

УДК 536.3

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПОРОЖНИН У ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ ТА ДАНИХ ІЧ-ТЕРМОГРАФІЇ

В. Чекурін, О. Сінькевич

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3б, 79060 Львів, Україна
chekurin@iapmm.lviv.ua
dneb.acyg@gmail.com*

У статті розглядаються теоретичні основи та математичний апарат безконтактного методу неруйнівної ідентифікації геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини у циліндричному твердому тілі. Метод ґрунтується на збудженні в об'єкті стаціонарному тепловому процесу та вимірюванні температурного поля його поверхні засобами ІЧ-термографії. З використанням методу граничних інтегральних рівнянь побудована математична модель локального зондування об'єкта зосередженим тепловим потоком. В рамках моделі розроблений гранично-елементний алгоритм розв'язування прямих задач ідентифікації порожнини. На цій основі були досліджені інформативні ознаки температурного поля поверхні та можливості їх використання для ідентифікації порожнини. Було показано, що один з параметрів порожнини можна безпосередньо визначити з однієї із інформативних ознак. З урахуванням цього обернену задачу ідентифікації зведено до розв'язування системи двох нелінійних рівнянь. Розроблений ітераційний гранично-елементний алгоритм для розв'язування оберненої задачі, який базується на методі Ньютона. За допомогою числового експерименту досліджена ефективність розробленого підходу.

Ключові слова: ідентифікація порожнин, безконтактні методи, теплове зондування, обернені задачі, метод граничних елементів, ітераційні методи.

Вступ. Задача виявлення та ідентифікації дефектів твердих тіл у вигляді розривів суцільності має важливе практичне значення для багатьох прикладних дисциплін. Відомі ультразвукові методи, які реалізують шляхом реєстрації акустичних імпульсів, відбитих поверхнями розривів [7]. Проте ці методи передбачають акустичний контакт вимірювальної апаратури з поверхнею об'єкта, що обмежує сферу їх практичного застосування. До того ж уведення в об'єкт ультразвукових пучків необхідної конфігурації, реєстрація послідовностей відбитих сигналів, розділених малими проміжками часу, і вимірювання цих проміжків із високою точністю є доволі складні методично. Електромагнітні методи, зокрема вихроструміві [6], які, в принципі, можна реалізувати безконтактно, є зазвичай занадто чутливі до величини проміжку між пристроєм збудження-реєстрації сигналу та поверхнею об'єкта.

У зв'язку із цим актуальною є проблема створення методів ідентифікації параметрів розривів суцільності з використанням зондування об'єкта зовнішнім полем, що має дифузійну природу, наприклад, тепловим потоком. Ідея полягає у тому, що, діючи на об'єкт зовнішнім потоком тепла, збуджуємо в ньому тепловий процес. Неоднорідність теплофізичних властивостей об'єкта, яка спричинена наявністю дефекту, збуджує температурне поле. Вимірюючи це збурення на поверхні об'єкта, отримуємо інформативні параметри для ідентифікації параметрів дефекту.

Потоки теплової енергії з контрольованими потужністю та просторовим розподілом пучка можна досить легко створювати з допомогою ІЧ-лазерів, а сучасні методи ІЧ-термографії дозволяють з високою точністю безконтактно вимірювати температуру точок поверхні об'єкта [2, 3]. Це створює передумови для реалізації цілком безконтактних методів ідентифікації. Щоб оцінити можливість практичної реалізації такого підходу необхідно розробити математичні методи для визначення параметрів, які підлягають ідентифікації, на основі даних вимірювання температури поверхні об'єкта за заданих параметрів зондувальних теплових потоків.

У статті [8] розглянута модельна задача про зондування кругового циліндричного тіла із тунельною циліндричною порожниною за умов одночасного нагрівання області його поверхні та симетричного охолодження такої ж діаметрально протилежної їй області.

Метою статті є: а) побудова математичної моделі зондування об'єкта шляхом сканування його поверхні зосередженим тепловим потоком, за конвективного теплообміну його поверхні; б) формулювання прямих і обернених задач ідентифікації циліндричної тунельної порожнини в довгому циліндричному тілі на основі даних вимірювання температури поверхні з використанням методів ІЧ-термографії; в) розроблення методів розв'язування сформульованих задач із використанням методу граничних елементів; г) оцінка ефективності запропонованого підходу.

1. Математична модель теплового зондування об'єкта.

Розглядається циліндричне тіло з поперечним перерізом S_0 , обмеженим контуром Γ_0 . У тілі наявна циліндрична тунельна порожнина радіуса r_0 , з поперечним перерізом S_1 , обмежена колом Γ_1 . Вісь порожнини колінеарна до осі циліндричного тіла, її положення визначається полярними координатами (ρ_0, φ_0) . Тіло нагріває зовнішній тепловий потік густини $J_0 = J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\zeta)$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, який падає нормально на бічну поверхню тіла і не залежить від координати x_3 у напрямку осі циліндра. Охолодження тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температуру T_m якого вважаємо заданою.

Стационарний тепловий процес у тілі з порожниною описує наступна крайова задача:

$$\Delta T(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x} \in S_0 / S_1, \quad (1)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x} \in \Gamma_0} = J_0(\mathbf{x}) - h(T_m - T(\mathbf{x})), \quad (2)$$

$$-\kappa \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma_1} = -h(T_m - T(\mathbf{x})), \quad (3)$$

де h – коефіцієнт конвективного теплообміну, κ – коефіцієнт теплопровідності, \mathbf{n} – зовнішня нормаль, $J_0(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, Δ – двовимірний оператор Лапласа.

За відсутності порожнини температурне поле в суцільному тілі описує крайова задача (1), (2).

Задачі (1)-(3) та (1), (2) можна звести до таких граничних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_0} \left(\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) T(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) T(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ = \int_{\Gamma_0} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \left(\frac{J_0(\mathbf{x})}{\kappa} + \frac{h}{\kappa} T_m \right) dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\bar{T}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_0} \left(\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \bar{T}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \left(\frac{J_0(\mathbf{x})}{\kappa} + \frac{h}{\kappa} T_m \right) dl(\mathbf{x}) \quad (5)$$

де $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$, $r(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$, $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Зумовлене наявністю порожнини збурення температурного поля поверхні $\Delta T(\mathbf{x}) \equiv T(\mathbf{x}) - \bar{T}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta T(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_0} \left(\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \Delta T(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Delta T(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ = - \int_{\Gamma_1} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{T}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\bar{T}(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma_0} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{T}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_0} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \bar{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S_0, \quad (7)$$

$\bar{T}(\mathbf{x})$ – розв'язок рівняння (5).

Рівняння (5), (6) визначають математичну модель теплового зондування тіла.

2. Пряма та обернена задачі ідентифікації параметрів порожнини.

Пряма задача. Задані: контур Γ_0 , радіус r_0 і координати $x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$ центра контуру Γ_1 , коефіцієнт теплопровідності κ матеріалу тіла, функція $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ зондувального теплового потоку, температура T_m зовнішнього середовища та коефіцієнт конвективного теплообміну h ; знайти параметри збурення температурного поля поверхні $\Delta T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, які достатньо чутливі до змін геометричних параметрів порожнини r_0 , ρ_0 і φ_0 .

Пряма задача зводиться до послідовного розв'язування граничних інтегральних рівнянь (5) та (6) і визначення на основі отриманого розв'язку параметрів F_1, F_2, \dots збурення температурного поля поверхні, які можна використати як інформативні для формулювання задач ідентифікації параметрів порожнини.

Обернена задача. За відомими геометрією об'єкта, коефіцієнтами теплопровідності κ та конвективного теплообміну h , та заданими функцією $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ зондувального потоку і значеннями інформативних параметрів F_1, F_2, \dots знайти геометричні параметри порожнини, r_0 , ρ_0 і φ_0 .

3. Гранично-елементна модель теплового зондування.

Для розв'язування рівнянь (5), (6) застосуємо метод граничних елементів. Розглянемо далі випадок тіла у вигляді кругового циліндра радіуса R_0 .

Дискретизації границь Γ_0 та Γ_1 здійснюємо вузловими точками ζ_i , які утворюють множину лінійних елементів E_i , $i \in [1, N_\Gamma]$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $N_\Gamma \in \mathbb{Z}$. Виконуючи інтегрування, зведемо інтегральні рівняння (5), (6) до матричних рівнянь

$$\mathbf{M}_{(11)} \bar{\mathbf{T}}_{(1)} = \bar{\mathbf{B}}_{(1)} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{(11)} \Delta \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)} \Delta \mathbf{T}_{(2)} = \mathbf{B}_{(2)} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{(21)} \Delta \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)} \Delta \mathbf{T}_{(2)} = \mathbf{B}_{(3)}$$

Тут $\bar{\mathbf{T}}_{(1)}$ — вектор вузлових значень температур на зовнішній поверхні тіла без включення, $\Delta \mathbf{T}_{(1)}$ та $\Delta \mathbf{T}_{(2)}$ — вектори вузлових значень збурення температур на зовнішній поверхні тіла і на поверхні порожнини відповідно; $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ матриці розмірності $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_0}$, $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_1}$, $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_0}$, та $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_1}$, $\bar{\mathbf{B}}_{(1)}$, $\mathbf{B}_{(2)}$, та $\mathbf{B}_{(3)}$ — вектори розмірності $1 \times N_{\Gamma_0}$, $1 \times N_{\Gamma_0}$ та $1 \times N_{\Gamma_1}$ відповідно, де $N_{\Gamma_0} \in \mathbb{Z}$ — кількість елементів на границі Γ_0 , $N_{\Gamma_1} \in \mathbb{Z}$ — кількість елементів на границі Γ_1 .

Елементи матриць $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ визначаються інтегралами виду

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_\alpha(t) \left(\Phi(t_j, t) + \frac{h}{\kappa} \Theta(t_j, t) \right) dt, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_\alpha(t) \Phi(t_j, t) dt, \quad (\alpha = 1, 2), \quad \text{де} \quad \varphi_1(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i},$$

$\varphi_2(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ — кусково-лінійні базисні функції, $t_i, i = 1..N_\Gamma$ — координати вузлів на Γ .

Елементи векторів $\bar{\mathbf{B}}_{(1)}$ визначаються через вузлові значення зондувального теплового

потоку $J(t_j)$, температуру середовища T_m , а елементи векторів $\mathbf{B}_{(2)}$, та $\mathbf{B}_{(3)}$ — через

$J(t_j)$, T_m та вузлові значення температурного поля $\bar{\mathbf{T}}(t_j)$ на поверхні тіла без порожнини — розв'язок матричного рівняння (8).

4. Дослідження інформативних параметрів ідентифікації.

Числове дослідження інформативних параметрів ідентифікації проводимо для випадку зондування зосередженим тепловим потоком (рис. 1).

Нехай зондувальний тепловий потік \mathbf{J} падає нормально на достатньо вузьку область бічної поверхні тіла, якій відповідає дуга $\Gamma_\omega \subset \Gamma_0$. Зовнішня нормаль \mathbf{n}_ω середини дуги Γ_ω поверхні нагрівання орієнтована під полярним кутом ω . Змінюючи умови зондування, а саме — розподіл інтенсивності зондувального потоку $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\omega$ на поверхні нагрівання, ширину області нагрівання $|\Gamma_\omega|$ та скануючи потоком по поверхні об'єкта (змінюючи кут ω), отримуватимемо щораз, взагалі кажучи, різні розподіли температури в тілі і різні збурення температурного поля $\Delta T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ на його зовнішній поверхні. Параметри цього збурення можна вимірювати методами ІЧ-термографії, отримуючи апостеріорну інформацію про порожнину. При цьому об'єм отриманої апостеріорної інформації зростає зі збільшенням кількості проведених незалежних зондувань.

Використовуючи розроблену гранично-елементу модель, досліджували інформативні параметри зондування об'єкта зосередженим тепловим потоком, розподіл інтенсивності якого визначається формулою

$$J(\varphi) \equiv \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_\omega = I_0 \exp\left(-\left(\sin \frac{1}{2}(\varphi - \omega)\right)^2 / b^2\right), \quad (10)$$

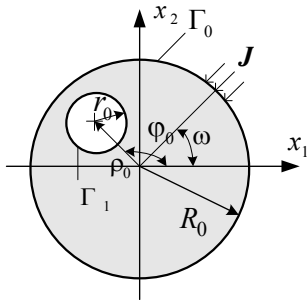


Рис. 1. Схема зондування об'єкта

де I_0 , b , ω та φ — параметри, які визначають інтенсивність зондувального потоку, його ширину та азимут.

Результати досліджень впливу напрямку зондувального потоку на збурення температури на поверхні Γ_0 показані на рис.2. Розподіли збурення температури $\Delta T = \Delta T(\zeta, \omega_k)$, $\zeta \in [0, 2\pi]$ отримали, розв'язуючи рівняння (5), (6) для декількох значень азимуту ω_k зондувального потоку та фіксованих значень параметрів $\varphi_0 = \pi$, $\rho_0 = 0,5$; $r_0 = 0,1$.

Як можна побачити з графіків (рис. 2), збурення температурного поля ΔT змінюється зі зміною азимуту зондування ω , тобто $\Delta T = \Delta T(\zeta, \omega)$. В діапазоні азимутів зондувального потоку $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$ криві $\Delta T(\zeta, \omega = \text{const})$ мають один максимум $\Delta T_{\max}^{(1)}$, і два однакових мінімуми $\Delta T_{\min}^{(1)}$.

У діапазоні азимутів зондування $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$ криві $\Delta T(\zeta, \omega = \text{const})$ мають один мінімум $\Delta T_{\min}^{(2)}$ і два однакових максимуми $\Delta T_{\max}^{(2)}$. Значення мінімумів та максимумів кривих залежать від азимуту кута зондування: $\Delta T_{\max}^{(\alpha)} = \Delta T_{\max}^{(\alpha)}(\omega - \varphi_0)$, $\Delta T_{\min}^{(\alpha)} = \Delta T_{\min}^{(\alpha)}(\omega - \varphi_0)$, ($\alpha = 1, 2$). У діапазоні $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$ для кожного фіксованого $\omega \neq \varphi_0$ полярний кут ζ_{\max} , що визначає положення максимуму кривої збурен-

ня температури $\Delta T^{(1)}(\zeta, \omega)$, не співпадає з азимутом ω зондувального потоку: $\zeta_{\max} \neq \omega$. За азимуту $\omega = \varphi_0$ $\Delta T_{\max}^{(1)}$ і $\Delta T_{\min}^{(1)}$ є максимальні: $\Delta T_{\max}^{(1)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\Delta T_{\max}^{(1)}(\omega - \varphi_0) \right)$, $\Delta T_{\min}^{(1)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\Delta T_{\min}^{(1)}(\omega - \varphi_0) \right)$. Отже, азимут $\omega_0 \equiv \arg \left\{ \max_{\omega} \left(\max_{\zeta} \left(\Delta T^{(1)}(\zeta, \omega) \right) \right) \right\}$, який можна визначити за результатами вимірювання температурного поля на зовнішній поверхні при зондуванні об'єкта в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$, співпадає з полярним кутом φ_0 . Тобто азимут зондувального потоку ω , за якого максимум $\Delta T_{\max}^{(1)}$ температурного поля поверхні є максимальний і його положення збігається із ω , можна вибрати за інформативний параметр для φ_0 .

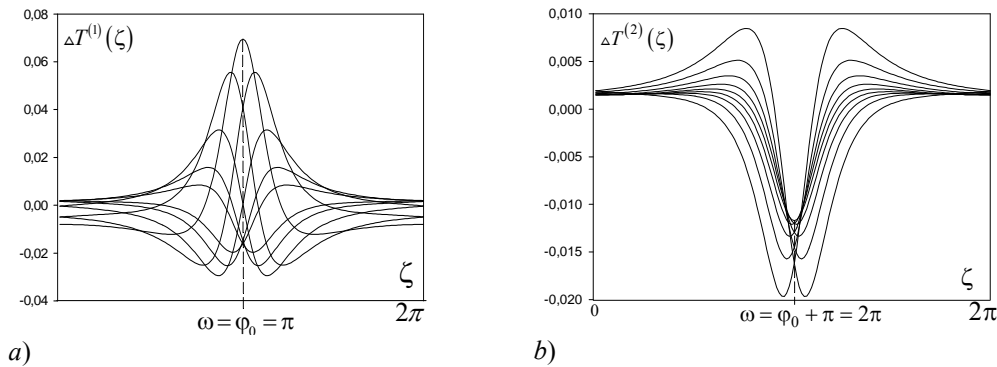


Рис. 2. Збурення температурного поля поверхні тіла для різних напрямків зондування ω_k :

$$a) \omega_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k, k = 0, 1, \dots, 8, \quad b) \omega_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k, k = 0, 1, \dots, 8$$

У діапазоні азимутів зондування $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$ для кожного фіксованого $\omega \neq \varphi_0 + \pi$, полярний кут ζ_{\min} , який визначає положення мінімуму кривої збурення температури $\Delta T^{(2)}(\zeta, \omega)$ не співпадає з азимутом ω зондувального потоку: $\zeta_{\min} \neq \omega$. За азимуту $\omega = \varphi_0 + \pi$ значення $\Delta T_{\min}^{(2)}$ і $\Delta T_{\max}^{(2)}$ є також максимальні: $\Delta T_{\max}^{(2)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\Delta T_{\max}^{(2)}(\omega - \varphi_0 - \pi) \right)$, $\Delta T_{\min}^{(2)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\Delta T_{\min}^{(2)}(\omega - \varphi_0 - \pi) \right)$. Отже, азимут $\omega_0 \equiv \arg \left\{ \max_{\omega} \left(\min_{\zeta} \left(\Delta T^{(2)}(\zeta, \omega) \right) \right) \right\}$, який можна визначити за результатами вимірювання температурного поля на зовнішній поверхні при зондуванні об'єкта в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$, співпадає з полярним кутом $\varphi_0 + \pi$. Тобто азимут зондуваль-

ного потоку ω , за якого мінімум $\Delta T_{\min}^{(2)}$ температурного поля поверхні є максимальний і його положення збігається із ω , можна вибрати за інформативний параметр для φ_0 .

Оскільки параметр φ_0 можна ідентифікувати незалежно, то ідентифікації параметрів ρ_0, r_0 слід вибрати не менше двох незалежних інформативних ознак збурення температурного поля $\Delta T(\zeta, \varphi_0)$. За такі ознаки можна вибирати певні функціонали поля $\Delta T(\zeta, \varphi_0)$, зокрема, його значення в точках екстремумів: $F_1 = \Delta T_{\max}^{(1)}$, $F_2 = \Delta T_{\min}^{(1)}$, $F_3 = \Delta T_{\max}^{(2)}$, $F_4 = \Delta T_{\min}^{(2)}$ (рис. 3).

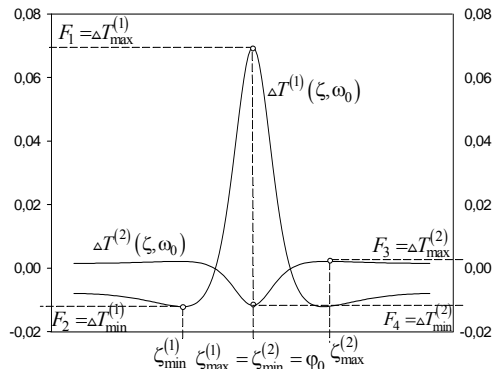


Рис 3. Інформативні ознаки поля $\Delta T(\zeta, \varphi_0)$ для параметрів ρ_0, r_0

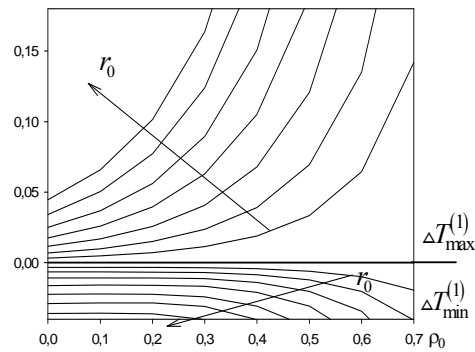


Рис 4. Залежність значення функціоналів F_1 та F_2 від параметрів порожнини ρ_0, r_0

Обмежимося тут двома інформативними ознаками, які визначаються функціоналами. Щоб визначити інформативність F_1 та F_2 , досліджуємо їх залежність від параметрів ρ_0 та r_0 . Для цього розв'язуємо пряму задачу (5), (6) для дискретної множини значень параметрів ρ_0 та r_0 для фіксованого азимута кута зондування $\omega = \varphi_0$, а відтак визначаємо значення максимуму та мінімуму збурення температури на зовнішній поверхні об'єкта. Результати цих досліджень наведені на рис. 4. Тут показані залежності параметрів F_1 та F_2 від полярного радіуса центру порожнини ρ_0 за фіксованих значень її радіуса $r_0 = [0,07; 0,1; 0,13; 0,16; 0,19; 0,22; 0,25]$. Як бачимо, максимум F_1 та мінімум F_2 збурення температурного поля, визначені за нагрівання об'єкта тепловим потоком, що втікає через область бічної поверхні, якій відповідає дуга Γ_ω зі зовнішньою нормаллю, орієнтованою під кутом $\omega = \varphi_0$, істотно залежать від параметрів ρ_0, r_0 , які підлягають ідентифікації. Тому використовуємо їх для формулювання оберненої задачі.

5. Ітераційний метод розв'язування оберненої задачі.

Нехай F_1^e та F_2^e – емпіричні значення максимуму та мінімуму залежності збурення температури на поверхні об'єкта, визначені шляхом зондування об'єкта відомим тепловим потоком з азимутом $\omega = \varphi_0$. Позначимо як $F_1(\rho_0, r_0)$ та $F_2(\rho_0, r_0)$ теоретичні залеж-

ності максимуму та мінімуму збурення температури на поверхні об'єкта від параметрів ρ_0, r_0 . Тоді, обернена задача зводиться до розв'язування системи рівнянь (11) стосовно ρ_0, r_0

$$\begin{cases} F_1(\rho_0, r_0) = F_1^e \\ F_2(\rho_0, r_0) = F_2^e \end{cases} \quad (11)$$

Аналitiчна структура функцій лівих частин цієї системи є невідома. Проте їх значення можна розрахувати для заданих значень ρ_0, r_0 використовуючи розроблений алгоритм розв'язування прямої задачі. На цій основі побудуємо ітераційний алгоритм розв'язування системи (11), який базується на методі Ньютона.

Введемо позначення $\mathbf{X} = (\rho_0, r_0)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, $f_1 = f_1(\rho_0, r_0) \equiv F_1(\rho_0, r_0) - F_1^e$, $f_2 = f_2(\rho_0, r_0) \equiv F_2(\rho_0, r_0) - F_2^e$. Тоді згідно методу Ньютона методом $k+1$ -ше наближення $\mathbf{X}^{(k+1)}$ розв'язку системи (11) визначається через k -те наближення $\mathbf{X}^{(k)}$ формулою [5]

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

де \mathbf{G} — матриця Якобі пари функцій f_1, f_2 .

Для обчислення матриці Якобі на кожній ітерації необхідно визначати похідні вигляду $\partial F_1 / \partial \rho_0$, $\partial F_1 / \partial r_0$, $\partial F_2 / \partial \rho_0$, $\partial F_2 / \partial r_0$. Оскільки, як зазначалося, аналitiчна структура функцій $F_1(\rho_0, r_0)$ та $F_2(\rho_0, r_0)$ є невідома, то замінімо ці похідні їх різницевиими аналогами

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \rho_0} &\approx \frac{F_1(\rho_0 + \Delta_\rho, r_0) - F_1(\rho_0, r_0)}{\Delta_\rho}, & \frac{\partial F_1}{\partial r_0} &\approx \frac{F_1(\rho_0, r_0 + \Delta_r) - F_1(\rho_0, r_0)}{\Delta_r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho_0} &\approx \frac{F_2(\rho_0 + \Delta_\rho, r_0) - F_2(\rho_0, r_0)}{\Delta_\rho}, & \frac{\partial F_2}{\partial r_0} &\approx \frac{F_2(\rho_0, r_0 + \Delta_r) - F_2(\rho_0, r_0)}{\Delta_r}, \end{aligned} \quad (13)$$

Δ_r, Δ_ρ достатньо малі стали.

Алгоритм розв'язування оберненої задачі полягає в наступному: на кожній $k+1$ -ій ітерації розв'язуємо пряму задачу (5), (6) для значень параметрів $(\rho_0^{(k)}, r_0^{(k)})$, $(\rho_0^{(k)} + \Delta_\rho, r_0^{(k)})$, $(\rho_0^{(k)}, r_0^{(k)} + \Delta_r)$. На основі отриманих розв'язків визначаємо значення параметрів $F_\alpha(\rho_0^{(k)} + \Delta_\rho, r_0^{(k)})$, $F_\alpha(\rho_0^{(k)}, r_0^{(k)} + \Delta_r)$, $F_\alpha(\rho_0^{(k)}, r_0^{(k)})$, $\alpha = 1, 2$, за формулами (13) обчислюємо значення елементів матриці Якобі, а відтак за формулою (12) обчислю-

ємо $k+1$ -ше наближення. Обчислення припиняємо за досягнення умови $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$.

Для оцінки ефективності запропонованого методу був проведений числовий експеримент. Щоб отримати вхідні дані для оберненої задачі задавалися числовими значеннями $\rho_0 = 0,45$, $r_0 = 0,12$. Відтак, розв'язували пряму задачу (5), (6) для азимуту зондувального потоку $\omega = \varphi_0$. На основі отриманого розв'язку визначали параметри $F_1 = \Delta T_{\max}^{(1)}$ та $F_2 = \Delta T_{\min}^{(1)}$. Знайдені так числові значення $F_1^e = 0,075361$ і $F_2^e = -0,014511$ підставляли у праві частини рівнянь (11). Використовуючи описаний алгоритм з початковим наближенням $\rho_0 = 0,7$; $r_0 = 0,23$ та вибраним значенням $\varepsilon = 10^{-6}$ за 15 ітерацій отримано розв'язок $\rho_0 = 0,4429$, $r_0 = 0,1222$. Тобто апостеріорна похибка розв'язування оберненої задачі дорівнює $\Delta\rho_0 = 0,0071$, $\Delta r_0 = 0,0022$.

Висновки. У статті розроблені теоретичні засади та математичний апарат для безконтактного методу ідентифікації геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини в довгому циліндричному тілі на основі емпіричних даних про розподіл температури на поверхні тіла, отриманих за допомогою ІЧ-термографії за зондування об'єкта зосередженим тепловим потоком. З використанням граничних інтегральних рівнянь побудована математична модель зондування тіла. Розроблено алгоритм розв'язування прямої задачі ідентифікації, який базується на методі граничних елементів. На цій основі проведені кількісні дослідження інформативних параметрів температурного поля поверхні об'єкта, які підтвердили можливість застосування запропонованого методу для створення систем ідентифікації, що базуються на техніці ІЧ-термографії.

Показано, що один із геометричних параметрів порожнини, які підлягають ідентифікації, визначається безпосередньо через один із інформативних параметрів температурного поля поверхні об'єкта. В результаті задачу ідентифікації зведено до розв'язування нелінійної системи двох рівнянь. Із застосуванням методу граничних елементів, розроблено ітераційний метод розв'язування цієї задачі, який ґрунтується на методі Ньютона. Ефективність розробленого методу підтверджена з використанням числового експерименту.

У цій статті обмежилися розглядом найпростішого випадку — об'єкта у вигляді кругового циліндричного тіла з круговою циліндричною порожниною, геометрію якої визначають лише три параметри φ_0 , ρ_0 , r_0 . Оскільки запропонований підхід базується на методі граничних елементів, то його можна застосовувати і для розв'язування двовимірних задач ідентифікації порожнин в тілах, обмежених будь-якими достатньо гладкими циліндричними поверхнями. Проведеними дослідженнями показано, що зондуючи об'єкт скануванням його поверхні зосередженим тепловим потоком, можна отримати достатньо великий об'єм емпіричних даних з інформативністю, достатньою для ідентифікації порожнин, геометрія яких визначається значно більшою кількістю параметрів. Аналіз інформативних ознак температурного поля поверхні об'єкта у цих випадках вимагає окремого дослідження.

1. *Becker A. A.* The boundary element method in engineering. McGraw Hill International Limited, UK. – 1992.
2. *Brett J. I.* Selecting a Nondestructive Testing Method. Part VI: Infrared Inspection Techniques – Thermography // AMMTIAC Quarterly, Volume 3, Number 2. P. 9-12.
3. *Souza M. P. V., Rebello J. M. A., Soares S.D., Freitas G. A. C.* Defect detection in fiberglass reinforced epoxy composite pipes reproducing field inspection conditions/9th International Conference on Quantitative Infra-Red Thermography: July 2-5, 2008, Krakow – Poland. – P.477-483.
4. *Ищук И.Н., Фесенко А.И., Громов Ю.Ю.* Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн. Москва: «Машиностроение». – 2008. – 184 с.
5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука. – 1978. – 512 с.
6. *Каневский И. Н., Сальникова Е.Н.* Неразрушающие методы контроля. Владивосток: Изд-во ДВГТУ. – 2007. – 243 с.
7. *Труэлл Э., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Изд-во «Мир». – 1972. – 307 с.
8. *Чекурін В., Сінькевич О.* Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 105-115.

THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PROBLEMS OF CAVITIES IDENTIFICATION IN CYLINDRICAL SOLID WITH THE USE OF LOCAL HEATING AND THE DATA OF IR-THERMOGRAPHY

V. Chekurin, O. Sinkevych

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
3-b, Naukova Str., Ukraine, 79060, L'viv
chekurin@iapmm.lviv.ua
deneb.acyg@gmail.com*

In the paper the theoretical bases and mathematical tools for contactless methods of nondestructive identification of geometrical parameters of cylindrical tunnel cavity in a cylindrical solid has been considered. The method is based on stationary thermal process excitation in the object and measuring its surface temperature field with the use of IR-thermography. The mathematical model for sounding of the object by local heating with concentrated thermal flux has been built with the use of boundary integral equations method. In the scope of the model a boundary element algorithm for the direct problem of cavity identification has been developed. On this basis informative parameters of the surface temperature field, which can be measured by IR-thermography technique, were studied and possibilities to use them for cavity identification have been approved.

It was shown that one of the cavity identification parameters can be determined directly from one of informative parameters. With this accounting the inverse problem was reduced to solving of a system of two non-linear equations. An iterative boundary element method for solving this problem, based on the Newton method, has been developed. An effectiveness of the developed method has been demonstrated with the use of numerical experiment.

Key words: identification of cavities, contactless methods, thermal sensing, inverse problems, the boundary element method, iterative methods.

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ
ПОЛОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ЛОКАЛЬНОГО НАГРЕВА И ДАННЫХ ИК-ТЕРМОГРАФИИ**

В. Чекурин, О. Сінькевич

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Пидстригача НАН Украины
ул. Научная, 3б, 79060 Львов, Украина
chekurin@iapmm.lviv.ua
deneb.acyg@gmail.com*

В статье рассматриваются теоретические основы и математический аппарат бесконтактного метода неразрушающей идентификации геометрических параметров цилиндрической туннельной полости в цилиндрическом твердом теле. Метод основан на возбуждении в объекте стационарного теплового процесса и измерении температурного поля его поверхности средствами ИК-термографии. С использованием метода граничных интегральных уравнений построена математическая модель локального зондирования объекта сосредоточенным тепловым потоком. В рамках модели разработан гранично-элементный алгоритм решения прямых задач идентификации полости. На этой основе были исследованы информативные признаки температурного поля поверхности и возможности их использование для идентификации полости. Было показано, что один из параметров полости можно непосредственно определить по одному из информативных признаков. С учетом этого, решение обратной задачи идентификации сведено к решению системы двух нелинейных уравнений. Разработан итерационный гранично-элементный алгоритм для решения обратной задачи, основанный на методе Ньютона. С помощью числового эксперимента исследована эффективность разработанного подхода.

Ключевые слова: идентификация полостей, бесконтактные методы, тепловое зондирование, обратные задачи, метод граничных элементов, итерационные методы.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.2013

Прийнята до друку 28.03.2013