

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрены задачи упругопластического деформирования прямоугольных пластин с отверстиями различных конфигураций (круглые и прямоугольные) при сжатии. Исследования основаны на использовании модифицированного вариационного метода для построения специальных итерационных процессов, на каждом шаге которых решаются задачи теории упругости с помощью проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов. Проведен анализ влияния расстояния между отверстиями на напряженно-деформированное состояние пластины и развитие зон пластичности в процессе возрастания нагрузки.

Розглянуто задачі пружно-пластичного деформування прямокутних пластин з отворами різних конфігурацій (круговими та прямокутними) при стисненні. Дослідження ґрунтуються на застосуванні модифікованого варіаційного методу для побудови спеціальних ітераційних процесів, що використовують розв'язки задач теорії пружності. Останні знаходяться на основі проєкційно-ітераційного варіанту метода скінченних елементів. Проведено аналіз впливу відстані між отворами на напружено-деформований стан пластины та розвиток зон пластичності в процесі зростання навантаження.

Problems on a plasto-elastic deformation of rectangular plates with different holes (circular and rectangular ones) under compression are investigated. The research is based on application of a modified variational method for construction of special iterative processes at each step of which problems of the elasticity theory are solved using the projective-iterative version of the finite-element method. The influence of the distance between holes on the plate stressed-strained state and the growth of plasticity zones, when the load is growing, is analyzed.

Конструкции различных отраслей техники, как правило, являются неоднородными. Одни из основных видов неоднородности – отверстия различной формы. Такие отверстия являются конструктивно необходимыми (вырезы, люки) или могут возникать в различных случаях эксплуатации и при технологических операциях изготовления. Отверстия моделируют также нарушения сплошности (трещины, разрезы) в различных моделях механики разрушения. Наличие отверстий приводит к концентрации напряжений. При этом существенно возрастает реальная опасность преждевременного разрушения конструкции [1,2].

При высоких уровнях нагрузок в элементах конструкций возникают пластические деформации. Реальные запасы прочности и ресурс конструкций могут быть определены только при их учете. Необходимость учета пластических деформаций приводит к существенному усложнению методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и несущей способности [3 – 6]. В особой мере это относится к элементам конструкций с отверстиями. Как правило, аналитические методы расчета основаны на методах упругих решений (дополнительных нагрузок, переменных параметрах упругости, дополнительных деформаций), вариационных методах [7, 8], которые сводят решение упругопластических задач к решению последовательности задач теории упругости с переменными параметрами НДС и механических характеристик, которые меняются на каждом этапе соответствующего процесса последовательных приближений.

Одним из эффективных численных методов решения задач механики сплошной среды является метод конечных элементов (МКЭ) [9 – 11]. Проекционно-итерационные схемы расчета при использовании МКЭ позволяют существенно (в несколько раз) снизить время счета на ПК [12, 13], что является важным при численном моделировании процессов деформирования элементов конструкции с отверстиями и при проектировочных расчётах. Форму конечного элемента целесообразно выбирать, исходя из особенностей задачи.

В [14, 15] проведено исследование влияния формы конечного элемента на вычислительную эффективность предложенных схем расчёта. Решение задачи теории упругости для пластины, ослабленной прямоугольным и круговым отверстиями, получено в [16]. Вопросы учета пластического деформирования для одного отверстия рассмотрены в [17, 18].

В настоящей работе рассмотрена задача определения НДС пластины с двумя прямоугольными или круговыми отверстиями, при учете пластического деформирования материала. Проведен анализ влияния расстояния между отверстиями на НДС пластины и развитие зон пластичности в процессе возрастания нагрузки. Результаты могут быть распространены на пологие оболочки с отверстиями. Рассмотренные задачи моделируют многие сложные вопросы прочности и устойчивости тонкостенных элементов неоднородных конструкций различных отраслей техники.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о НДС изотропной прямоугольной пластины, ослабленной двумя вырезами (круговыми или прямоугольными), центры которых симметричны относительно начала координат и отстоят друг от друга на расстоянии l . На пластину действует распределенная сжимающая нагрузка P_1 , приводящая к возникновению пластических деформаций (рис. 1). Параметры пластины таковы, что потери устойчивости при сжатии не происходит ($P_1 \sim$ в 2,5 раза меньше чем критическое напряжение) [19].

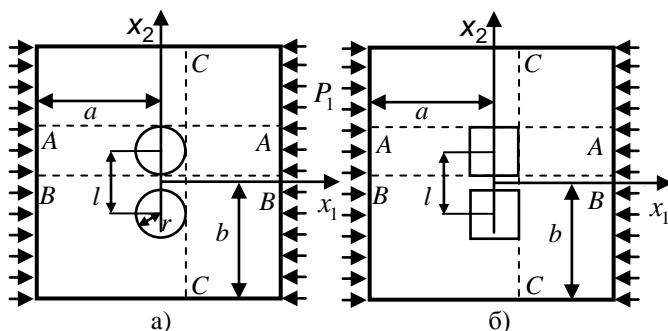


Рис. 1

В процессе решения необходимо определить неоднородное НДС пластины, границы между зонами упругого и пластического деформирования.

Метод решения. Для решения поставленной задачи применим модифицированный вариационный метод [7, 20], при учете пластических деформаций будем использовать метод переменных параметров упругости с построением соответствующих схем последовательных приближений [8]. В каждом приближении решаем неоднородную задачу теории упругости, т. е. находим минимум функционала [20]

$$\Pi = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{2\bar{G}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\bar{G}}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_2 dx_1 - \int_{-b}^b P_1 u_1 dx_2, \quad (1)$$

где \bar{G} , $\bar{\nu}$ – переменные модуль сдвига и коэффициент Пуассона, которые рассматриваются как известные функции координат и определяются из предыдущего приближения, u_1 , u_2 – перемещения пластины в направлении осей Ox_1 и Ox_2 .

В начальном приближении $\bar{G} = G$, $\bar{\nu} = \nu$, где G , ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона для данного материала. Для всех последующих приближений

$$\bar{G} = \frac{1}{2\psi}, \quad \bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu},$$

где $\psi = 3\varepsilon_i^e / (2\sigma_i)$, σ_i , ε_i^e – интенсивность напряжений и деформаций соответственно (рис. 2).

Интенсивность деформаций ε_i^e находим, используя решение задачи теории упругости предыдущего приближения

$$\varepsilon_i^e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1 - \bar{\nu} + \bar{\nu}^2}{3(1 - \bar{\nu})^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1}{4}\gamma_{12}^2},$$

а значение σ_i определяем из диаграммы деформирования. Схематично диаграмма изображена на рис. 2. Процесс заканчивается при достижении заданной точности между двумя соседними приближениями.

Для начального приближения минимизация функционала (1) проводится

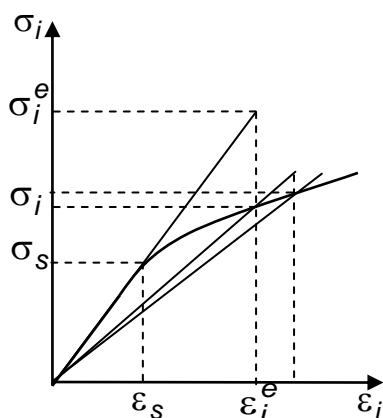


Рис. 2

на основе проекционно-итерационного варианта МКЭ [12 – 18, 21 – 23], основная идея которого состоит в том, что исходная экстремальная задача для функционала (1) аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью дискретных экстремальных задач для функций многих переменных. Для решения каждой из полученных задач применяется метод последовательной верхней релаксации [24] по методике [25], согласно которой не требуется хранения матрицы жёсткости системы в явном виде, а значения перемещений u и v в текущем узле (i, j) выражаются через узловые значения перемещений четырёх

примыкающих к данному узлу конечных элементов [21]. Для всех последующих приближений минимизация функционала (1) проводится обычным МКЭ с использованием процесса последовательной верхней релаксации.

При решении задач с концентраторами напряжений возле отверстий целесообразно использование адаптивных сеток [22, 23].

Численный анализ. На основе предложенного метода решения поставленной задачи была разработана программа на языке C++. Расчеты проведены на ПК Turion 64×2 (2 GHz, 2×512 Kb L2 cache) с 2 Gb оперативной памяти

для пластин со сторонами $2a = 2b = 0,3$ м, прямоугольными отверстиями размером $0,04 \times 0,04$ м, круглыми отверстиями радиуса $0,02$ м, материалом – алюминиевый сплав Д16Т (предел пропорциональности $\sigma_p = 200$ МПа). Сжимающие нагрузки P_1 изменялись от 140 МПа до 180 МПа. Исследовано НДС пластины и развитие зон пластичности в зависимости от расстояния между центрами отверстий ($l = 0,06$ м; $0,08$ м; $0,1$ м; $0,12$ м). Проекционно-итерационная схема МКЭ была реализована на вложенных вдвое конечно-элементных равномерных сетках (31×31 , 61×61 , 121×121 , 241×241 , 481×481 , 921×921 , 1841×1841) и адаптивных сетках (37×43 , 73×85 , 145×169 , 289×337 , 577×673 , 1153×1345 , 2305×2689) из прямоугольных лагранжевых элементов первой степени, с точностью вычислений 10^{-5} , параметром релаксации $\omega = 1,9$.

Решение задачи для пластины с двумя круговыми отверстиями при $P_1 = 180$ МПа, $l = 0,12$ м было получено при использовании проекционно-итерационной схемы МКЭ на последовательности 7-ми адаптивных сеток за 16 мин 32 с, исходя из нулевого начального приближения, которое было задано на самой грубой сетке (37×43), а при других значениях P_1 и l для получения решения задачи потребовалось меньше времени счета на ПК. При сравнении результатов, полученных на последовательности 5-ти, 6-ти и 7-ми адаптивных сетках, наблюдается асимптотическая сходимость. В [16] проведено сравнение аналитического решения [26] для упругой пластины с двумя круговыми отверстиями с решением, полученным при использовании проекционно-итерационной схемы реализации МКЭ. Отличие составляет не более 5% .

На рис. 3 показано распределение коэффициентов напряжений для пластины с двумя круговыми отверстиями в характерных сечениях, обозначенных на рис. 1, а), при $P_1 = 180$ МПа и для разных расстояний между отверстиями (линия 1 – $l = 0,06$ м, линия 2 – $l = 0,08$ м, линия 3 – $l = 0,1$ м, линия 4 – $l = 0,12$ м).

На рис. 4 показано развитие зон пластичности (заштрихованы) для двух круговых отверстий (а) $l = 0,1$ м, б) $l = 0,12$ м) при увеличении нагрузки P_1 . При $P_1 = 140$ МПа, $l = 0,12$ м влияние отверстий друг на друга незначительно и вокруг каждого отверстия развиваются несвязанные зоны пластичности. При уменьшении l взаимовлияние отверстий увеличивается и наблюдается смыкание зон пластичности (рис. 4, а). Общая зона пластичности образуется и в случае увеличения нагрузки (рис. 4, б).

Для пластины с двумя прямоугольными отверстиями время счёта на ПК с использованием проекционно-итерационной схемы реализации МКЭ на последовательности 7-ми адаптивных сеток при $P_1 = 180$ МПа, $l = 0,12$ м составляет 19 мин 23 с.

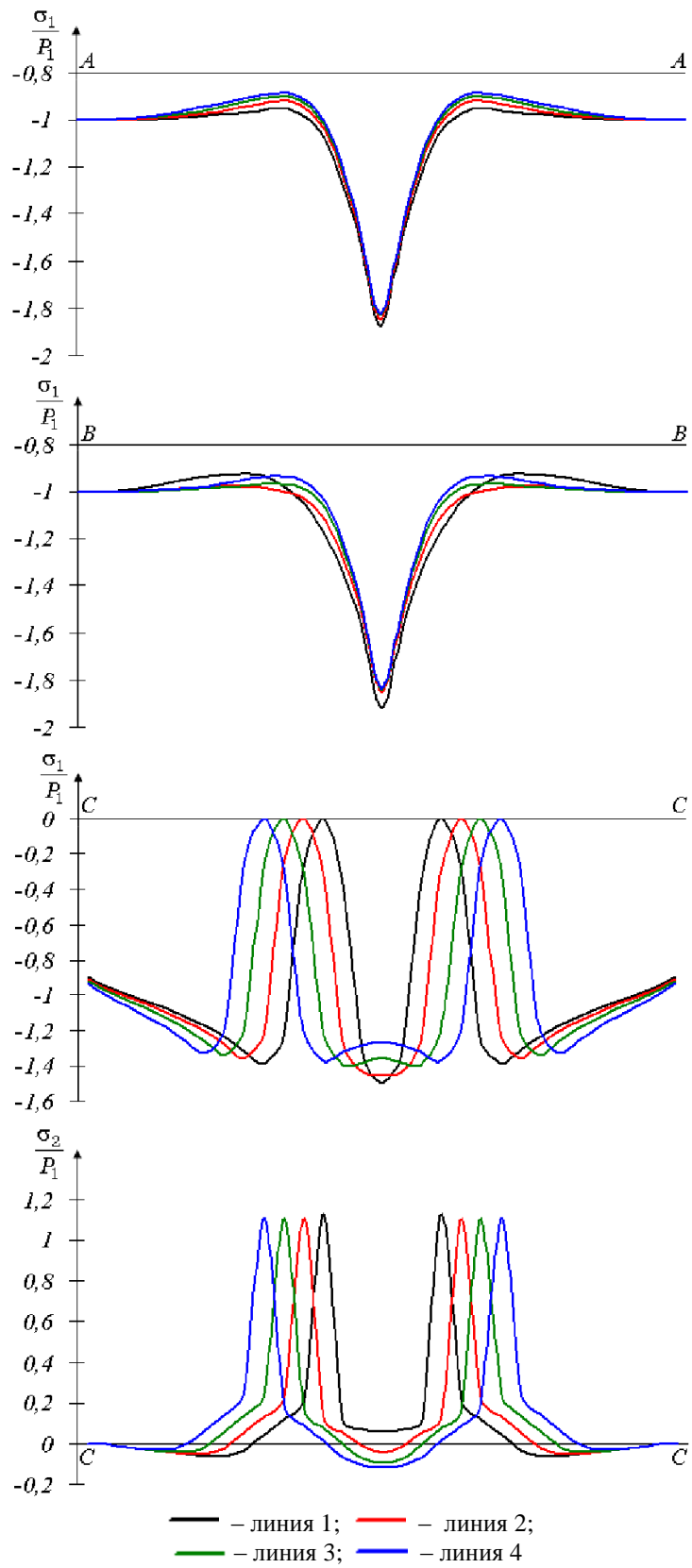


Рис. 3

На рис. 5 показано распределение коэффициентов напряжений для пластины с двумя квадратными отверстиями в характерных сечениях, обозначенных на рис. 1, б), при $P_1 = 180$ МПа и для разных расстояний между отверстиями (линия 1 – $l = 0,06$ м, линия 2 – $l = 0,08$ м, линия 3 – $l = 0,1$ м, линия 4 – $l = 0,12$ м).

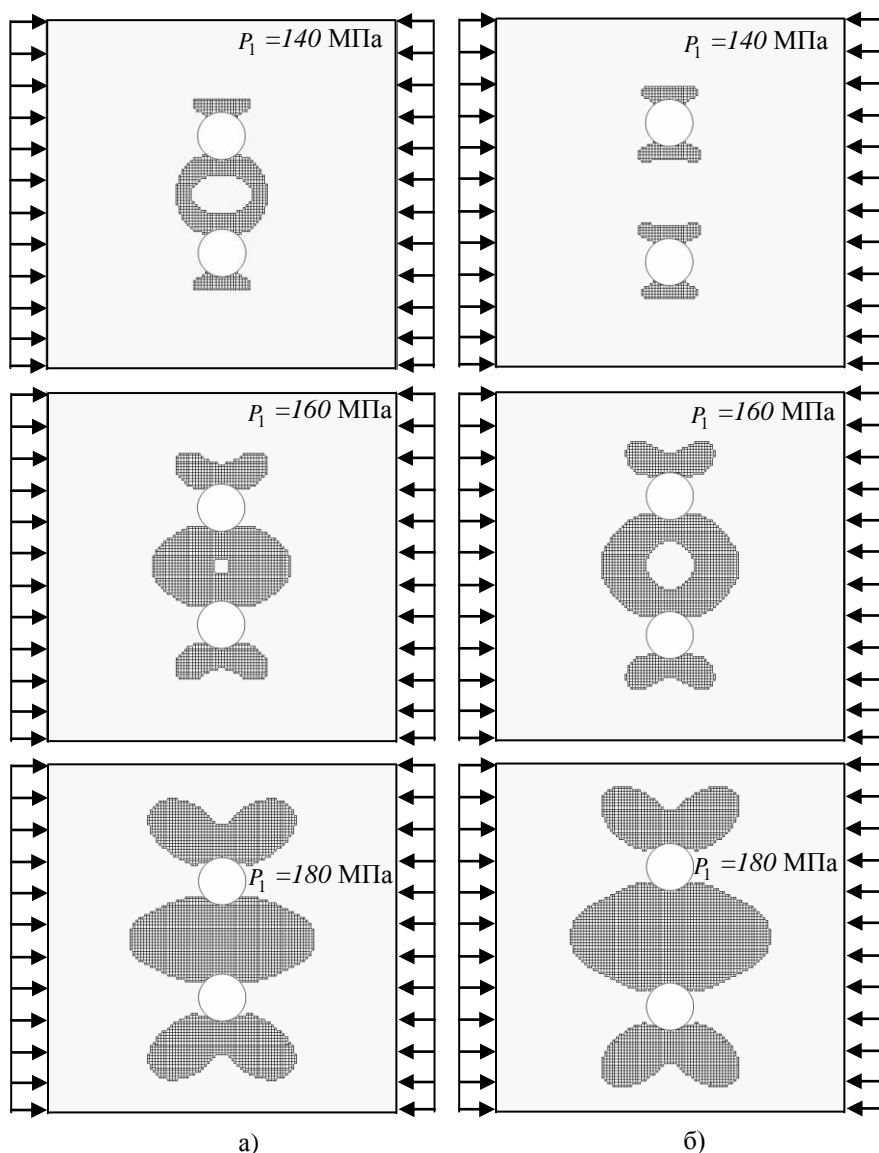


Рис. 4

На рис. 6 показано развитие зон пластичности при увеличении нагрузки P_1 для двух прямоугольных отверстий (а) при $l = 0,1$ м, б) при $l = 0,12$ м). Взаимовлияние прямоугольных отверстий в зависимости от расстояния между ними и приложенной нагрузки аналогично случаю круговых отверстий.

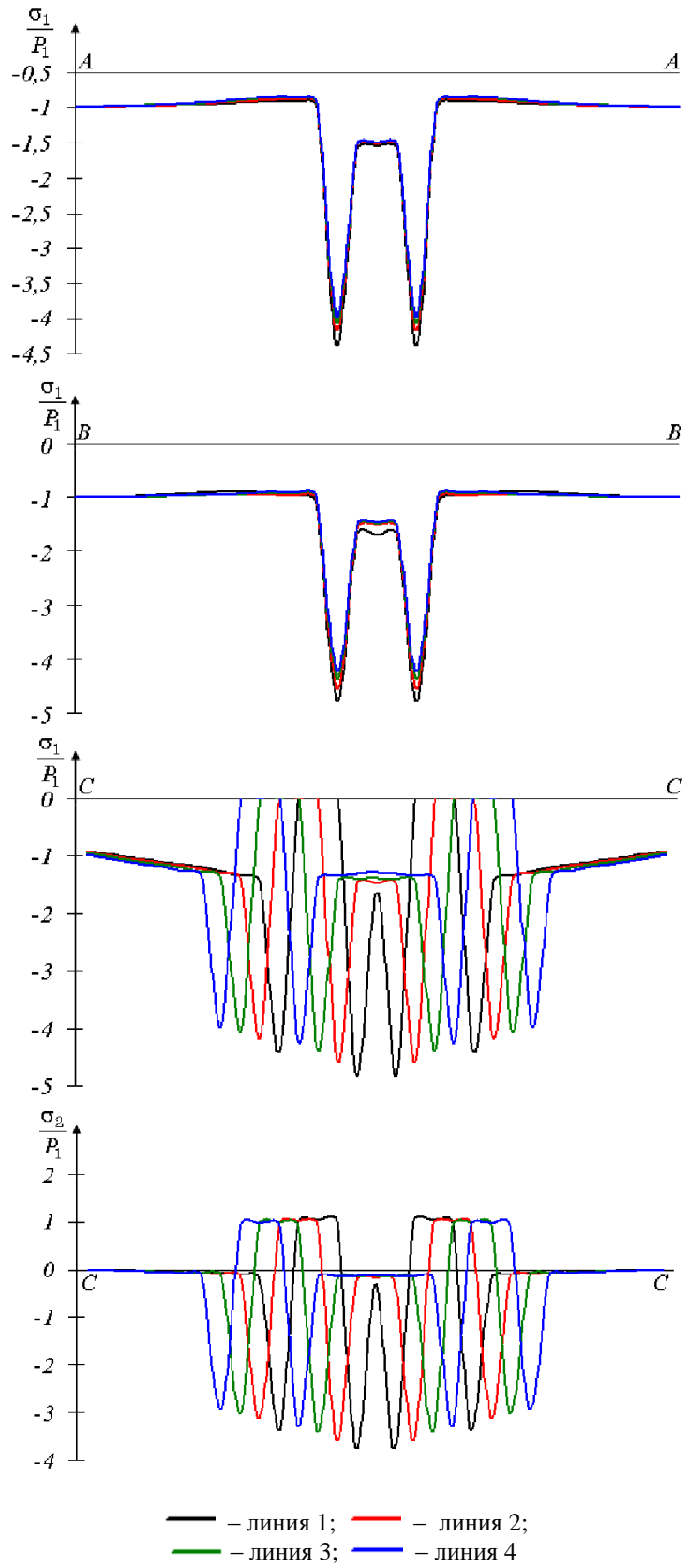


Рис. 5

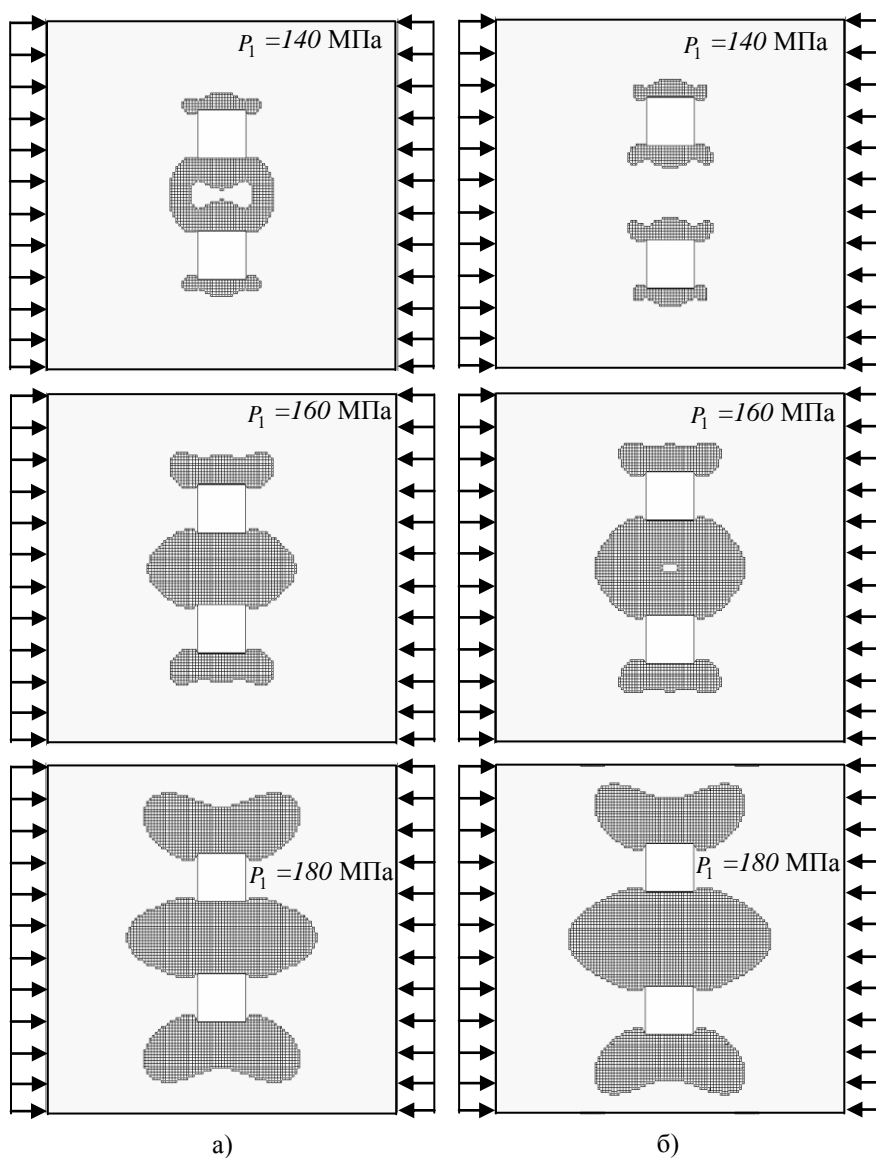


Рис. 6

Выводы. Разработана методика решения плоской задачи деформирования пластины с двумя отверстиями (круговыми или прямоугольными) при учете упругопластического деформирования материала на основе проекционно-итерационных схем реализации МКЭ. Проведен анализ влияния расстояния между отверстиями на напряженно-деформированное состояние пластины и развитие зон пластичности. Разработанный алгоритм и комплекс программ для ПК могут быть использованы при решении упругопластических задач для пластин с отверстиями различных типов и их взаимного расположения.

1. Преображенский И. Н. Вырезы в несущих конструкциях / И. Н. Преображенский, И. А. Цурпал. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.
2. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell structures with geometrical imperfections / V. S. Hudramovych // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 12. – P. 1323 – 1355.
3. Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
5. Гудрамович В. С. Устойчивость упруго-пластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
6. Гудрамович В. С. Предельный анализ элементов конструкций / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов, А. Ф. Деменков. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.
7. Качанов Л. М. Вариационные методы в теории пластичности / Л. М. Качанов // Механика твердого тела. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М., 1966. – Вып. 3. – С. 177 – 190.
8. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 51 – 73.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ./ Под ред. Б. Е. Победря / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
10. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А. С. Сахарова, И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
11. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
12. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56 – 61.
13. Гарт Э. Л. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей / Э. Л. Гарт, И. В. Борисовская // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – Д.: Вид-во ДНУ, 2004. – Вып. 8. – Т. 2. – С. 44 – 51.
14. Гудрамович В. С. Вплив форми скінченного елементу на обчислювальну ефективність проєкційно-ітераційних методів при розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності / В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт // Вісник Київськ. нац. унів. ім Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008, № 4. – С. 53 – 58.
15. Гудрамович В. С. Линейные и билинейные аппроксимации в проекционно-итерационном варианте метода конечных элементов для плоской задачи теории упругости / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, О. М. Рубинчик // Техническая механика. – 2009. – № 2. – С. 88 – 97.
16. Гудрамович В. С. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению упруго-пластических задач для пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконе // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д., 2009. – Вып. 10. – С. 76 – 83.
17. Гарт Э. Л. Исследование упругопластического деформирования пластины с прямоугольным отверстием с использованием итерационных схем реализации метода конечных элементов / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконе // Вісник Дніпропетровського унів. Сер.: Механіка. – 2009. – Вып. 13. – С. 29 – 35.
18. Гарт Э. Л. Розв'язування задач пружно-пластичної рівноваги пластин з прямокутним і круговим отворами на основі проєкційно-ітераційних схем реалізації методу скінчених елементів / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконе // Вісник Київськ. нац. унів. ім Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2009, № 3. – С. 52 – 57.
19. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. Пер. с англ. / Под ред. Э. И. Григолоука / Ф. Блейх. – М.: Физматгиз, 1959. – 544 с.
20. Угодчиков А. Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек / А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких. – К.: Наук. думка, 1971. – 220 с.
21. Гарт Э. Л. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконе // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2008. – Вып. 12. – С. 34 – 42.
22. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток / Э. Л. Гарт // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 92 – 100.
23. Гудрамович В. С. Повышение вычислительной эффективности проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов при использовании адаптивных сеток / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконе // Theoretical Foundation of Civic Engineering. – Warsaw, 2009. – № 17. – P. 99 – 104.
24. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
25. Кузьменко В. И. Трёхмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета / В. И. Кузьменко // Изд. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1984. – № 4. – С. 105 – 112.
26. Мокряков В. В. Метод мультипольных разложений в задачах теории упругости для плоскости с круговым отверстием: Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук / В. В. Мокряков. – М.: МГУ, 2008. – 136 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровский национальный университет
им. Олеса Гончара
Днепропетровск

Получено 16.09.2009,
в окончательном варианте 03.11.2009