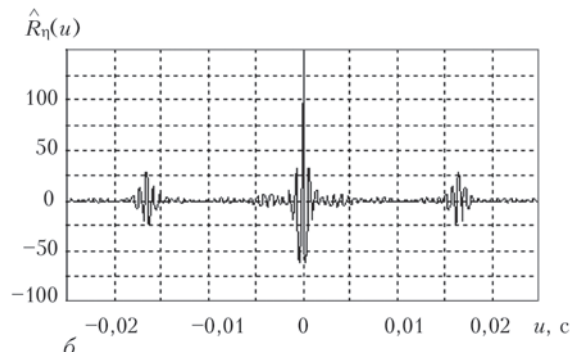


Рис. 7. Стохастична складова вібраційного сигналу (а) та оцінка її кореляційної функції в стаціонарному наближенні (б)

Таблиця 1. Значення оцінок амплітуд гармонік детермінованої складової вібраційного сигналу

$k$	$ \hat{m}_k $	$k$	$ \hat{m}_k $	$k$	$ \hat{m}_k $	$k$	$ \hat{m}_k $
1	6,4174	11	2,0120	21	2,0879	31	0,9436
2	1,1710	12	0,7284	22	1,5739	32	0,9209
3	2,4556	13	0,5638	23	1,8055	33	0,6692
4	3,6817	14	0,9110	24	2,0787	34	0,3590
5	2,8134	15	1,4680	25	1,8074	35	0,3397
6	0,0138	16	1,3112	26	1,2148	36	0,4736
7	1,9002	17	1,5010	27	1,1875	37	0,4538
8	2,5923	18	1,4195	28	0,8542	38	0,5343
9	2,6074	19	1,8182	29	1,0066	39	0,3792
10	2,2209	20	1,8550	30	1,1177	40	0,0792

Оцінки  $\hat{R}_\eta(u)$  і  $\hat{f}_\eta(\omega)$  описують властивості стаціонарного наближення стохастичної складової вібрації, тобто є її середньочасовими характеристиками. Щоб встановити закономірності часової мінливості її кореляційно-спектральної структури, використаємо методи статистики ПКВП. Перш за все проведемо пошук прихованих періодичностей у часових змінах кореляційних властивостей. Для цього використаємо симетричне когерентне усереднення кореляційного добутку [1, 5, 7]:

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \eta(t+n\tau)\eta(t+u+n\tau). \quad (4)$$

Така статистика при  $\hat{b}_t(t, u, \tau) \neq 0$  приймає екстремальні значення для тих  $\tau$ , які є близькими до періоду нестационарності  $T$ , якщо аналізовані дані є реалізацією ПКВП-сигналу. Найчіткіше такі ек-

тремуни проявляються для тих моментів часу, які є близькими до екстремумів кореляційної функції ПКВП. Графік залежності статистики (4) від пробного періоду  $\tau$  при  $u = 0$  для моменту часу  $t$ , що є близьким до максимального значення оцінки, показано на рис. 10. Як видно, статистика (4) приймає чітко виражене пікове значення, яке набагато перевищує рівень флуктуаційних змін. Точка екстремуму є близькою до періоду обертання валу. Більш точні обчислення показують, що вона відрізняється від оцінки періоду математичного сподівання тільки сьомим знаком. Тому й в цьому випадку прийемо  $\hat{T} = 1,6667 \cdot 10^{-2}$  с. Обчислена при такому значенні періоду нестационарності оцінка дисперсії  $\hat{b}_\eta(t, 0, \hat{T})$  в залежності від часу показана на рис. 11, а. Графік оцінки дисперсії має на періоді обертання валу потужний вузький пік, амплітудне

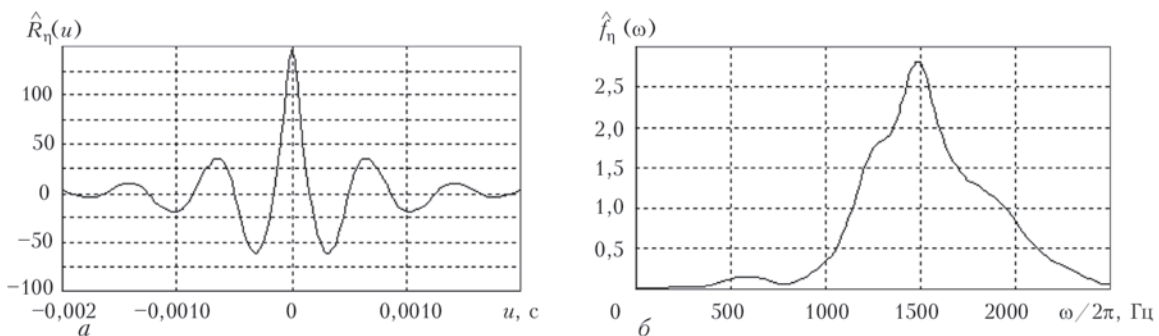


Рис. 8. Оцінка кореляційної функції при  $u_{\max} = 0,002$  с (а) та відповідна корелограмна оцінка спектральної густини (б)

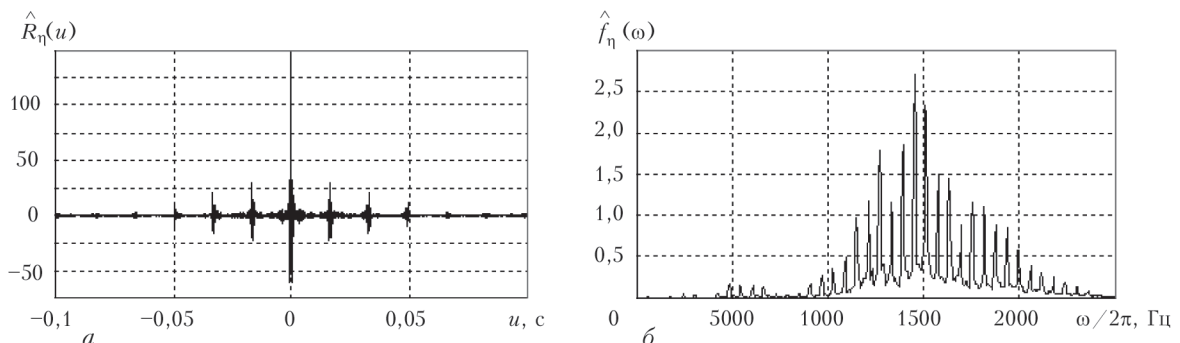


Рис. 9. Оцінка кореляційної функції при  $u_{\max} = 0,025$  с (а) та відповідна корелограмна оцінка спектральної густини (б)

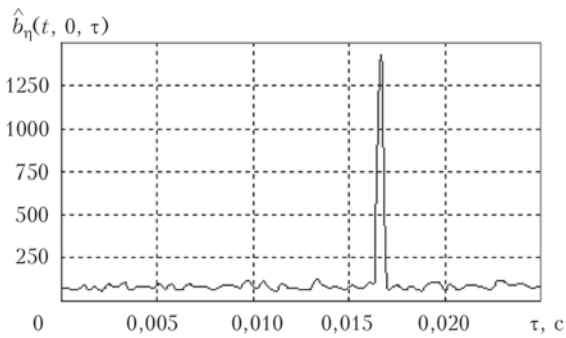


Рис. 10. Залежність статистики  $\hat{b}_n(t, 0, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$

значення якого більше, ніж у тисячу разів перевищує рівень інших часових змін.

Оцінки коефіцієнтів Фур'є дисперсії обчислимо за формулами [8–10]

$$\hat{B}_0(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \eta(nh)\eta(nh+u),$$

$$\begin{cases} \hat{B}_k^c(u) \\ \hat{B}_k^s(u) \end{cases} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \eta(nh)\eta(nh+u) \begin{cases} \cos k \frac{2\pi}{L+1} n \\ \sin k \frac{2\pi}{L+1} n \end{cases},$$

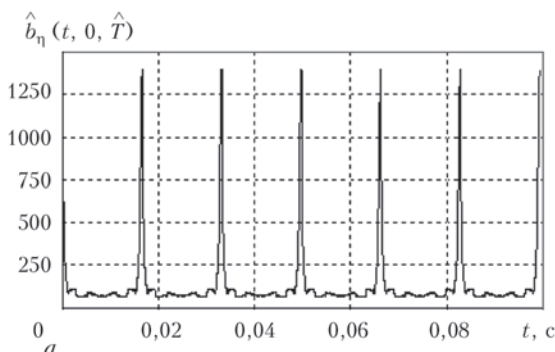
$$|\hat{B}_k(u)| = \sqrt{(\hat{B}_k^c(u))^2 + (\hat{B}_k^s(u))^2}, \quad (5)$$

поклавши  $u = 0$ . Результати обчислень представлені у табл. 2, а відповідна діаграма, яка є графічним представленням амплітудного спектру оцінки дисперсії – на рис. 11, б.

Амплітудний спектр оцінки дисперсії, як бачимо, є вужчим, ніж спектр математичного сподівання

Таблиця 2. Оцінки коефіцієнтів Фур'є дисперсії стохастичної складової вібрації

$k$	$ \hat{B}_k(0) $	$k$	$ \hat{B}_k(0) $	$k$	$ \hat{B}_k(0) $	$k$	$ \hat{B}_k(0) $
0	146,6734	6	95,1566	12	43,4736	18	17,9791
1	131,2848	7	85,9749	13	36,9806	19	15,4493
2	123,5196	8	76,6107	14	31,8838	20	12,6662
3	115,0076	9	65,0411	15	25,8956	21	10,6518
4	97,65608	10	54,31635	16	20,1373	22	8,4885
5	96,4492	11	47,4344	17	17,9445	23	6,7359



ня. Значущими є біля 25 компонент. Їх амплітуди монотонно спадають зі збільшенням номера  $k$ . Обчислене на основі наведених в табл. 2 даних відношення  $I = \sum_{k=1}^{24} |\hat{B}_k(0)| / \hat{B}_0(0)$  дорівнює  $I = 8,5166$ .

Таке відношення є мірою нестационарності сигналу і використовується для оцінки ступеня розвитку дефекту. Результат обчислень в даному випадку свідчить про потужну стохастичну модуляцію гармонік сигналу. Приймаючи до уваги цей результат, а також значну ширину амплітудних спектрів як детермінованих вібрацій, так і періодичних змін потужності стохастичних коливань, які описуються дисперсією сигналу, приходимо до висновку, що дефект підшипникового вузла є локалізованим і у великій мірі розвинутим.

Для детального аналізу структури стохастичних коливань розглянемо залежності оцінок кореляційних компонентів, обчислених за формулами (5), від зсуву. Графіки таких залежностей оцінок перших п'яти кореляційних компонентів показані на рис. 12. Оцінка нульового кореляційного компонента в даному випадку співпадає з оцінкою кореляційної функції стаціонарного наближення стохастичної складової вібраційного сигналу, вона представлена на рис. 7–9. Як видно, форма графіків для оцінок різних кореляційних компонентів є подібною. Всі вони мають групову структуру. Інтервали між окремими групами, потужності яких загасають з ростом зсуву, є близькими до періоду обертання валу. Періоди згасаючих коливань в кожній групі відрізняються незначно і є близькими до величини, що в двадцять п'ять раз менша від періоду обертання валу. Подібну структуру мають і оцінки вищих кореляційних компонентів.

Властивості стохастичної складової в частотній області описують спектральні компоненти, оцінки яких обчислимо, використовуючи корелограмний метод:

$$\hat{f}_0(\omega) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-L}^L \hat{B}_0(n\Delta u) k(n\Delta u) e^{-i\omega n\Delta u},$$

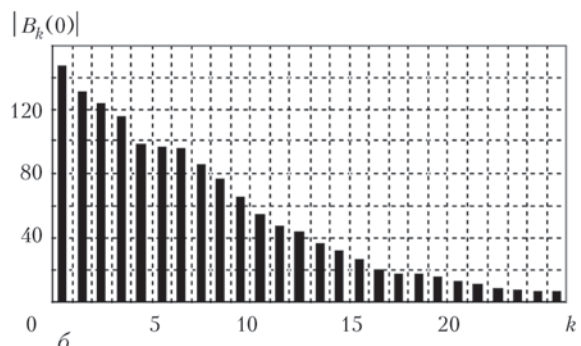


Рис. 11. Оцінка дисперсії (а) стохастичної складової вібрації та її коефіцієнти Фур'є (б)

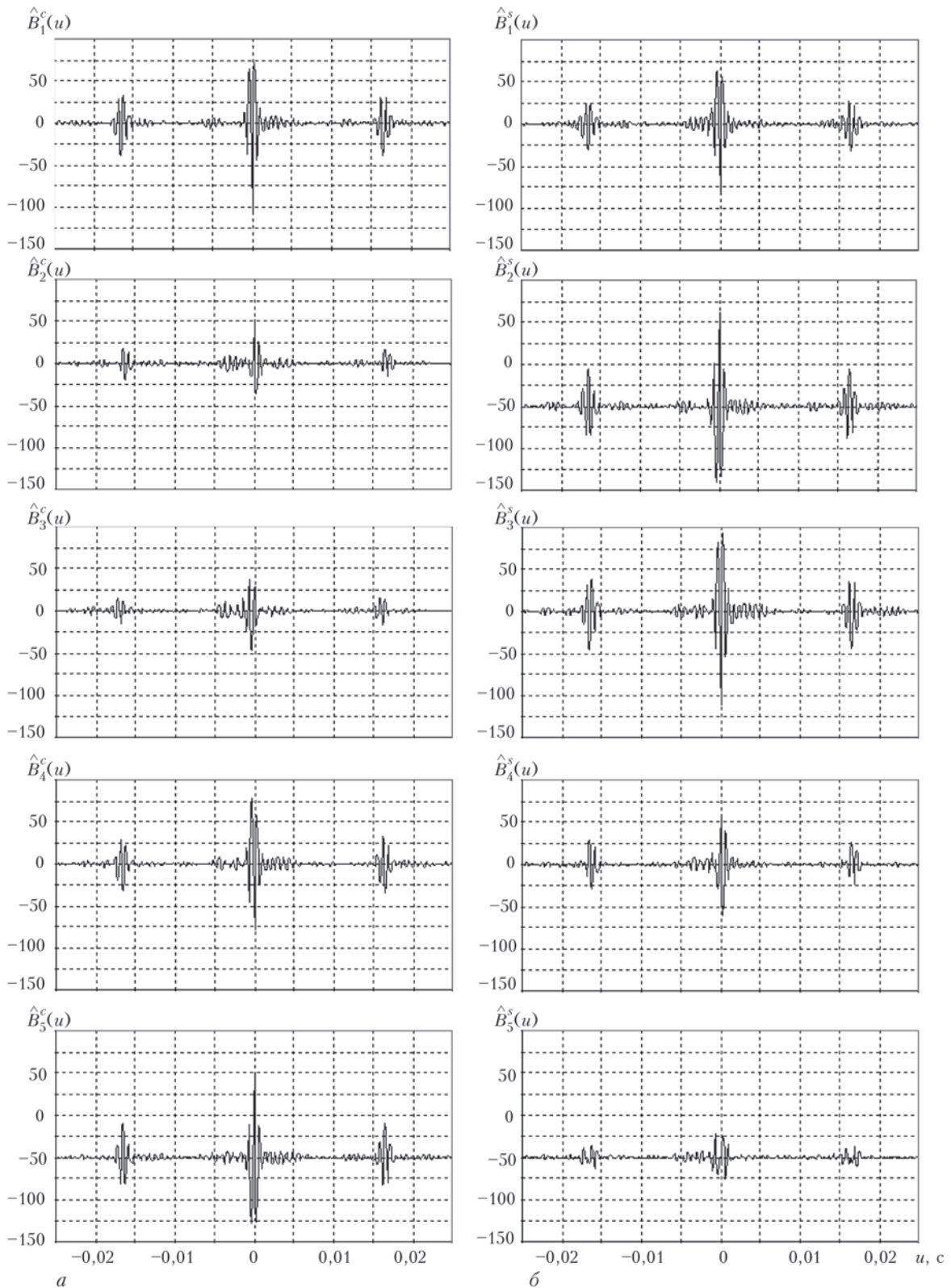


Рис. 12. Оцінки залежностей кореляційних компонентів від зсуву  $u$

$$\hat{f}_k(\omega) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n=-L}^L \hat{B}_k(n\Delta u) k(n\Delta u) e^{-i\omega n\Delta u}$$

Графіки дійсної та уявної частин перших п'яти спектральних компонентів наведені на рис. 13, а графік нульової – на рис. 8, 9 (оцінка цієї величини у даному випадку співпадає з оцінкою спек-

тральної густини стаціонарного наближення стохастичної складової вібраційного сигналу). Як видно, графіки частотної залежності всіх спектральних компонентів мають подібну гребінчасту форму. Відстань між вершинами окремих сусідніх піків дорівнює частоті обертання валу, а значущими всі оцінки є в межах від 1,0 до 2,5 кГц.



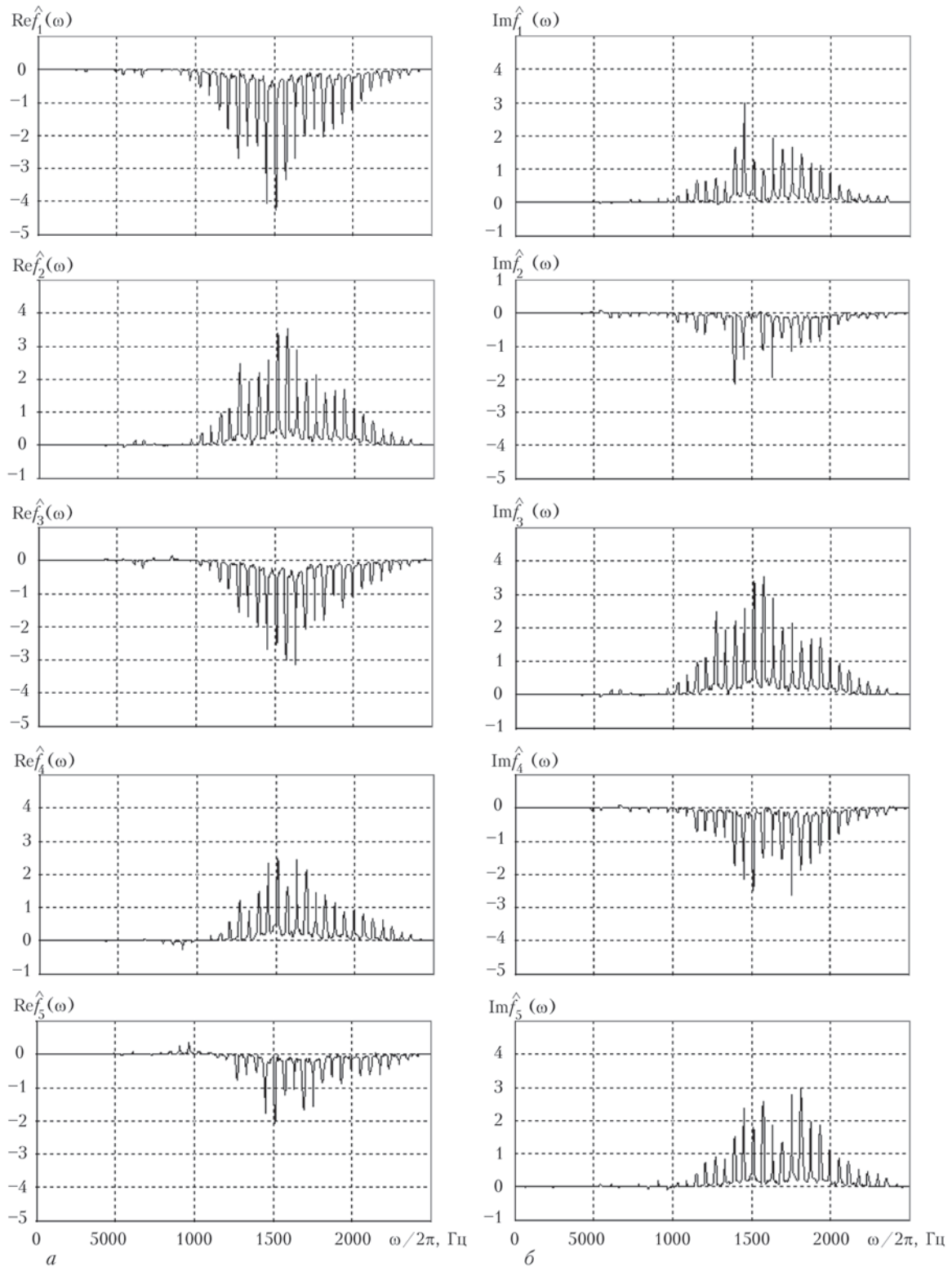


Рис. 13. Оцінки дійсної  $Re \hat{f}_k(\omega)$  та уявної  $Im \hat{f}_k(\omega)$  частин спектральних компонентів

Виявлена структура кореляційних і спектральних компонентів може бути пояснена, виходячи з властивостей стаціонарно зв'язаних випадкових процесів, які модулюють гармоніки детермінованої складової (1). Ненульові значення оцінки кореляційного компонента певного номера  $k$  означають, що корельованими між собою є випадкові процеси,

номери яких відрізняються на число  $k$ . Нульовий кореляційний компонент, як випливає з формули

$$B_0(u) = \sum_{l=-2N_1}^{2N_1} R_l(u) e^{il\omega_0 u},$$

де  $N_1$  – число гармонік, виявлених у детермінованій складовій, визначається автокореляційними



функціями модулюючих процесів, а його значення в нулі – сумою їх дисперсій. Автокореляційними функціями цих процесів, як впливає із залежності оцінки нульового кореляційного компонента від зсуву, зникають до рівня малопотужних флуктуацій на інтервалі, значення якого є близьким до п’яти періодів обертання валу. А це означає, що модульовані за амплітудою і фазою гармоніки є вузькосмуговими випадковими процесами. Нульовий спектральний компонент є сумою перенесених спектрів цих процесів

$$f_0(\omega) = \sum_{l=-2N_1}^{2N_1} f_{ll}(\omega - l\omega_0).$$

Оскільки частотна смуга оцінки нульового спектрального компонента визначається інтервалом 1,0...2,5 кГц, в якому має вигляд гребінки (рис. 8, 9), то можемо зробити висновок про те, що потужність стохастичних модуляцій високочастотних гармонік ( $k > 13$ ) значно перевищує потужність нижчих.

Оцінка нульового спектрального компонента визначає спектральний склад флуктуаційних коливань. Найбільш потужними в цьому спектрі є гармоніки, частота яких змінюється в межах від 22 ... 28  $\omega_0$ . Корельованими в цьому спектрі є гармоніки, віддалені одна від одної на відстань  $l\omega_0$ , при цьому  $l = 1, 20$ . Як впливає з властивостей оцінок вищих кореляційних і спектральних компонентів, взаємокореляційні зв’язки між модульціями згасають повільно, а взаємоспектральні густини є вузькосмуговими. Вищі спектральні компоненти є сумами спектральних густин зсунутих на  $l\omega_0$ , тому і мають вигляд гребінки.

Відтак, стохастична складова вібрації може бути представлена у вигляді суперпозиції високочастотних вузькосмугових процесів, у яких частоти несучих котрих є близькими. Така суперпозиція проявляється в груповій структурі залежностей кореляційних компонентів від зсуву, а також в гребінчастій формі частотних залежностей спектральних компонентів.

Характерною особливістю оцінок спектральних характеристик є відсутність гармонік з частотами тіл обертання по зовнішньому та внутрішньому кільцях підшипника. Це дає можливість зробити висновок про те, що розвинутий локальний дефект є дефектом обертання вала. Як вже підкреслювалось, величини, що характеризують міри нестационарності як першого, так і другого порядків, є значними і вказують на те, що обертовий вузол декантера знаходиться у передаварійному стані, що й було підтверджено під час проведення ремонтних робіт.

### Висновки

На основі аналізу вібрацій підшипникового вузла декантера методами ПКВП виявлено та опи-

сано його значне пошкодження, яке має ударний характер. Таке пошкодження виразно відображається як у гармонічному складі детермінованих періодичних коливань, так і в кореляційно-спектральній структурі стохастичної складової. Детерміновані коливання мають значну потужність, а їх амплітудний спектр є досить широким – значущими є біля 40 гармонік. Широким спектром характеризуються також періодичні зміни потужності стохастичної складової. Показники нестационарності як першого, так і другого порядків вказують на присутність розвинутого локального дефекту підшипникового вузла. Стохастичні вібраційні коливання можуть бути представлені у вигляді суперпозиції високочастотних гармонік, промодульованих за амплітудою та фазою вузькосмуговими стаціонарними випадковими процесами. Залежності від зсуву кореляційних характеристик таких коливань мають групову структуру, а спектральні мають вигляд гребінки, відстань між вершинами сусідніх піків якої дорівнює частоті обертання валу, і зосереджені в смузі частот 1,0...2,5 кГц. Встановлені особливості кореляційно-спектральної структури стохастичних коливань дали змогу зробити висновок про значне локальне пошкодження валу механізму. Такі результати можуть бути використані в подальшому як для раннього виявлення дефектів механізмів, так і встановлення їх типів.

### Список литературы

1. Яворський І. М. (2013) *Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань*. Львів, ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України.
2. Javors'ky I. j, Leskow J., Kravets I. et al. (2011) Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part II: Harmonic series representation. *Signal Processing*, **91**, 2506–2519.
3. Javors'kyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. (2017) Periodically correlated random processes: application in early diagnostics of mechanical systems. *Mechanical system and signal processing*, **83**, 406–438.
4. Kay S. M. (1988) *Modern spectral estimation*. New Jersey, Eaglewood Cliffs.
5. Javors'kyj I., Mychajlyshyn V. (1996) Probabilistic models and investigation of hidden periodicities. *Applied mathematical letters*, **9**, 21–23.
6. Javors'kyj I., Dehay D., Kravets I. (2014) Component statistical analysis of second order hidden periodicities. *Digital signal processing*, **26**, 50–70.
7. Javors'kyj I., Matsko I., Yuzefovych R. et al. (2017) Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationary period. *ibid*, **65**, 27–51.
8. Javors'kyj I., Isayev I., Majewski J., Yuzefovych R. (2010) Component covariance analysis of periodically correlated random processes. *Signal processing*, **90**, 1083–1102.
9. Javors'kyj I., Kravets I., Isayev I., Gajacka E. (2012) Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part I: Coherent and component methods and their generalizations. *ibid*, **92**, 1559–1566.
10. Javors'kyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z. (2016) Discrete estimators for periodically correlated random processes. *Digital signal processing*, **53**, 25–40.

References

1. Yavorskyi I. M. (2013) *Matematychni modeli ta analiz stokhastychnykh kolyvan*. Lviv, FMI im. H.V. Karpenka NAN Ukrainy. [in Ukrainian]
2. Javors'ky I., Leskow J., Kravets I. et al. (2011) Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part II: Harmonic series representation. *Signal Processing*, **91**, 2506–2519.
3. Javors'kyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. (2017) Periodically correlated random processes: application in early diagnostics of mechanical systems. *Mechanical system and signal processing*, **83**, 406–438.
4. Kay S. M. (1988) *Modern spectral estimation*. New Jersey, Eaglewood Cliffs.
5. Javors'kyj I., Mychajlyshyn V. (1996) Probabilistic models and investigation of hidden periodicities. *Applied mathematical letters*, **9**, 21–23.
6. Javors'kyj I., Dehay D., Kravets I. (2014) Component statistical analysis of second order hidden periodicities. *Digital signal processing*, **26**, 50–70.
7. Javors'kyj I., Matsko I., Yuzefovych R. et al. (2017) Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationary period. *ibid*, **65**, 27–51.
8. Javors'kyj I., Isayev I., Majewski J., Yuzefovych R. (2010) Component covariance analysis of periodically correlated random processes. *Signal processing*, **90**, 1083–1102.
9. Javors'kyj I., Kravets I., Isayev I., Gajecka E. (2012) Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part I: Coherent and component methods and their generalizations. *ibid*, **92**, 1559–1566.
10. Javors'kyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z. (2016) Discrete estimators for periodically correlated random processes. *Digital signal processing*, **53**, 25–40.

И. Й. МАЦЬКО

Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко НАН Украины, 79060, г. Львов, ул. Научная, 5.  
E-mail: matsko.ivan@gmail.com

АНАЛИЗ ВИБРАЦИОННОГО СИГНАЛА ПОДШИПНИКОВОГО УЗЛА С РАЗВИТЫМ ДЕФЕКТОМ НА ОСНОВАНИИ

МЕТОДОВ СТАТИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Проведен анализ вибраций подшипникового узла декантера с развитым дефектом на основании их математической модели в виде периодически коррелированного случайного процесса. Рассмотрены свойства как детерминированной, так и периодически нестационарной стохастической составляющих. Определены те особенности спектрально-корреляционной структуры последней, которые характеризуют дефект данного типа и могут быть использованы для его раннего выявления. *Бібліогр.* 10, Рис. 13, табл. 2.

Ключевые слова: подшипниковый узел, вибрации, периодически коррелированный случайный процесс, развитый дефект, характерные признаки дефекту

I. Y. MATSKO

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine. 5 Naukova str., Lviv, 79060, E-mail: matsko.ivan@gmail.com

ANALYSIS OF VIBRATION SIGNAL OF BEARING UNIT WITH DEVELOPED DEFECT BASED ON METHODS OF STATISTICS OF PERIODICALLY CORRELATED RANDOM PROCESSES

Vibrations of bearing unit decanter with developed defect based on their mathematical model in form of periodically correlated random process were analyzed. Considered were the properties of deterministic as well as periodically nonstationary stochastic constituents. The peculiarities of spectrum-correlation structure of the latter, which characterize defect of this type and can be used for its early detection, were determined. *Ref.10, Figures 13, Tables 2.*

Keywords: bearing unit, vibration, periodically correlated random process, developed defect, typical defect characteristics

Надійшла до редакції  
13.04.2017

Международная конференция

«Титан 2018: производство, обработка, применение»

11–12 июня 2018 г., Киев, ИЭС им. Е. О. Патона НАН Украины

Тематика конференции

- прогрессивные технологии и оборудование для получения титана и сплавов на его основе;
- деформационная обработка титана;
- новые сплавы на основе титана и его интерметаллидных соединений;
- особенности структуры и термической обработки титановых сплавов;
- аддитивные и порошковые технологии в производстве изделий из титановых сплавов;
- прогрессивные технологии сварки и пайки изделий и конструкций из титановых сплавов;
- применение изделий и конструкций из титановых сплавов в авиадвигателестроении и других отраслях промышленности.

Организационный комитет конференции ТИТАН 2018

ИЭС им. Е. О. Патона НАН Украины 03680, г. Киев, ул. Казимира Малевича, 11

Тел./факс: (38044) 200-82-77; E-mail: journal@paton.kiev.ua

www.pwi-scientists.com/rus/titan\_2018