

Волков М.П.<sup>1</sup>, Драбкін І.А.<sup>2</sup>, Єршова Л.Б.<sup>1</sup>, Кондратьєв Д.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ТОВ «Компанія РМТ», вул. Ларіна 22 Д, Нижній Новгород, 603152, Росія;

<sup>2</sup>Державний науково-дослідний і проектний інститут рідкометалічної промисловості (ВАТ «Гиредмет») В. Толмачевський буд. 5, буд. 1, Москва, 119017, Росія

## ДИНАМІКА ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОКАСКАДНИХ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ МОДУЛЯХ

*Динаміка виходу в робочий режим термоелектричного охолоджувача (ТЕО) є важливою характеристикою для будь-якого обладнання, у якому він використовується, і способи розрахункового й експериментального визначення її параметрів досить актуальні. У роботі [1] були виведені вирази для тимчасової релаксації одиначної вітки і однокаскадних ТЕО й узагальнені на випадок двокаскадних ТЕО з різним тепловим навантаженням і в різних умовах експлуатації. Ці результати одержали експериментальне підтвердження в роботі [2]. Мета даної роботи – одержати метод оцінки часу релаксації перехідних процесів в ТЕО з будь-яким числом каскадів, дослідити теоретично й експериментально динамічні криві виходу ТЕО в стаціонарний режим і порівняти результати вимірювань і розрахунків.*

**Ключові слова:** багатокаскадний термоелектричний модуль, константа часу, час релаксації.

*The dynamics of reaching the operating mode by thermoelectric cooler (TEC) is an important characteristic for any device where it is employed, and the methods for computational and experimental determination of its parameters are rather relevant. In paper [1], the expressions for time relaxation of a unit leg and a single-stage TEC were derived and generalized for the case of a two-stage TEC under different thermal load and operating conditions. These results were experimentally verified in [2]. The purpose of this paper is to get a method for estimating the relaxation time of transient processes in TEC with any number of stages, to study theoretically and experimentally the dynamic curves of reaching the steady-state mode by TEC and to compare the measured and calculated results.*

**Key words:** multi-stage thermoelectric module, time constant, relaxation time.

### Вступ

Час виходу на режим (час релаксації) багатокаскадного термоелектричного модуля має важливе прикладне значення. Спроби обчислення часу релаксації багатокаскадних модулів використовували неодноразово [1,2,3], однак вони носять скоріше оцінювальний характер, не враховуючи важливі деталі конструкції модуля. Ця робота є спробою по можливості точно розв'язати в одновірному наближенні залежне від часу рівняння теплопровідності для багатокаскадного термоелектричного модуля.

### Метод розв'язку задачі

Розглянемо багатокаскадний модуль (рис. 1).

На рисунку каскади модуля нумеруються, починаючи із «найгарячішого» каскаду. Номери каскадів зазначені в кружках. Температуру на гарячій стороні  $i$  каскаду позначимо  $T_i$ , на холодній  $T_{0i}$ . Перший каскад з'єднаний зі стоком тепла, що перебуває за температури  $T_a$ . Номери теплопереходів

починаються з 0 і наведені вгорі рисунка. Товщина  $i$ -ого теплопереходу  $C_i$ , довжина віток  $i$ -ого каскаду  $L_i$ .

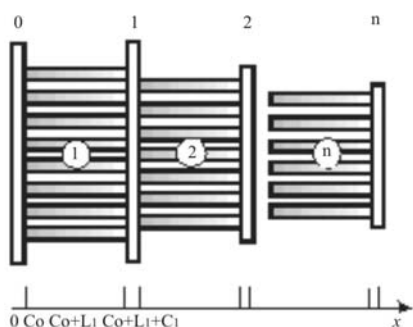


Рис. 1. Схема багатокаскадного модуля.

Нехай розподіл температур по довжині модуля описується функцією  $T(t,x)$ , де  $t$  – час,  $x$  – координата. Якщо  $(\cdot)$   $x$  знаходиться в області теплопереходу, то  $T(t,x)$  задовільняє рівнянню

$$\frac{\partial T_{i,c}(t,x)}{\partial t} = a_c^2 \frac{\partial^2 T_{i,c}(t,x)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де символ  $i$  вказує, на номер кераміки, а  $a_c$  – температуропровідність теплопереходу:

$$a_c = \sqrt{\frac{\kappa_c}{c_c d_c}}, \quad (2)$$

де  $\kappa_c$  – теплопровідність матеріалу теплопереходу,  $c_c$  – його теплоємність, а  $d_c$  - густина.

Якщо  $(\cdot)$   $x$  знаходиться в області віток, то

$$\frac{\partial T_{i,ty}(t,x)}{\partial t} = a_{i,ty}^2 \frac{\partial^2 T_{i,ty}(t,x)}{\partial x^2} + \frac{J^2}{c_{i,ty} d_{i,ty} \sigma_{i,ty}}, \quad (3)$$

де  $i$  – номер каскаду, символом  $ty$  позначений тип провідності вітки  $ty = n, p$ , відповідно  $a_{i,ty} = \sqrt{\frac{\kappa_{i,ty}}{c_{i,ty} d_{i,ty}}}$

– температуропровідність вітки типу  $ty$ , а  $\kappa_{i,ty}$ ,  $c_{i,ty}$ ,  $d_{i,ty}$  – теплопровідність, теплоємність і густина вітки типу  $ty$  в  $i$  каскаді. Усі вітки будемо для простоти вважати з'єднаними послідовно, тому густина струму  $J$  не залежить ні від типу провідності  $ty$ , ні від номера каскаду,  $\sigma_{i,ty}$  – питома електропровідність віток  $i$  каскаду й типу  $ty$ .

З умови безперервності температур випливає, що на границі кераміки й віток виконуються співвідношення

$$T_{0,c}(t, C_0) = T_{1,ty}(t, C_0), \quad (4)$$

$$T_{k,c} \left( t, \left[ C_0 + \sum_{i=1}^{i=k} (C_i + L_i) \right] \right) = T_{k,ty} \left( t, \left[ C_0 + \sum_{i=1}^{i=k} (C_i + L_i) \right] \right), k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$T_{k-1,c} \left( t, \left[ \sum_{i=1}^{i=k} (C_{i-1} + L_i) \right] \right) = T_{k,ty} \left( t, \left[ \sum_{i=1}^{i=k} (C_{i-1} + L_i) \right] \right), k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Будемо вважати, що тепловий потік, який тече через вітки термоелектричного модуля, рівномірно розподіляється по перетину теплопереходу. У цьому випадку одномірне наближення залишається справедливим. Для нульового теплопереходу або для холодних кінців віток кожного з каскадів таке припущення видасться досить природним, тому що вітки розподілені по поверхні кераміки доволі рівномірно. Що ж стосується гарячих кінців віток для каскадів, починаючи із другого, то там вітки розподілені по площі помітно меншої загальної площі теплопереходу, і для них таке припущення виглядає трохи штучним. Умова безперервності теплових потоків дає на контакті теплоперехід-вітки з урахуванням (5), (6)

$$-S_{i-1}k_c \frac{\partial T_{i,c}(t,x)}{\partial x} + N_i s \sum_{ty=n,p} \left( k_{ty} \frac{\partial T_{i,ty}(t,x)}{\partial x} + \alpha J T_c(t,x) \right) \Bigg|_{x=C_0, C_0 + \sum_{j=1}^{i+k} (C_j + L_j)} = 0, ty = n, p, k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

де  $S_{i-1}$  – площа  $i-1$ -ого теплопереходу,  $N_i$  – число пар термоелементів,  $s$  – перетин віток термоелементів (однакові для обох типів провідності). Вводячи позначення для коефіцієнта заповнення  $k$ -ої кераміки  $i$ -ого каскаду

$$K_{i,k} = \frac{2N_i s_i}{S_k}, k = i, i-1, \quad (8)$$

можна записати (7) у вигляді

$$\left( k_n \frac{\partial T_{i,n}(t,x)}{\partial x} + k_p \frac{\partial T_{i,p}(t,x)}{\partial x} \right) - \frac{2k_c}{K_{i,i-1}} \frac{\partial T_{i-1,c}(t,x)}{\partial x} + \bar{\alpha}_i J T_{i,c}(t,x) \Bigg|_{x=C_0, C_0 + \sum_{j=1}^{i+k} (C_j + L_j)} = 0, \quad (9)$$

де  $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{in} + \alpha_{ip})/2$ .

Аналогічно на контактні вітки-теплоперехід з врахуванням (4) маємо

$$k_c \frac{\partial T_c(t,x)}{\partial x} - \frac{K_{i,i}}{2} \left( k_n \frac{\partial T_n(t,x)}{\partial x} + k_p \frac{\partial T_p(t,x)}{\partial x} \right) - K_{i,i} \bar{\alpha}_i J T_{ty}(t,x) \Bigg|_{\sum_{j=1}^{i+k} (C_{j-1} + L_j)} = 0, k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Крайові умови на холодному теплопереході модуля

$$k_c \frac{\partial T_{n,c} \left( t, C_0 + \sum_{i=1}^{i=n} (C_i + L_i) \right)}{\partial x} = q_0, \quad (11)$$

де  $q_0$  – густина теплового потоку на холодний теплоперехід модуля.

Початкові умови:

$$T_c(0,x) = T_a. \quad (12)$$

Шукаємо розв'язок (1) у вигляді

$$T(t,x) = \tau(t)\phi(x) + \phi_{st}(x), \quad (13)$$

де  $\phi_{st}(x)$  – розв'язок стаціонарного рівняння теплопровідності з тими ж умовами (4)-(10), що й для нестационарного розв'язку теплопровідності. В силу визначення (13) функція  $\phi(x)$  задовольняє рівнянню (1) і рівнянню (3), у якому останній член дорівнює 0. Функції  $\phi(x)$  на теплопереході й вітках зшиваються за допомогою рівнянь (4) – (10). На холодному теплопереході для останнього каскаду  $\phi(x)$  задовільняє рівнянню (11), у якому  $q_0 = 0$ . Початкові умови для функції  $\phi(x)$ :

$$\phi_0(x) = T_a - \phi_{st}(x). \quad (14)$$

Характеристичні числа  $\lambda$  знаходяться методом поділу змінних з рівняння

$$\frac{\partial \tau(t)}{\tau(t) \partial t} = a^2 \frac{d^2 \phi(x)}{\phi(x) dx^2} = -\lambda_j^2. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) в області  $i$ -ого теплопереходу має вигляд

$$\phi_{i,c}(x) = A_{i,c} \sin \frac{\lambda_j x}{a_c} + B_{i,c} \cos \frac{\lambda_j x}{a_c}, i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

де  $A_{i,c}$  й  $B_{i,c}$  – постійні інтегрування.

В області термоелектричного матеріалу

$$\varphi_{i,ty}(x) = A_{i,ty} \sin \frac{\lambda_j x}{a_{ty}} + B_{i,ty} \cos \frac{\lambda_j x}{a_{ty}}, i = 1, \dots, n, ty = n, p, \quad (17)$$

де  $A_{i,ty}, B_{i,ty}$  – постійні інтегрування.

Якщо відомий розв'язок в області теплопереходу, то розв'язок в області віток може бути знайдений з (4) – (10) розв'язком простої лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} A_{i,n} \sin \frac{\lambda_j L}{a_n} + B_{i,n} \cos \frac{\lambda_j L}{a_n} = T_{cer} \\ A_{i,p} \sin \frac{\lambda_j L}{a_p} + B_{i,p} \cos \frac{\lambda_j L}{a_p} = T_{cer} \\ A_{i,n} \sin \frac{\lambda_j (L + L_i)}{a_n} + B_{i,n} \cos \frac{\lambda_j (L + L_i)}{a_n} - A_{i,p} \sin \frac{\lambda_j (L + L_i)}{a_p} - B_{i,p} \cos \frac{\lambda_j (L + L_i)}{a_p} = 0 \\ A_{i,n} \frac{\kappa_n \lambda_j}{a_n} \cos \frac{\lambda_j L}{a_n} - B_{i,n} \frac{\kappa_n \lambda_j}{a_n} \sin \frac{\lambda_j L}{a_n} + A_{i,p} \frac{\kappa_p \lambda_j}{a_p} \cos \frac{\lambda_j L}{a_p} - B_{i,p} \frac{\kappa_p \lambda_j}{a_p} \sin \frac{\lambda_j L}{a_p} = \frac{\kappa_c}{K_{i-1,i}} D_{cer} \end{cases} \quad (18)$$

Тут введені позначення:

$$L = \sum_{m=0}^{m=i} (C_m + L_m) \quad i = 0, 1, \dots, n; L_0 = 0,$$

$$T_{cer} = \varphi_{i-1,c}(L) \quad D_{cer} = A_{i-1,c} \frac{\lambda_j}{a_c} \cos \frac{\lambda_j L}{a_c} - B_{i-1,c} \frac{\lambda_j}{a_c} \sin \frac{\lambda_j L}{a_c}. \quad (19)$$

Якщо відомий розв'язок в області віток, то в області теплопереходу знаходимо з виразів (4) – (10):

$$B_{i,c} = T_{mater} \cos \frac{\lambda_j L}{a_c} - q_{mater} \sin \frac{\lambda_j L}{a_c}, A_{i,c} = T_{mater} \sin \frac{\lambda_j L}{a_c} + q_{mater} \cos \frac{\lambda_j L}{a_c}, i = 1, \dots, n, \quad (20)$$

де використані наступні позначення:

$$L = \sum_{m=1}^i (C_{m-1} + L_m), T_{mater} = A_{i,ty} \sin \frac{\lambda_j L}{a_{ty}} + B_{i,ty} \cos \frac{\lambda_j L}{a_{ty}}, q_{mater} = \frac{a_c K_{i,i} (\kappa_{ni} D_{ni} + \kappa_{pi} D_{pi} + \bar{\alpha}_i J T_{mater})}{\kappa_c \lambda_i},$$

$$D_{ty,i} = A_{i,ty} \frac{\lambda_j}{a_{ty}} \cos \frac{\lambda_j L}{a_{ty}} - B_{i,ty} \frac{\lambda_j}{a_{ty}} \sin \frac{\lambda_j L}{a_{ty}} \quad ty = n, p. \quad (21)$$

Розв'язок для 0 кераміки має вигляд

$$\varphi_{0,c}(x) = \sin \frac{\lambda_j x}{a_c}, x \in [0, D_0], \quad (22)$$

де коефіцієнт  $A_{0,c} = 1$ , що не обмежує спільності розв'язку, так як в рівняння для знаходження  $\lambda_j$  входить відношення коефіцієнтів.

Розв'язуючи послідовно рівняння (18) і (20) для всіх каскадів, можна одержати рівняння для знаходження характеристичних чисел

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{\lambda_i \left( C_0 + \sum_{i=1}^n (C_i + L_i) \right)}{a_c} \right] - \frac{A_{n,c}}{B_{n,c}} = 0 \quad (23)$$

Часи релаксації пов'язані з характеристичними числами відповідно до (15):

$$\tau_i = \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^2. \quad (24)$$

Результуючий час релаксації модуля вибирається як найбільше з набору часів (24).

У вищенаведених рівняннях температурні залежності термоелектричних параметрів не враховуються. Для врахування температурних залежностей був прийнятий наближений компромісний розв'язок. Значення термоелектричних параметрів для кожного каскаду вважалися постійними, але їх значення бралися для  $i$  каскаду за температури віток на «гарячому» теплопереході  $T_i$ .

### Експериментальні результати

Розрахунковий час релаксації було порівняно з експериментально отриманими даними, а також з даними попередніх робіт. У табл. 1 наведено отримані величини для двохкаскадних модулів 2МС06-023-12 і 2МС06-043-05. Тут  $I$  - вимірювальний струм,  $\tau$  - величина часу релаксації, розрахована за вищевикладеним методом,  $\tau_{\text{exp}}$  - вимірюваний час релаксації,  $\tau_{\text{appr}}$  - наближена величина часу релаксації, розрахована як сума максимальних покаскадних часів при нульовому струмі [1,2]. Усі величини отримані за температури гарячого теплопереходу  $50^{\circ}\text{C}$  у вакуумі.

Таблиця 1

Експериментальні й розрахункові величини часів релаксації

ТЕ модуль	$I$ , мА	$\tau_{\text{exp}}$ , с	$\tau$ , с	$\tau_{\text{appr}}$ , с
2МС06-023-12	300	9.94	9.50	12.7
2МС06-043-05	700	3.19	3.68	3.22

У розрахунках використовувалися такі параметри: теплоємність термоелектричного матеріалу  $0.13$  Дж/г, густина –  $7.5$  г/см<sup>3</sup>, для кераміки –  $0.8$  Дж/г і  $3.5$  г/см<sup>3</sup>, для припою відповідно  $0.17$  Дж/г і  $9.3$  г/см<sup>3</sup>, товщина кераміки  $0.5$  мм.

Виміри проводилися в такий спосіб. За даного струму вимірювалася залежність температури на ТЕ модулі від часу й визначалася максимальна різниця температур  $\Delta T_{\text{max}}$ . Далі будувалася залежність  $\ln(1 - \Delta T / \Delta T_{\text{max}})$ , і за зворотною величиною тангенса нахилу прямої лінійної апроксимації визначалося  $\tau_{\text{exp}}$ .

Рисунки 2, 3 пояснюють експериментальне знаходження часу релаксації.

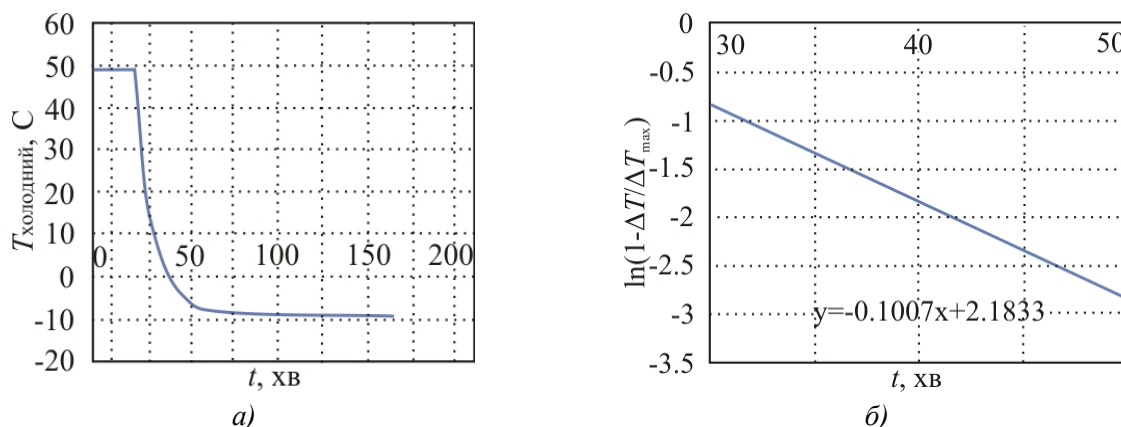


Рис. 2. До знаходження часу релаксації  $\tau_{\text{exp}}$  ТЕ модуля 2МС06-023-12.

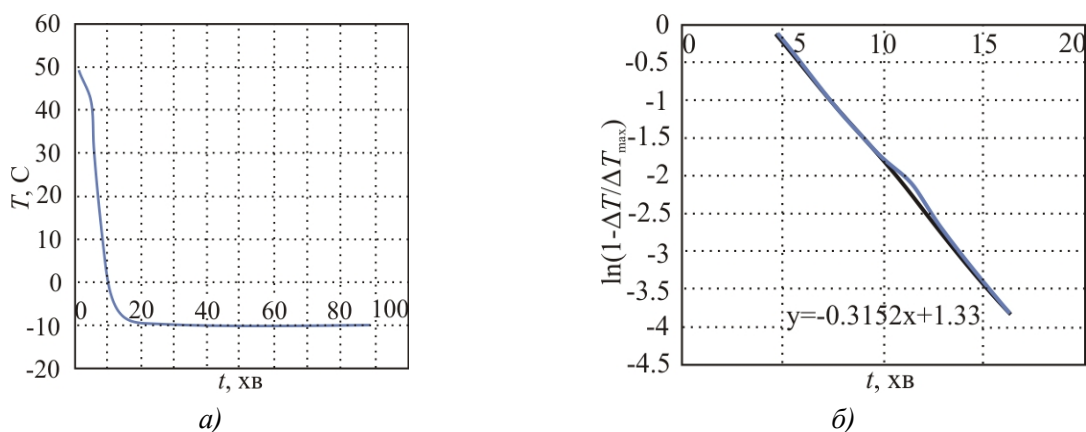


Рис. 3. До знаходження часу релаксації  $\tau_{\text{exp}}$  ТЕ модуля 2МС06-043-05.

Важливо відзначити особливу специфіку вимірювання часу релаксації багатокаскадних модулів. Для цієї мети метод вимірювання встановлення стаціонарної напруги [2], загалом кажучи, не правочинний, хоча для однокаскадного модуля, у якому напруга термоЕРС пропорційна різниці температур, він, безумовно, підходить. Зі встановленням стаціонарного значення напруги ще якийсь час триває різноспрямована зміна різниці температур на вітках, тому час релаксації, вимірюваний за напругою термоЕРС, виявляється заниженим.

## Висновок

Розроблений метод являє собою загальний спосіб розрахунків часу релаксації ТЕ модуля з будь-яким числом каскадів для довільного струму.

Проведено порівняння розрахункових результатів з величинами часів релаксації, виміряними для двохкаскадних модулів. Розраховані величини перебувають у задовільному узгодженні з теоретичними. Однак слід зазначити, що необхідно поповнити число експериментальних даних для модулів із числом каскадів більшим двох і провести подальший порівняльний аналіз.

Важливо, що вдалося показати, що наближена величина часу релаксації, розрахована як сума максимальних покаскадних часів за нульового струму [1, 2], є досить доброю апроксимацією. Для термінових практичних завдань оцінки динаміки перехідних процесів у ТЕ модулях цей наближений метод цілком можна застосовувати.

## Література

1. Драбкін І.А. Переходные процессы в охлаждающих термоэлектрических модулях и устройствах. Драбкін І.А. // Сборник докладов "Термоэлектрики и их применение", С.-Петербург, 2002, С. 287-295.
2. Володин В.В. Методы исследования временной динамики термоэлектрических модулей в Z-метрии. / В.В. Володин, И.А. Драбкин, Л.Б. Ершова, Д.А. Кондратьев // Сборник докладов "Термоэлектрики и их применение", С.-Петербург, 2002, С. 264-269.
3. Равич Ю.И. Метод расчета времени переходного процесса многоступенчатой охлаждающей батареи. Ю.И. Равич, А.И. Гордиенко // ФТП. – 2007. – Т.41, № 1. – С. 112-116

Надійшла до редакції 24.02.2014