ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2015. Випуск 5. С. 132–136
Electronics and information technologies. 2015. Issue 5. P. 132–136

УДК 519.622.2

МОДЕЛЮВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ ТРАДИЦІЙНИМИ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Я. Кость, І. Хвищун, Я. Шмигельський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017, Львів, Україна
kostjerry@gmail.com

В роботі наводяться результати чисельних експериментів по моделюванню нелінійних консервативних систем традиційними методами чисельного інтегрування. В якості тестових задач були обрані нелінійні системи, для яких відомі перші інтеграли. Всі досліджувані методи оцінювалися по відхиленню між точним і обчисленим значеннями першого інтеграла на значних часових відрізках. Результати експериментів дозволяють надати практичні рекомендації дослідникам при виборі методу чисельного інтегрування для моделювання консервативних систем.

Ключові слова: динамічна система, консервативність, чисельні методи.

Розглядаються автономні консервативні динамічні системи, математичні моделі яких є звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

В обчислювальній практиці часто доводиться моделювати систему (1) традиційними чисельними методами інтегрування диференціальних рівнянь, під якими, зазвичай, розуміють класичні методи. Такими методами стандартно оснащені сучасні пакети прикладних програм (MatLab, Maple, MatCad тощо) [1].

Як відомо, традиційні чисельні методи для моделювання системи (1) приводить до дискретних моделей які, взагалі кажучи, є неконсервативними, тобто вони не забезпечують збереження перших інтегралів (повної енергії, моменту кількості руху тощо), що на значних відрізках інтегрування приводить до повної якісної невідповідності неперервної та дискретної моделей.

На практиці для традиційних чисельних методів більш менш прийнятне збереження перших інтегралів намагаються забезпечити, серйозно підвищуючи точність розрахунку. Але це приводить до значних обчислювальних затрат і при цьому дає ефект тільки на відносно невеликих часових інтервалах [1]. З іншого боку застосування спеціальних чисельних методів, які зберігають для системи (1) перші інтеграли [2] вимагає від дослідників значних зусиль, оскільки обчислювальну процедуру потрібно будувати заново для кожної нової задачі. Таким чином актуальною є задача пошуку серед традиційних методів таких, які б дозволили досліджувати консервативні системи із задовільною точністю без великих обчислювальних витрат.

Постановка задачі. Для порівняння були узяті три методи чисельного інтегрування.

1. Метод трапецій (МТ):

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = \boldsymbol{x}_m + h\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{m+1}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_m)}{2}, \quad m = 0,1,2,... \tag{2}$$

2. Метод середньої точки (МСТ):

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = \boldsymbol{x}_m + h\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{m+1} + \boldsymbol{x}_m}{2}\right), \quad m = 0,1,2,... \tag{3}$$

3. Метод ФДН другого порядку (метод Шичмена) (МШ):

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{x}_{m-1} + \frac{4}{3}\boldsymbol{x}_m + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{m+1}), \quad m = 0,1,2,... \tag{4}$$

Вибір саме цих методів був обумовлений наступними факторами. Усі вони: a) неявні, b) А-стійкі, c) другого порядку точності. Усі вони широко використовуються в програмних комплексах дослідження динамічних систем [3,4,5]. Програмні модулі для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь на основі методів (2) і (4) входять до складу систем MatLab, MatCad та ін.

Серед цих чисельних методів на особливу увагу заслуговують метод трапецій та метод середньої точки. Відомо, що ці методи для лінійної консервативної системи (1) з постійними параметрами є консервативними, тобто зберігають значення першого інтегралу системи при будь-якому $h > 0$ [6]. Для практики чисельного моделювання динамічних систем важливо вияснити наскільки ці властивості поширюються на нелінійні системи (1).

Для експериментів були обрані динамічні системи другого і четвертого порядків з відомими першими інтегралами.

1. Лінійний осцилятор.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1. \tag{5}$$

Перший інтеграл: $H(x,y) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$.

Початкові умови: $x_1(0) = 1{,}0;\ x_2(0) = 0.$

Крок і відрізок інтегрування: $h = 0.0628;\ t \in [0; 628]$.

2. Нелінійний осцилятор.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1. \tag{6}$$

Перший інтеграл: $H(x,y) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$.

Початкові умови: $x_1(0) = 3{,}0;\ x_2(0) = 0.$

Крок і відрізок інтегрування: $h = 0.161;\ t \in [0; 1610]$.

2. Модель Лотки –Вольтерра “хижак-жертва”.

$$\dot{x}_1 = a\left(x_1 - x_1x_2\right), \quad \dot{x}_2 = -c\left(x_2 - x_1x_2\right). \tag{7}$$

Перший інтеграл: $H(x, y) = c(x_1 - \ln x_1) + a(x_2 - \ln x_2)$

Значення параметрів: $a = 2{,}0$; $c = 1{,}0$.

Початкові умови: $x_1\left(0\right) = 1{,}0$; $x_2\left(0\right) = 3{,}0$.

Крок і відрізок інтегрування: $h = 0.055$; $t \in \left[0; 550\right]$.

4. Модель Кеплера, що описує рух в гравітаційному полі двох тіл з однаковими масами (центр другого тіла вибрано за початок координат).

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{r^3}, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -\frac{x_3}{r^3}, \tag{8}$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$.

Закон збереження енергії: $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x_2^2 + x_4^2}{2} - \dfrac{1}{r} = const.$

Закон збереження моменту кількості руху: $M(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_3x_2 = const.$

Початкові умови: $x_1\left(0\right) = 0{,}5$; $x_2\left(0\right) = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = \sqrt{3}$;

Крок і відрізок інтегрування: $h = 0.0315$; $t \in \left[0; 630\right]$.

Результати експериментів. Усі експерименти проводились за допомогою системи моделювання жорстких динамічних систем [7], розробленої авторами. Щоб уникнути факторів, які зумовлені різними алгоритмами автоматичного вибору кроку для різних методів, усі розрахунки велися з постійним кроком. Величина кроку для усіх методів вибиралася таким чином: $h = \dfrac{T}{100}$, де T – період коливань досліджуваної математичної моделі, який визначався наближено експериментальним шляхом. При аналізі моделі Кеплера виявилося, що метод Шичмена з постійним кроком $h = \dfrac{T}{100}$ є чисельно нестійким. Тому для цієї задачі крок був зменшений вдвічі для усіх методів.

Математична модель інтегрувалась на протязі 100 періодів власних коливань і на сотому періоді визначалось максимальне за модулем відхилення розрахованого першого інтеграла від аналітичного.

Максимальні за модулем відхилення розрахованих перших інтегралів тестових задач від точних для різних методів інтегрування представлені в таблиці.

Таблиця

Метод інтегрування	Лінійний осцилятор, ΔH	Нелінійний осцилятор, ΔH	Модель Лотки-Вольтерра, ΔH	Модель Кеплера, ΔH	Модель Кеплера, ΔM
МСТ	1.99E-15	4.28E-3	1.08	1.57E-3	6.11E-3
МТ	1.99E-15	8.49E-3	1.72	3.13E-3	1.58E-3
МШ	3.98E-2	1.62	359.66	3.06E-1	9.98E-2

Як і слід було очікувати, методи трапецій і середньої точки зберігають перший інтеграл для лінійної системи. Для нелінійних моделей результати показані цими методами цілком задовільні і значно кращі за результати методу Шичмена. Результати експериментів свідчать, що використання методів трапецій і середньої точки для аналізу нелінійних консервативних систем є цілком виправданим.

Список використаної літератури

1. *Шампайн Л.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие / Шампайн Л., Гладвел И., Томпсон С. - СПб.: “Лань”, 2009. – 304 с.
2. *Синицкий Л.А.* Методы аналитической механики в теории электрических цепей / Л.А. Синицкий – Львов. Издательское объединение «Вища школа», 1978. – 139 с.
3. *Shichman H.* Integration system of a nonlinear networks-analysis program / Harold Shichman // IEEE Trans. on Circuit Theory. – 1970. – Vol. CT-17. – P. 379-386.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта: Пер. с англ. / М.: “Мир”, 1979. – 312 с.
5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Деккер К., Вервер Я. – М.: “Мир”, 1988. – 334 с.
6. *Василенко Т.* Числовий розрахунок нелінійних консервативних осциляторів / Т. Василенко, Л. Синицький, Я. Шмигельський // Журнал фізичних досліджень. 1997. Т.1. №4. – С.513-520.
7. *Кость Я.* Розробка програмного забезпечення для моделювання динамічних систем із жорсткими математичними моделями / Я. І. Кость, І. О. Хвищун // Електроніка та інформ. технології. – 2012. – Вип. 2. – С. 184–196.

Стаття: надійшла до редакції 13.04.2015,
доопрацьована 29.04.2015,
прийнята до друку 10.05.2015.

SIMULATION OF CONSERVATIVE SYSTEMS BY TRADITIONAL NUMERICAL METHODS

Ya. Kost, J. Khvyshchun, Ya. Shmygelsky

Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA–79017, Lviv, Ukraine
kostjerry@gmail.com

The work reports the results of numerical experiments on modelling of nonlinear conservative systems using traditional numerical integration methods. Nonlinear systems with known first integrals were selected as test cases. All tested methods were evaluated by the deviation between the exact and the calculated values of the first integral over significantly long time intervals. The results of the experiments allow to provide practical recommendations for researchers regarding the selection of the numerical integration technique for the simulation of conservative systems.

Keywords: dynamical system, conservative, numerical methods.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ ТРАДИЦИОННЫМИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Я. Кость, И. Хвищун, Я. Шмигельский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина
kostjerry@gmail.com

В работе приведены результаты численных экспериментов по моделированию нелинейных консервативных систем традиционными методами численного интегрирования. В качестве тестовых задач были выбраны нелинейные системы, для которых известны первые интегралы. Все исследуемые методы оценивались по отклонению между точным и вычисленным значениями первого интеграла на значительных временных интервалах. Результаты экспериментов позволяют дать практические рекомендации исследователям при выборе метода численного интегрирования для моделирования консервативных систем.

Ключевые слова: динамическая система, консервативность, численные методы.