УДК 514.7

Аушева Н. М

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ СІТОК НА ОСНОВІ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ

У роботі запропоновано новий метод побудови плоских ортогональних та ізотермічних координатних сіток на основі ізотропних дробово-раціональних кривих n-го порядку. Ізотропні дробово-раціональні криві визначаються на основі ізотропних ланок характеристичних многокутників. Наведені умови для визначення координат реперних точок. Отримано співвідношення для утворення таких сіток із застосуванням конформного відображення.

Ключові слова: *дробово-раціональна крива, ізотропна крива, крива Без'є, ортогональна сітка, ізотермічна сітка.*

1. Вступ

При конструюванні поверхонь часто виникає питання одержання поверхонь з конкретним типом координатної сітки, яка має специфічні властивості. Ці властивості, як правило, допомагають спростити вирази першої та другої квадратичних форм поверхні. Постійне доповнення апарату формоутворення таких сіток, призводить до полегшення розв'язання прикладних задач, які спираються на диференціальні властивості поверхонь. Для інтерактивного керування формою таких сіток необхідно застосовувати параметричні криві, які будуються за допомогою характеристичних многокутників. Використання дробово-раціональних кривих дозволяє керувати формою за допомогою ваги точок.

2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Теорія мінімальних кривих (ізотропних) була заснована Софусом Лі [1]. Ізотропна геометрія була розроблена Струбекером в 1940 році. Основні положення знаходяться в монографії [2]. Моделюванням та дослідження ізотропних кривих у комплексному просторі займався Картан та його послідовники [1, 3], основна увага приділялась побудові ізотропних кривих на основі рухомого репера. Вейєрштрасс запропонував безквадратурне подання ізотропних кривих [4].

Конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональності сіток координатних ліній та ліній кривини присвячено дисертацію [5]. Розглянуто послідовність утворення плоских ортогональних сіток різними способами, перетворення їх у поверхні та подальше конформне перетворення одержаних поверхонь із збереженням вказаних властивостей. У роботах [6 – 9] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих та кривих Без'є. В монографії [10] пропонується розглядати застосування функцій комплексної змінної для графічного подання узагальнених паралельних множин у вигляді сіток квазіпаралельних ліній.

Аналіз зазначених робіт свідчить, що побудова координатних сіток зі специфічними властивостями є адаптованим до конкретної прикладної задачі.

Метою даної роботи є розробка способу конструювання плоских сіток на основі ізотропних дробово-раціональних кривих. Використання дробово-раціональних кривих дозволить зробити метод генерації сітки гнучким до зміни умов фізичного процесу.

Для досягнення поставленої мети необхідно знайти умови для побудови ізотропної дробово-раціональної кривої, методи побудови сітки на основі ізотропної кривої та провести дослідження коефіцієнтів першої квадратичної форми.

3. Результати досліджень

Будемо будувати сітки на основі плоских кривих. Нехай дробово-раціональна крива *n*-го порядку задана у вигляді:

$$\mathbf{r(t)}=\frac{\sum_{j=0}^{n}\mathbf{r_j}w_jJ_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^{n}w_jJ_{n,j}(t)},\quad \text{де}\quad J_{n,j}(t)=\frac{n!}{j!(n-j)!}t^j(1-t)^{n-j},\qquad (1)$$

де $\mathbf{r_j}=\begin{bmatrix}x_j & y_j\end{bmatrix}$ - реперні точки характеристичного многокутника, w_j - ваги точок.

Ізотропною або мінімальною називається крива, довжина якої дорівнює нулю, тобто

$$x(t)'^2+y(t)'^2=0. \qquad (2)$$

Будемо будувати дробово-раціональну криву на основі ізотропних сторін характеристичного многокутника:

$$\begin{cases}(x_{j+1}-x_j)=i(y_{j+1}-y_j),\\ (x_0-x_n)=i(y_0-y_n),\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}(x_{j+1}-x_j)=-i(y_{j+1}-y_j),\\ (x_0-x_n)=-i(y_0-y_n),\end{cases}\quad \text{де}$$

$$j = 0..(n-1). \tag{3}$$

Підставимо умову (3) у вираз (1), будемо мати:

$$x(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} x_j w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j J_{n,j}(t)}, \quad y(t) = y_0 + \frac{i\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0) w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j J_{n,j}(t)}. \tag{4}$$

Введемо заміни:

$$u_x = \sum_{j=0}^{n} x_j w_j J_{n,j}(t), \quad u_y = i\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0) w_j J_{n,j}(t),$$

$$v = \sum_{j=0}^{n} w_j J_{n,j}(t).$$

Візьмемо похідні та підставимо їх значення у вираз для довжини кривої, одержимо:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{(u'_x v - v' u_x)^2 + (u'_y v - v' u_y)^2}{v^4}. \tag{5}$$

Порівняємо у виразі (5) $u'_x v - v' u_x$ та $u'_y v - v' u_y$. Для цього знову введемо заміни:

$$\begin{aligned} &A = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j J_{n,j}(t),\ B = n(x_1 w_1 (1-t)^{n-1} + \\ &+\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} w_{j+1} - x_j w_j)\cdot J_{n-1,j}(t)), \\ &C = \sum_{j=1}^{n} w_j J_{n,j}(t),\ D = n(w_1 (1-t)^{n-1} + \\ &+\sum_{j=1}^{n-1}(w_{j+1} - w_j)\cdot J_{n-1,j}(t)), \end{aligned} \tag{6}$$

де $J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}$,

$$J_{n-1,j}(t) = \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^j (1-t)^{n-1-j}.$$

Підставимо (6) у $u'_x v - v' u_x$ та $u'_y v - v' u_y$. Будемо мати:

$$\begin{aligned} &u'_x v - v' u_x = B(w_0 (1-t)^n + C) - A(-n w_0 (1-t)^{n-1} + D) - \\ &-x_0 w_0 (1-t)^{n-1} \cdot (nC + (1-t)D), \\ &u'_y v - v' u_y = i\{B(w_0 (1-t)^n + C) - A(-n w_0 (1-t)^{n-1} + D) - \\ &-x_0 w_0 (1-t)^{n-1} \cdot (nC + (1-t)D)\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Як бачимо у виразах (7) праві частини відрізняються лише на уявну одиницю. Підставляючи (9) у (6) одержимо у чисельнику нуль. Тобто довжина кривої буде дорівнювати нулю.

Для побудови сітки використаємо ізотропну криву в якості напрямної кривої. Для цього підставимо замість параметру t деяку комплексну змінну. Будемо називати конформною заміною, якщо замість параметру t підставимо комплексну змінну u+iv: t=u+iv. В результаті такої заміни одержимо функцію $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. Якщо відокремити дійсну частину від уявної та відобразити на площині то одержимо дві сітки: $\mathbf{r}_{Re}(u,v) = \mathrm{Re}(\mathbf{r}(u,v))$ та $\mathbf{r}_{Im}(u,v) = \mathrm{Im}(\mathbf{r}(u,v))$, напрямними кривими в яких будуть відповідно дійсна частина та уявна частина ізотропної кривої. Дослідимо властивості дійсної сітки, яка побудована на основі кубічної дробово-раціональної плоскої кривої, тобто підставимо в рівняння (1) n=3 та виконаємо конформну підстановку $t = u + iv$:

$$\begin{aligned} &x(u+iv) = \frac{\sum_{j=0}^{3} x_j w_j J_{n,j}(u+iv)}{\sum_{j=0}^{3} w_j J_{n,j}(u+iv)}, \\ &y(u+iv) = y_0 + \frac{I\sum_{j=1}^{3}(x_j - x_0) w_j J_{n,j}(u+iv)}{\sum_{j=0}^{3} w_j J_{n,j}(u+iv)}, \end{aligned} \tag{8}$$

де $J_{3,j}(u+iv) = \frac{3!}{j!(3-j)!}(u+iv)^j (1-u-iv)^{3-j}$.

Проаналізуємо одержану сітку. Для цього розрахуємо значення часткових похідних:

$$\begin{aligned} &x_{Reu}(u,v) = x_{Imv}(u,v),\ x_{Rev}(u,v) = -x_{Imu}(u,v), \\ &y_{Reu}(u,v) = y_{Imv}(u,v),\ y_{Rev}(u,v) = -y_{Imu}(u,v), \\ &w_{Reu}(u,v) = w_{Imv}(u,v),\ w_{Rev}(u,v) = -w_{Imu}(u,v). \end{aligned} \tag{9}$$

Застосовуючи вирази (9) та виконавши аналогічні заміни для дробово-раціональних кривих з рівнянь (6) одержимо вираз:

$$x_v(u,v) = y_u(u,v) \quad x_u(u,v) = -y_v(u,v). \tag{10}$$

Рівняння (10) є аналогом умови Коши-Рімана. Тобто одержимо ортогональну та ізотермічну сітку.

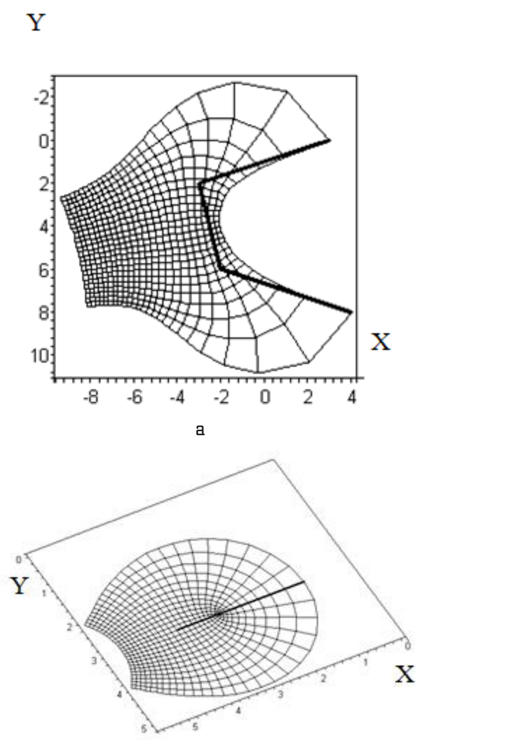
Одержані рівняння підставимо у вирази для першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} &F = x_u(u,v)x_v(u,v) + y_u(u,v)y_v(u,v) = \\ &= x_u(u,v)y_u(u,v) - y_u(u,v)x_u(u,v) = 0, \end{aligned}$$

$$E = x_u(u,v)^2 + y_u(u,v)^2 = y_v(u,v)^2 + y_u(u,v)^2,$$

$$G = x_v(u,v)^2 + y_v(u,v)^2 = y_u(u,v)^2 + y_v(u,v)^2, \text{тобто } E = G.$$

Значення $F = 0$ означає, що побудована сітка є ортогональною, а $E = G$ - що побудована сітка є ізотермічною. На рис. 1 відображені дійсні частини побудованих сіток.



а

б

Рис. 1. Дійсна частина плоскої сітки при завданні $t = u + iv$ на основі ізотропної дробово-раціональної кривої: а - 3-го порядку з $w_0 = 1$, $w_1 = 4$, $w_2 = 4$, $w_3 = 1$; б - 2-го порядку з $r_0 = r_2$, $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 1$

4. Висновки

Дослідження показали, що плоска дробово-раціональна крива буде ізотропною, якщо будуть ізотропними сторони характеристичного многокутника незалежно від значення ваги точок.

Застосування конформного відображення до ізотропної дробово-раціональної кривої породжує сітки на площині з властивістю ортогональності та ізотермічності, що відкриває нові можливості до вирішення фізичних задач. Застосування дробово-раціональних функцій дозволяє корегувати сітку без зміни геометричних значень точок. Подальші дослідження пов'язані з моделюванням мінімальних поверхонь.

Література

1. Картан, Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера [Текст]/ Э. Картан. - Изд-во Московского университета, 1963. - 366 с.
2. Sachs, H. Isotrope Geometrie des Raumes [Text]/ H. Sachs. - Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden,1990. - P. 317.
3. Wang, Z. Singularities of Focal Surfaces of Null Cartan Curves in Minkowski 3-Space [Text]/ Z. Wang, D. Pei, L. Chen, L. Kong, Q. Han. - Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, 2012. - P. 20.
4. Blaschke, W. Vorlesungen uber Di erentialgeometrie [Text]/ W. Blaschke. - Springer, Heidelberg, 1929. - Vol. 3. - P. 230.
5. Дзюба, В. В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини [Текст]: автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка"/Дзюба Валерій Віікторович. - К.: КНУБА, 2008. - 21 с.
6. Пилипака, С. Ф.Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої [Текст] / С. Ф. Пилипака, І. О. Коровіна // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Вип.4, Т. 39. - Мелітополь: ТДАТУ, 2008. - С. 30-36.
7. Аушева, Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є [Текст]/ Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Вип. 88. - К.: КНУБА, 2011. - С. 57-61.
8. Аушева, Н. М. Моделювання мінімальних поверхонь Без`є [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Вип.4, Т. 50. - Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.
9. Аушева, Н. М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без`є на базі процесора SIMD-архітектури [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Вип.4, Т. 57. - Мелітополь: ТДАТУ, 2013. - С.10-16.
10. Шоман, О. В. Паралельні множини в геометр. моделюванні явищ і процесів [Текст]: монографія / О. В. Шоман. - Харків: НТУ «ХПІ», 2007. - 288 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ

В работе предложен новый метод построения плоских ортогональных и изотермических координатных сеток на основе изотропных дробно - рациональных кривых n-го порядка. Изотропные дробно - рациональные кривые определяются на основе изотропных сторон характеристических многоугольников. Приведены условия для определения координат реперных точек. Получено соотношение для образования таких сеток с применением конформного отображения.

Ключевые слова: дробно - рациональная кривая, изотропная кривая, кривая Безье, ортогональная сетка, изотермическая сетка.

Аушева Наталія Миколаївна, *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри проектування енергетичних процесів та систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***

Аушева Наталия Николаевна, *кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации проектирования энергетических процессов и систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***

Ausheva Natalia, *National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***