Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 85, 2011, стор. 95–101

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 85, 2011, pp. 95–101

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ В СХЕМІ ПУАСОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

УДК 519.21

І. В. САМОЙЛЕНКО

Анотація. В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації. Великі відхилення для випадкових еволюцій в схемі пуасонової апроксимації визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами.

Аннотация. В работе проведен асимптотический анализ проблемы больших уклонений для случайных эволюций с независимыми приращениями в схеме пуассоновской аппроксимации. Большие уклонения для случайных эволюций в схеме пуассоновской аппроксимации задаются экспоненциальным генератором для скачкообразного процесса с независимыми приращениями.

Abstract. Asymptotic analysis of large deviation problem for random evolutions with inde- pendent increments in the scheme of Poisson approximation is realized. Large deviations for random evolutions in the scheme of Poisson approximation are defined by exponential generator for jump process with independent increments.

1. Вступ

В роботі проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації (див. [5, ch. 7]).

Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій з локально незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації проведено в роботах [6, 7].

В монографії [2] для дослідження проблеми великих відхилень розвинуто ефективний метод, побудований на теорії збіжності експоненційних (нелінійних) операторів. В роботах [8, 9] експоненційний оператор в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, має вигляд:

$$\mathbb{H}^\varepsilon \varphi(x) := e^{-\varphi(x)/\varepsilon} \varepsilon \mathbb{L}^\varepsilon e^{\varphi(x)/\varepsilon},$$

де оператори $\mathbb{L}^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, що визначають марковські процеси $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, в схемі серій.

Випадкові еволюції з незалежними приростами (див. [5, ch. 1]) задаються співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J55, 60B10, 60F17, 60K10; Secondary 60G46, 60G60.

Ключові слова і фрази. Великі відхилення, випадкова еволюція з незалежними приростами, пуасонова апроксимація, експоненційний нелінійний оператор.

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України В. С. Королюку за постановку задачі та постійну увагу до її реалізації.

Марковський перемикаючий процес $x(t)$, $t \geq 0$, на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_{\mathbb{E}} [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \qquad x \in E. \tag{2}$$

Основним припущенням щодо перемикаючого марковського процесу є умова

C1: Марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, равномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $A \in \mathcal{E}$.

Позначимо через Π проектор на підпростір нулів зведено-оборотного оператора Q, означеного в (2):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Виконується наступне співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенціал R_0 має властивість [5, ch. 1]:

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

Зауваження 1.1. З останнього співвідношення (рівняння Пуасона) випливає, що за умови розв'язності

$$\Pi\psi = 0$$

рівняння

$$Q\varphi = \psi$$

має єдиний розв'язок

$$\psi = R_0\varphi,$$

при $\Pi\varphi = 0$.

Марковські процеси з незалежними приростами $\eta(t; x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, задаються генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) = \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u + v) - \varphi(u)]\Gamma(dv; x), \qquad x \in E.$$

Випадкова еволюція (1) характеризується генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$ (див. [5, ch. 2])

$$\mathbb{L}\varphi(u, x) = Q\varphi(\cdot, x) + \Gamma(x)\varphi(u, \cdot)$$

Зауваження 1.2. Дослідження граничних властивостей марковських процесів базується на мартингальній харатеризації таких процесів, а саме розглядаються мартингали

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{L}\varphi(x(s))\, ds, \tag{3}$$

де $\mathbb{L}$ — генератор, що визначає марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, має щільну область визначення $\mathcal{D}(\mathbb{L}) \subseteq \mathcal{B}_E$, яка містить неперервні разом зі своїми похідними функції. Тут $\mathcal{B}_E$ — банахів простір дійснозначних обмежених тест-функцій $\varphi(x) \in E$, з нормою: $\|\varphi\| := \sup_{x \in E} |\varphi(x)|$.

Теорія великих відхилень базується на використанні експоненційної мартингальної характеризації (див. [2, ch. 1]):

$$\widetilde{\mu}_t = \exp\left\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbb{H}\varphi(x(s))\, ds\right\} \tag{4}$$

є мартингалом.

Тут експоненційний нелінійний оператор

$$\mathbb{H}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}\mathbb{L}e^{\varphi(x)}, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{B}_E.$$

Еквівилентність співвідношень (3) та (4) випливає з наступного твердження:

Твердження ([1, с. 66]).

$$\mu(t) = x(t) - \int_0^t y(s)\, ds$$

є мартингалом тоді і тільки тоді коли

$$\widetilde{\mu}(t) = x(t) exp \left\{ - \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)}\, ds \right\}$$

є мартингал.

Зауваження 1.3. Проблема великих відхилень, як правило, реалізується в 4 етапи [2, ch. 2]:

(1) Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення.

(2) Визначення експоненційної компактності.

(3) Визначення принципу порівняння для граничного оператора.

(4) Конструкція варіаційного представлення функціоналу дії, що визначає великих відхилень.

Етапи (2)–(4) для експоненційного генератора що відповідає процесам з незалежними приростами реалізовано в монографії [2].

Деякі з вказаних етапів реалізовано також в монографії [3], де проблема великих відхилень досліджується з використанням кумулянти процесу з незалежними приростами. Зв'язок між кумулянтою та експоненційним генератором випливає з наступного.

Генератор марковського процесу можна подати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda x} a(\lambda) \overline{\varphi}(\lambda)\, d\lambda,$$

де $a(\lambda)$ — кумулянта процессу, $\overline{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx$.

Зворотнє перетворення дає

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\lambda x} \mathbb{L}\varphi(x)\, dx = a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda).$$

Перепишемо

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\lambda x} \mathbb{L}\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} e^{-\lambda x} a(\lambda)\varphi(x)\, dx,$$

та за допомогою заміни

$$e^{-\lambda x}\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$$

отримаємо

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\lambda x} \mathbb{L} e^{\lambda x} \widetilde{\varphi}(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} a(\lambda)\widetilde{\varphi}(x)\, dx.$$

Таким чином,

$$e^{-\lambda x} \mathbb{L} e^{\lambda x} = a(\lambda),$$

або через експоненційний генератор:

$$\mathbb{H}\varphi_0(x) = a(\lambda),$$

де $\varphi_0(x) = \lambda x$.

Зауваження 1.4. В роботах [8, 9] В. С. Королюк запропонував метод розв'язання проблеми сингулярного збурення при дослідженні великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі асимптотично малої дифузії.

В класичних роботах асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень виконується, як правило, з використанням великого параметра серії $n \to \infty$, а іноді навіть кількох різних параметрів (див. напр. [10]).

Нормування випадкової еволюції (1) малим параметром серії для розв'язання проблеми великих відхилень в схемі пуасонової апроксимації реалізується наступним чином:

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta\left(ds; x\left(s/\varepsilon^2\right)\right), \qquad t \geq 0,$$

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \varepsilon\eta^\delta\left(t/\varepsilon^2\right),$$

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma^\delta(dv; x), \qquad x \in E,$$

де $\varepsilon, \delta \to 0$ так, що $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$.

2. Основні умови пуасонової апроксимації

C2: *Пуасонова апроксимація.* Сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\delta(t; x)$, $x \in E$, $t \geq 0$ задовольняє умови пуасонової апроксимації:

PA1: Апроксимация середніх:

$$a_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}} v\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[a(x) + \theta_a^\delta(x)],$$

та

$$c_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}} v^2\Gamma^\delta(dv; x) = \delta[c(x) + \theta_c^\delta(x)],$$

де

$$\sup_{x\in E}|a(x)| \leq a < +\infty, \qquad \sup_{x\in E}|c(x)| \leq c < +\infty.$$

PA2: Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\Gamma_g^\delta(x) = \int_{\mathbf{R}} g(v)\Gamma^\delta(dv; x) = \delta\left[\Gamma_g(x) + \theta_g^\delta(x)\right]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ — класу функцій, що визначає міру (див. [4, ch. 7]), $\Gamma_g(x)$ — обмежене ядро:

$$|\Gamma_g(x)| \leq \Gamma_g$$

(константа залежна від g).

Ядро $\Gamma^0(dv; x)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbf{R})$ співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_{\mathbf{R}} g(v)\,\Gamma^0(dv; x), \qquad g \in C_3(\mathbf{R}).$$

Знехтувально малі доданки θ_a^δ, θ_c^δ, θ_g^δ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E}|\theta_\cdot^\delta(x)| \to 0, \qquad \delta \to 0.$$

PA3: Має місце співвідношення

$$c(x) := \int_{\mathbf{R}} v^2\Gamma^0(dv; x),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в експоненційному генераторі, який визначає розв'язання проблеми великих відхилень.

C3: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int_{|v|>c} v^2\,\Gamma^0(dv; x) = 0.$$

C4: *Експоненційна обмеженість*:

$$\int_{\mathbf{R}} e^{p|v|}\,\Gamma^\delta(dv; x) < \infty \quad \text{для всіх } p \in \mathbf{R}.$$

3. Основний результат

Теорема 3.1. *Розв'язання проблеми великих відхилень для випадкової еволюції*

$$\xi_\varepsilon^\delta(t) = \xi_\varepsilon^\delta(0) + \int_0^t \eta_\varepsilon^\delta \left(ds; x\left(s/\varepsilon^2\right)\right), \qquad t \geq 0,$$

яка задається генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\delta \varphi(u,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(\cdot, x) + \Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u,\cdot), \tag{5}$$

де

$$\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma^\delta(dv;x), \qquad x \in E \tag{6}$$

визначається експоненційним генератором

$$H^0\varphi(u) = \widetilde{a}\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}} [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\, \widetilde{\Gamma}^0(dv), \tag{7}$$

$$\widetilde{a} = \Pi a(x) = \int_E \pi(dx)a(x), \qquad \widetilde{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v;x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v;x).$$

Усереднення проводиться по стаціонарній мірі перемикаючого марковського процесу.

Зауваження 3.1. Великі відхилення для випадкових еволюцій в схемі пуасонової апроксимації визначаються експоненційним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами. Вичерпне дослідження проблеми випадкових відхилень для стрибкового процесу з незалежними приростами викладено в монографії [3].

Для доведення теореми нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.1. *Експоненційний генератор в схемі серій*

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon} \tag{8}$$

має наступне асимптотичне представлення

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_\Gamma(x)\varphi(u) + \theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E} |\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0$, $\varepsilon, \delta \to 0$,

$$H_\Gamma(x)\varphi(u) = a(x)\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}} \left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)\right] \Gamma^0(dv;x).$$

Доведення. Перепишемо (8), враховуючи вигляд генератора (6). Маємо:

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1\right] \Gamma^\delta(dv;x),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] \Gamma^\delta(dv;x)$$
$$+ \varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}} \left[\Delta_\varepsilon\varphi(u) + \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] \Gamma^\delta(dv;x).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^\varepsilon(v) = e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^\varepsilon(v)/v^2 \to 0, \qquad v \to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для кожного ε за умови обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^\varepsilon(v)$ є рівномірною по u за умов **C3, C4** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned}
H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbf{R}}\left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right]\Gamma^0(dv;x) \\
&+ \varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}\left[\Delta_\varepsilon\varphi(u) - v\varphi'(u) - \varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(u)\right]\Gamma^\delta(dv;x) \\
&+ \varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u) + \delta c(x)\varphi''(u) \\
&+ \varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}\left[\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2 - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2\right]\Gamma^\delta(dv;x) + \varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.
\end{aligned}$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u) \in C^3(\mathbf{R})$, та умову **PA2** отримаємо:

$$\begin{aligned}
H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) &= \varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbf{R}}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u) - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2\right]\Gamma^0(dv;x) \\
&+ \varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbf{R}}\left(e^{v\varphi'(u)}\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\right)\Gamma^0(dv;x) \\
&+ \varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbf{R}}\varepsilon^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u})\,\Gamma^0(dv;x) + \varepsilon^{-1}\delta a(x)\varphi'(u) + \delta c(x)\varphi''(u) \\
&+ \varepsilon^{-1}\delta\int_{\mathbf{R}}\varepsilon^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\,\Gamma^0(dv;x) + \varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}c(x)(\varphi'(u))^2.
\end{aligned}$$

Враховуючи **PA3** та граничну умову $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$, остаточно маємо:

$$H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_\Gamma(x)\varphi(u) + \theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0,\ \varepsilon,\delta \to 0.$

Лему доведено.

Доведення теореми: Граничний перехід в експоненційному нелінійному генераторі винадкової еволюції реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi_\varepsilon^\delta(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\ln[1 + \delta\varphi_1(u,x)].$$

Таким чином, маємо:

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon = e^{-\varphi^\varepsilon/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}_\varepsilon^\delta e^{\varphi^\varepsilon/\varepsilon} = e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1]^{-1}\varepsilon\mathbb{L}_\varepsilon^\delta e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1].$$

Обчислення асимптотичної поведінки останнього експоненційного генератора дає наступний результат.

Лема 3.2. *Має місце асимптотичне представлення*

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon = Q\varphi_1 + H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0,\ \varepsilon,\delta \to 0.$

Доведення. Враховуючи (5) маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon &= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1 - \delta\varphi_1 + \frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}\right]\left\{\varepsilon^{-1}Q + \varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)\right\}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1] \\
&= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1 - \delta\varphi_1 + \frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}\right]\left\{\varepsilon^{-1}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_1 + \varepsilon\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon} + \varepsilon\delta\Gamma_\varepsilon^\delta(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1\right\} \\
&= Q\varphi_1 + H_\Gamma^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),
\end{aligned}$$

де

$$\theta^{\varepsilon,\delta}(x) = \delta\left[\frac{\varepsilon}{1+\delta\varphi_1}e^{-\varphi/\varepsilon}\Gamma^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 - \frac{\varepsilon^{-1}\delta\varphi_1}{1+\delta\varphi_1}Q\varphi_1 - \frac{\delta\varphi_1}{1+\delta\varphi_1}e^{-\varphi/\varepsilon}\Gamma^{\delta}(x)e^{\varphi/\varepsilon}\right].$$

Лему доведено. □

Враховуючи Лему 3.1, маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon} = Q\varphi_1 + H_{\Gamma}(x)\varphi(u) + h^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $h^{\varepsilon,\delta}(x) = \theta^{\varepsilon,\delta}(x) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)$.

Тепер використовуємо розв'язок задачі сингулярного збурення для зведено-оборотного оператора Q (див. [5, ch. 1]). З умови розв'язності маємо:

$$Q\varphi_1 + H_{\Gamma}(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u),$$

де

$$H^0\varphi(u) = \Pi Q\Pi\varphi_1 + \Pi H_{\Gamma}(x)\Pi\varphi(u).$$

Отже остаточно отримуємо (6):

$$H^0\varphi(u) = \widetilde{a}\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)\right]\widetilde{\Gamma}^0(dv).$$

Залишковий член $h^{\varepsilon,\delta}(x)$ можна обчислити в явному вигляді, використовуючи розв'язок рівняння Пуассона (див. Зауваження 1.1, детальніше [5])

$$\varphi_1(u,x) = R_0\widetilde{H}(x)\varphi(u), \qquad \widetilde{H}(x) := H_{\Gamma}(x) - H^0.$$

Теорему доведено.

Література

1. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and convergence*, J. Wiley & Sons, New York, 1986.
2. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large Deviation for Stochastic Processes*, AMS, RI, 2006.
3. M. J. Freidlin and A. D. Wentzel, *Random Perturbation of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. J. Jacod and A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlang, Berlin, 1987.
5. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, WSP, 2005.
6. V. S. Koroliuk, N. Limnios, and I. V. Samoilenko, *Poisson approximation of process with locally independent increments and semi-Markov switching — Toward application in reliability*, Advances on Degradation Models with Application to Reliability, Survival Analysis and Finance (M. S. Nikulin, et. al., eds.), Birkhäuser, Boston, 2010, pp. 105–116.
7. V. S. Koroliuk, N. Limnios, and I. V. Samoilenko, *Poisson approximation of processes with locally independent increments with Markov switching*, Theory of Stochastic Processes, **15(31)** (2009), no. 1, 40–48; correct. in *Letter from the editors*, Theory of Stochastic Processes **15(31)** (2009), no. 2, 164.
8. В. С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Допов. НАН України (2010), № 6, 22–26.
9. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. матем. журн. **62** (2010), №. 5, 643–650.
10. A. A. Mogulskii, *Large deviation for processes with independent increments*, Ann. Prob. **21** (1993), 202–215.

Відділ фрактального аналізу, Інститут математики НАН України, Терещенківська, 3, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: isamoil@imath.kiev.ua

Надійшла 21/04/2011