ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2015. Випуск 5. С. 137–150
Electronics and information technologies. 2015. Issue 5. P. 137–150

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

УДК 004.4:519.24

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР

А. Іващенко

Інституту інформатики,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
вул. Пирогова, 9, 01601 Київ, Україна
i.nastya@ukr.net

Розв'язування задач теорії ігор за практично прийнятний час можливе лише за допомогою комп'ютера з використанням відповідно дібраних чи спеціально розроблених програм. Розглянуто основні поняття та особливості розв'язування задач теорії ігор. Зазначено, що використання інформаційно-комунікаційних технологій робить процес розв'язування задач теорії ігор простим і цікавим та позбавляє користувача рутинних і трудомістких обчислень. Проаналізовано програмні засоби для розв'язування задач теорії ігор.
Ключові слова: гра, ціна гри, мінімакс, максимін, змішана стратегія.

Під час розв'язування практичних задач часто доводиться аналізувати ситуації, де дві (або більше) сторони між собою конфліктують, ставлячи протилежні цілі, причому результат кожного кроку однієї зі сторін залежить від того, як поводитиметься суперник. Такі ситуації називають конфліктними. Найпростішими прикладами конфліктних ситуацій є ігри (шахи, шашки, карти, доміно та ін.). Звідси і пішла назва "теорія ігор", яка закріпилася за математичною теорією конфліктних ситуацій.

Теорію ігор уперше систематично описали Джон фон Нейман і Оскар Моргенштерн та оприлюднили лише 1944 р. у монографії "Теорія ігор і економічна поведінка", хоча окремі результати опубліковано ще в 20-х роках. Дж. фон Нейман і О. Моргенштерн написали оригінальну книгу, яка містила переважно економічні приклади, оскільки економічні задачі простіше від інших описати за допомогою чисел. Нині сфера застосування теорії ігор значно розширилась. Зокрема, у соціальних науках апарат теорії ігор застосовують у психології для аналізу торгових угод та переговорів, а також для вивчення принципів формування коаліцій тощо [1, с. 422].

У теорії ігор передбачають, що гра складається з ходів, виконуваних гравцями одночасно або послідовно.

Ходи бувають *усвідомленими і випадковими,* тобто такими, які вибираються навмання. Хід називається *усвідомленим,* якщо гравець свідомо вибирає його із сукупності можливих ходів і здійснює його (наприклад, будь-який хід у шаховій грі). Хід називається *випадковим,* якщо він обирається за допомогою якого-небудь механізму випадкового вибору (наприклад, за результатом підкидання грального кубика, деякого датчика випадкових чисел та ін.).

Сукупність ходів, зроблених гравцями від початку до закінчення гри, називають *партією.*

Одним з основних понять теорії ігор є поняття *стратегії. Стратегією* гравця називають сукупність правил, за якими відбувається вибір кожного усвідомленого ходу залежно від ситуації, що склалася в процесі гри на момент здійснення ходу.

Гра – це конфліктна ситуація, регламентована конкретними правилами, за якими визначають:

- кількість учасників гри (гравців);
- опис можливих дій кожної зі сторін;
- порядок чергування дій, "ходів";
- правила виконання кожного ходу;
- результат гри (виграш, програш), до якого приводить ця сукупність ходів [2, с. 242].

У теорії ігор вивчають правила оптимальної поведінки в умовах невизначеності, існування розв'язків, які задовольняють ці правила, алгоритми відшукання розв'язків [4, с. 3].

Завдання кожного гравця полягає у визначенні *оптимальної стратегії*, за якою за умови багаторазового повторення гри забезпечується максимально можливий усереднений виграш (або мінімально можливий усереднений програш).

Існують і складніші конфліктні ситуації, що виникають у суперечці, де беруть участь об'єднання чи коаліції.

Часто однією зі сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто відбувається "гра" людини з природою. Управляти погодними умовами людина не може, однак вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Багато подібних ситуацій можна виявити і в інших сферах людської діяльності: психології, біології, політології тощо.

Теорія ігор – це математичний апарат для аналізу конфліктних ситуацій за умов невизначеності, а також спільних дій кількох учасників [1, с. 423].

Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою і наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники, а й тим, що є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінювання можливих рішень з різних позицій.

Задачі теорії ігор класифікують за [6, с. 5]:

- *кількістю учасників:* якщо в грі беруть участь два гравці, то таку гру називають парною (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є множинною;
- *тривалістю гри:* скінченні та нескінченні ігри. Гру називають скінченною, якщо вона закінчується через скінченну кількість ходів чи за скінченний час, в іншому випадку – нескінченна;
- *характером взаємодії між гравцями:* безкоаліційні та кооперативні ігри. Гру називають безкоаліційною, якщо гравці не можуть поєднати свої інтереси та не дійдуть спільної домовленості між собою в разі вибору стратегії з метою збільшити свої виграші, в іншому випадку – кооперативна [5, с. 5];
- *властивістю функцій виграшу:* якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то таку гру називають грою з нульовою сумою (матрична гра). Для таких ігор характерні протилежні інтереси сторін, тобто ситуація конфлікту. Інші ігри – з ненульо-

вою сумою, виникають за умов як конфліктної поведінки гравців, так і їхніх узгоджених дій.

Будь-яку матричну гру з нульовою сумою характеризують *платіжною матрицею*. Для того, щоб побудувати цю матрицю, припустимо, що $A_1, A_2, ..., A_m$ – стратегії, які може обирати перший гравець, а $B_1, B_2, ..., B_n$ – стратегії, які може обирати другий гравець. Матричну гру, у якій перший гравець має m стратегій, а другий гравець має n стратегій, називають *грою типу* $m \times n$.

Розглянемо матрицю C (платіжна матриця гри)

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

у якій елементи a_{ij}, $(i = \overline{1,2,...,m};\ j = \overline{1,2,...,n})$, дорівнюють виграшам першого гравця (і програшам другого гравця) в разі застосування гравцями стратегій A_i і B_j, відповідно, де A_i – i-й рядок платіжної матриці C, B_j – j-й стовпець матриці C.

Нижня і верхня ціна гри. Принцип мінімакса.

Розглянемо матричну гру типу $m \times n$ з платіжною матрицею (рис. 1).

2-й гр. / 1-й гр.	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 1.

Нехай потрібно знайти оптимальну стратегію першого гравця, яку послідовно проаналізуємо, починаючи з A_1. Перший гравець, обираючи стратегію A_i, повинен враховувати, що другий гравець використає стратегію B_j, для якої виграш a_{ij} буде мінімальним. Знайдемо мінімальне з чисел a_{ij} в i-му рядку, позначивши його α_i:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \quad (2)$$

Випишемо числа α_i з правого боку матриці у вигляді стовпця (рис. 2).

2-й гр. / 1-й гр.	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_n
β_j	β_1	β_2	…	β_m	

Рис. 2.

Також, обираючи стратегію A_i, перший гравець повинен врахувати те, що внаслідок вибору другим гравцем правильної стратегії, перший гравець не виграє більше ніж α_i. Отже, для отримання найбільшого виграшу перший гравець повинен обрати ту стратегію A_i, для якої число α_i буде максимальним. Позначимо це максимальне значення

$$\alpha = \max_i \alpha_i , \tag{3}$$

або, з урахуванням формул (2) і (3),

$$\alpha = \max_i \ \min_j a_{ij} . \tag{4}$$

Величину α називають *нижньою ціною гри*, або *максимінним виграшем* (*максиміном*), а стратегію першого гравця, відповідну найбільшому з чисел $\min_j \alpha_{ij}$, – *максимінною*. Отже, якщо перший гравець дотримуватиметься максимінної стратегії, то йому гарантований виграш, не менший ніж α за будь-якої стратегії другого гравця.

Проаналізуємо тепер платіжну матрицю (див. рис. 1) з позицій другого гравця, зацікавленого в тому, щоб перший гравець виграв якнайменше. У цьому випадку другий гравець має переглянути свої стратегії з погляду максимального виграшу першого гравця за цієї стратегії другого гравця. Випишемо внизу матриці (див. рис. 2) максимальні значення a_{ij} з кожного стовпця:

$$\beta = \max_i a_{ij} \tag{5}$$

і знайдемо мінімальне з β_j:

$$\beta \ = \min_j \beta_j \tag{6}$$

або

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij.} \tag{7}$$

Величину β називають *верхньою ціною гри*, або мінімаксним виграшем (мінімаксом), а стратегію другого гравця, відповідну найменшому з чисел $\max_i a_{ij}$, – *мінімаксною*. *Отже, якщо другий гравець* використовує мінімаксну стратегію, то перший гравець не може виграти більше ніж β.

Гра з сідловою точкою. Гру називають грою з сідловою точкою, якщо її нижня і верхня ціни збігаються, тобто виконується рівність

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i a_{ij.} = \beta.$$

Для гри з сідловою точкою загальне значення нижньої і верхньої цін гри $v = \alpha = \beta$ називають *ціною гри* (*чистою ціною гри*) v.

Розглянемо тепер для гри з сідловою точкою такий елемент $a_{i_0 j_0}$ платіжної матриці *C*, який відповідає мінімаксним стратегіям A_{i_0} і B_{j_0}. Цей елемент є одночасно мінімальним у своєму рядку і максимальним у своєму стовпці, і виконуються рівності

$$v = \alpha = \max_i c_{ij_0} = \min_j c_{i_0 j} = \beta.$$

Отже, ціна гри $v = c_{i_0 j_0}$.

Елемент платіжної матриці $c_{i_0 j_0}$ називають *сідловою точкою*; стратегії A_{i_0} і B_{j_0} – оптимальними стратегіями, відповідно, першого та другого гравців, а пару таких стратегій – розв'язком гри [3, с. 14–15].

Гра зі змішаними стратегіями. У скінченних іграх, зазвичай, немає сідлової точки. Якщо у грі немає сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq v \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, бо не виключено, що кожна зі сторін може поліпшити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи *змішані стратегії*, які є певними комбінаціями початкових "чистих" стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох "чистих" стратегій з різною частотою.

Уведемо позначення для змішаних стратегій (рис. 3). Нехай, наприклад, у змішаній стратегії першого гравця використовують стратегії A_1 та A_2 з відносними частотами p_1 та p_2, відповідно, причому $p_1 + p_2 = 1$. Тоді змішана стратегія матиме вигляд

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно змішана стратегія другого гравця матиме вигляд

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

де q_1, q_2 – відносні частоти, з якими використовують стратегії B_1, B_2, причому $q_1 + q_2 = 1$.

2-й гр. / 1-й гр.	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Рис. 3.

Отже, маємо дві відповідні системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = v, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = v. \end{cases} \tag{9}$$

З системи рівнянь (8), беручи до уваги $p_1 + p_2 = 1$, отримаємо

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1),$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{10}$$

Ціну гри v знайдемо, підставивши p_1, $p_2 = 1 - p_1$ у будь-яке з рівнянь системи (8).

Якщо ціна гри відома, то для визначення оптимальної стратегії $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ гравця B достатньо одного рівняння з системи (9), наприклад:

$$a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v,$$

звідки, враховуючи, що $q_1 + q_2 = 1$, маємо

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \; q_2 = 1 - q_1.$$

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування. Для розв'язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядаємо парну гру зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для першого гравця та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_n$ для другого гравця і платіжною матрицею *С*. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \ldots A_m \\ p_1 & p_2 \cdots p_m \end{pmatrix} \text{ і } S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \ldots B_n \\ q_1 & q_2 \cdots q_n \end{pmatrix}, \text{ де } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію першого гравця. Така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший від ціни гри (поки що невідому величину) v за будь-якої поведінки другого гравця.

Припустимо, що перший гравець застосовує свою оптимальну змішану стратегію, а другий гравець – свою “чисту” j-ту стратегію B_j, тоді усереднений виграш першого гравця дорівнюватиме

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m. \qquad (11)$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри v. Отже, для будь-якого значення j, $\left(j \in \overline{1,n}\right)$ величина (11) має бути не меншою, ніж v:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v; \\ \text{...} \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases}$$

Розділимо всі обмеження на v, отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{p_1}{v} + a_{21}\dfrac{p_2}{v} + ... + a_{m1}\dfrac{p_m}{v} \geq 1; \\ a_{12}\dfrac{p_1}{v} + a_{22}\dfrac{p_2}{v} + ... + a_{m2}\dfrac{p_m}{v} \geq 1; \\ \text{...} \\ a_{1n}\dfrac{p_1}{v} + a_{2n}\dfrac{p_2}{v} + ... + a_{mn}\dfrac{p_m}{v} \geq 1. \end{cases}$$

Позначимо $\dfrac{p_i}{v} = t_i$, отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ \text{...} \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}, \ t_i \geq 0, \ \left(i \in \overline{1,m}\right).$$

З урахуванням умови, що $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, отримаємо $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{v}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{v}$ набуватиме мінімального значення. Отже, маємо звичайну задачу лінійного програмування:

потрібно знайти мінімум цільової функції:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}, \ t_i \geq 0, \ \left(i \in \overline{1,m}\right). \quad (12)$$

У ході розв'язування цієї задачі знаходимо значення $t_i \ \left(i \in \overline{1,m}\right)$, а також величину $\frac{1}{v}$ і значення $p_i = v\,t_i$, що є оптимальним розв'язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію для першого гравця.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії другого гравця. З цією метою позначимо $\frac{q_j}{v} = u_j$, $\left(j \in \overline{1,n}\right)$. Тоді потрібно знайти

$$F = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \geq 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \geq 1; \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \geq 1. \end{cases}, \ u_j \geq 0, \ \left(j \in \overline{1,n}\right).$$

Задача лінійного програмування для другого гравця є двоїстою до відповідної задачі лінійного програмування для першого гравця, і навпаки. Адже, як відомо, координати вектора обмежень початкової задачі стають координатами градієнта цільової функції двоїстої задачі, і навпаки; рядки матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженні прямої задачі стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі; кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі; якщо у прямій задачі відшукують найбільше значення цільової функції (max), то у двоїстій задачі – найменше значення відповідної цільової функції (min), і навпаки. А тому, знайшовши оптимальний розв'язок однієї з задач (прямої або двоїстої), знайдемо також оптимальний розв'язок іншої [1, с. 437–439].

Задачі теорії ігор належать до задач теорії прийняття рішень за умов невизначеності та ризику.

Для розв'язування задач теорії ігор, зокрема, для знаходження оптимальних стратегій в іграх двох осіб, широко використовують сучасні програмні засоби Microsoft Excel, Mathcad.

Приклад. Фірма розробила шість бізнес-планів $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ для їхнього здійснення в наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виокремлено п'ять ситуацій $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$. Для кожного варіанта X_i, $(i \in \overline{1,6})$ бізнес-плану та зовнішньої ситуації $Y_j, (i \in \overline{1,5})$ обчислено прибутки, які наведені у таблиці.

Необхідно вибрати найліпший варіант бізнес-плану або оптимальну комбінацію розроблених планів.

Варіант бізнес-плану	Зовнішня ситуація				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн.				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Розв'язування. Маємо гру, елементами платіжної матриці якої є відповідні елементи наведеної таблиці. Легко переконатися, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Далі визначаємо:

α = max {min(l,0; 1,5; 2; 2,7; 3,2); min(l,2; 1,4; 2,5; 2,9; 3,l); min(l,3; 1,6; 2,4; 2,8; 2,l); min (2,1; 2,4; 3; 2,7; 1,8); min(2,4; 2,9; 3,4; 1,9; 1,5); min(2,6; 2,7; 3,1; 2,3; 2)} = max{l,0; 1,2; 1,3; 1,8; 1,5; 2} = 2,

а також

β = min (max (1,0; 1,2; 1,3; 2,1; 2,4; 2,6); max (l,5; 1,4; 1,6; 2,4; 2,9; 2,7); max (2; 2,5; 2,4; 3; 3,4; 3,l); max (2,7; 2,9; 2,8; 2,7; l,9; 2,3); max (3,2; 3,l; 2,l; l,8; l,5; 2)}= min {2,6; 2,9; 3,4; 2,9; 3,2} = 2,6.

Отже, α≠β, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно шукати змішані стратегії, для чого потрібно розв'язати відповідну задачу лінійного програмування:

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 \to \min \tag{13}$$

за умов

ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2015. Випуск 5

$$\begin{cases} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \ge 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \ge 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \ge 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \ge 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \ge 1; \end{cases} \quad (14)$$

$$t_i \ge 0, \quad (i \in \overline{1{,}6}).$$

1. Знайдемо розв'язок задачі (13), (14) за допомогою програми Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Варіант	Зовнішня ситуація					Оптимальні						
2	бізнес-	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	бізнес-			Цільова функція	=G4+G5+G6+G7+G8+G9		
3	плану	прибутки, тис. грн.					плани						
4	X_1	1,0	1,5	2	2,7	3,2					=G4*B4+G5*B5+G6*B6+G7*B7+G8*B8+G9*B9	>=	1
5	X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1					=G4*C4+G5*C5+G6*C6+G7*C7+G8*C8+G9*C9	>=	1
6	X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1				Обмеження	=G4*D4+G5*D5+G6*D6+G7*D7+G8*D8+G9*D9	>=	1
7	X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8					=G4*E4+G5*E5+G6*E6+G7*E7+G8*E8+G9*E9	>=	1
8	X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5					=G4*F4+G5*F5+G6*F6+G7*F7+G8*F8+G9*F9	>=	1
9	X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0							

Рис. 4.

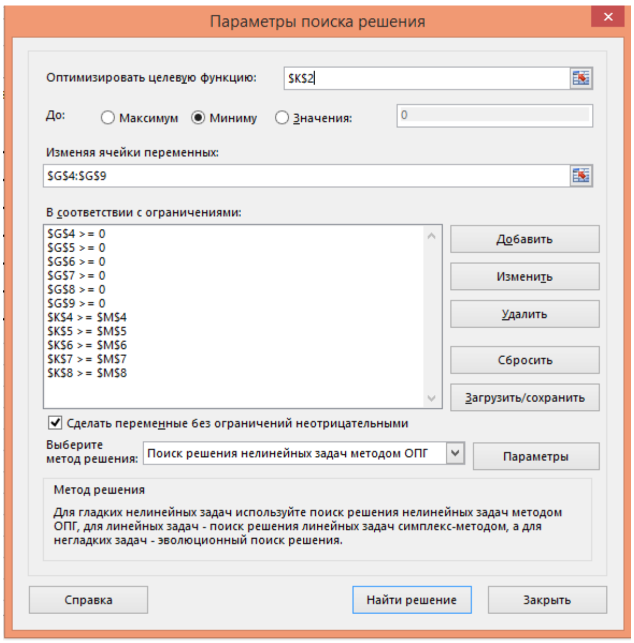

Рис. 5.

Зарезервуємо комірки *G*4:*G*9 для значень змінних t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6. У комірку *K*2 вводимо вираз цільової функції у вигляді =*G*4+*G*5+*G*6+*G*7+*G*8+*G*9, а у комірки *K*4:*K*8 ліві частини обмежень у вигляді (рис. 4)

=*G*4**B*4+*G*5**B*5+*G*6**B*6+*G*7**B*7+*G*8**B*8+*G*9**B*9
=*G*4**C*4+*G*5**C*5+*G*6**C*6+*G*7**C*7+*G*8**C*8+*G*9**C*9
=*G*4**D*4+*G*5**D*5+*G*6**D*6+*G*7**D*7+*G*8**D*8+*G*9**D*9
=*G*4**E*4+*G*5**E*5+*G*6**E*6+*G*7**E*7+*G*8**E*8+*G*9**E*9
=*G*4**F*4+*G*5**F*5+*G*6**F*6+*G*7**F*7+*G*8**F*8+*G*9**F*9.

Встановлюємо курсор у комірку K2. Обираємо послугу Сервіс. Відкриваємо допоміжне вікно "Пошук розв'язку" і задаємо сценарій (рис. 5). Після цього потрібно натиснути на кнопку "Знайти розв'язок" і отримати результати (рис. 6).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Зовнішня ситуація					Оптимальні бізнес-плани						
2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5				Цільова функція	0,44		
3	прибутки, тис. грн.											
4	1,0	1,5	2	2,7	3,2	0			Обмеження	1,00	>=	1
5	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1	0,11				1,05	>=	1
6	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1	0				1,31	>=	1
7	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8	0				1,08	>=	1
8	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5	0				1,00	>=	1
9	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0	0,34						

Рис. 6.

У комірку *H4* (рис. 7) записати формулу =*G4*/*K*2 і скопіювати її в комірки *H*5:*H*9.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Зовнішня ситуація					Оптимальні бізнес-плани	Оптимальні значення частот					
2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5				Цільова функція	0,44		
3	прибутки, тис. грн.											
4	1,0	1,5	2	2,7	3,2	0	=G4/K2		Обмеження	1,00	>=	1
5	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1	0,11				1,05	>=	1
6	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1	0				1,31	>=	1
7	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8	0				1,08	>=	1
8	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5	0				1,00	>=	1
9	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0	0,34						

Рис. 7.

Одержимо у комірках *H*4:*H*9 оптимальні значення частот. Щоб знайти ціну гри, треба у комірку *J*10 ввести формулу =1/*K*2. Одержимо результати у вигляді таблиці, показаної на рис. 8.

Отже, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}11$; $t_3 = 0$, $t_4 = 0$, $t_5 = 0$, $t_6 = 0{,}34$, оптимальне значення цільової функції Z(t) = 0,44, оптимальні значення частот, відповідно: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}24$ $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0{,}76$. Ціна гри $v = 2{,}26$.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Зовнішня ситуація					Оптимальні бізнес-плани	Оптимальні значення частот					
2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5				Цільова функція	0,44		
3	прибутки, тис. грн.											
4	1,0	1,5	2	2,7	3,2	0	0		Обмеження	1,00	>=	1
5	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1	0,11	0,24			1,05	>=	1
6	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1	0	0			1,31	>=	1
7	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8	0	0			1,08	>=	1
8	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5	0	0			1,00	>=	1
9	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0	0,34	0,76					
10									Ціна гри	2,26		

Рис. 8.

2. Знайдемо розв'язок за допомогою програми Mathcad.

Розв'яжемо задачу у матричному вигляді.

Початкові наближення:

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 0 \quad t_3 := 0 \quad t_4 := 0 \quad t_5 := 0 \quad t_6 := 0$$

$T(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix}$ – вектори аргументів цільової функції; $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – коефіцієнти цільової функції;

$Z(t) := C \cdot T(t)$ – цільова функція

$$t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0 \quad t_3 \geq 0 \quad t_4 \geq 0 \quad t_5 \geq 0 \quad t_6 \geq 0$$

$D := \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.3 & 2.1 & 2.4 & 2.6 \\ 1.5 & 1.4 & 1.6 & 2.4 & 2.9 & 2.7 \\ 2 & 2.5 & 2.4 & 3 & 3.4 & 3.1 \\ 2.7 & 2.9 & 2.8 & 2.7 & 1.9 & 2.3 \\ 3.2 & 3.1 & 2.1 & 1.8 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів лівих частин обмежень;

$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор правих частин обмежень

Given

$D \cdot T(t) \geq B$

$T(t) \geq 0$

Розв'язування.

$t := \text{minimize}(Z, t)$

$t = (0 \quad 0.11 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.34)$ – оптимальна точка

$Z(t) = 0.442$ - оптимальне значення цільової функції

$v := \dfrac{1}{Z(t)}$, $v = 2.26$ - ціна гри.

Отже, використовуючи теорію ігор, можна знаходити і приймати оптимальні рішення в умовах невизначеності, що дає змогу враховувати інтереси різних сторін, які прямо або опосередковано впливають на прийняття рішень. Використання засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у ході розв'язування задач теорії ігор робить процес відшукання оптимальних рішень досить цікавим, без зайвих витрат часу на виконання рутинних обчислень.

Список використаної літератури

1. *Наконечний С. І.* Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
2. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1964. – 388 с.
3. *Вентцель Е. С.* Елементы теории игр / Е. С. Вентцель. – М. : Гос. изд-во физ.-матем. л-ры, 1959. – 67 с.
4. *Григорьева К. В.* Бескоалиционные игры в нормальной форме : учеб. пособие / К. В. Григорьева. – СПб. : СПбГАСУ, 2007. – Ч. 1. – 78 с.
5. *Даниловцева Е. Р.* Теория игр. Основные понятия: текст лекций / Е. Р. Даниловцева, В. Г. Фарафонов, Г. Н. Дьякова. – СПб. : СПбГУАП, 2003. –36 с.
6. *Писарук Н. Н.* Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2014. – 239 с.

Стаття: надійшла до редакції 21.11.2014,
доопрацьована 15.12.2014,
прийнята до друку 24.12.2014.

BASIC CONCEPTS AND SOLVING THE COMPUTERIZED GAME THEORY

A. Ivashchenko

Institute of Informatics
National Pedagogical Dragomanov University
Pyrogova Street, 9, UA–01601 Kiev, Ukraine
i.nastya@ukr.net

Solving of the theory of games problems with practically acceptable time is only possible with a computer using appropriately selected or specially designed programs. Thus describes the main concepts and features of the solution of problems of the theory of games. It is noted that using of information and communication technologies make the process of solving the theory of games easy and interesting, and will void the user from routine and time-consuming calculations. The analysis the software tools for solving tasks of the theory of games.

Key words: game, the price of the game, minimax, maximin, mixed strategy.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАНОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР

А. Иващенко

Институт информатики
Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова
ул. Пирогова, 9, 01601 Киев , Украина
i.nastya@ukr.net

Решение задач теории игр за практически принятое время возможно только с помощью компьютера с использованием соответствующим образом подобранных или специально разработанных программ. Рассмотрено основные понятия и особенности решения задач теории игр. Отмечено, что использование информационно-коммуникационных технологий делает процесс решения задач теории игр простым и интересным, и избавляет пользователя от рутинных и трудоемких вычислений. Проанализировано программные средства для решения задач теории игр.

Ключевые слова: игра, цена игры, минимакс, максимин, смешанная стратегия.