Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 108–120

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 108–120

СИЛЬНА МАРКОВСЬКА АПРОКСИМАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ЛЕВІ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНЬ В СХЕМІ СЕРІЙ

УДК 519.21

Т. І. КОСЕНКОВА

Анотація. Вводиться поняття сильної марковської апроксимації, що є узагальненням поняття марковської апроксимації. Розглянуто нульову схему серій, що задовольняє умови теореми Гнєденка. Доведено, що послідовність процесів, побудована за відповідним випадковим блуканням, здійснює сильну марковську апроксимацію процесу Леві та, більш загально, послідовність різницевих наближень здійснює сильну марковську апроксимацію розв'язку СДР з шумом Леві.

Abstract. The notion of strong Markov approximation is introduced. It is proved that the sequence of step processes, associated to a triangular array of i.i.d. random variables, provides strong Markov approximation for a Lévy process under the assumptions of Gnedenko's theorem. The same result is obtained for a sequence of difference approximations of a solution to a Lévy driven SDE.

Аннотация. Введено понятие сильной марковской аппроксимации, которое является обобщением понятия марковской аппроксимации. Рассмотрена нулевая схема серий, удовлетворяющая условиям теоремы Гнеденка. Доказано, что последовательность процессов, построенная по соответствующему случайному блужданию, осуществляет марковскую аппроксимацию процеса Леви. Кроме того, доказано, что последовательность разностных приближений осуществляет сильную марковскую аппроксимацию решения СДР с шумом Леви.

1. Вступ

Теорема Скорохода про один імовірнісний простір дає змогу замість збіжності послідовності розподілів на деякому сепарабельному метричному просторі розглядати збіжність за ймовірністю випадкових елементів у цьому просторі. Для функціональних просторів, де випадковими елементами є випадкові процеси, таким методом можна отримувати граничний перехід у схемах, де послідовність неперервних функціоналів від дограничних процесів наближує функціонал від граничного процесу. З іншого боку, в деяких задачах виникає потреба досліджувати граничну поведінку істотно розривних функціоналів, для яких описана вище схема міркувань не є застосовною (див. (1) та теорему 1 далі). В такій ситуації може бути корисною наявність додаткових властивостей у пари процесів, заданих на одному ймовірнісному просторі, таких, наприклад, як марковська властивість. Для ілюстрації, розглянемо ситуацію класичної ЦГТ: нехай послідовність випадкових ламаних, побудована за випадковим блуканням, стрибки якого центровані та мають другий момент

$$X_k(t) = \frac{S_{k-1}}{\sqrt{n}} + (nt-k+1)\left[\frac{S_k}{\sqrt{n}} - \frac{S_{k-1}}{\sqrt{n}}\right], \qquad t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right),\ k \in \mathbb{N}.$$

Нехай X — вінерівський процес. Тоді має місце класичний принцип інваріантності Донскера [1]: випадкові ламані збігаються в $\mathbb{C}[0;T]$ до розподілу вінерівського процесу. Отже на деякому ймовірнісному просторі існують $\hat{X}_n$, $\hat{X}$ відстань між якими в $\mathbb{C}[0;T]$ прямує до нуля за ймовірністю, розподіл $\hat{X}_n$ дорівнює розподілу випадкових

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J25, 60F17, 60B10.

Ключові слова і фрази. Процес Леві, ЦГТ в схемі серій, сильна марковська апроксимація.

ламаних, а розподіл $\hat{X}$ — розподілу вінерівського процесу. Зауважимо, що випадкові ламані мають марковську властивість у вузлах відносно натуральної фільтрації. Чи можна побудувати пару процесів так, щоб її компоненти були розподілені як випадкові ламані та вінерівський процес і така пара мала марковську властивість? Відповідь на це питання наведена в роботі [2] в термінах введеного там же поняття *марковської апроксимації.*

Означення 1. Послідовність X_n здійснює марковську апроксимацію процесу X, якщо для довільних $\gamma > 0$, $T < \infty$, існує $K(\gamma, T)$ та послідовність двокомпонентних процесів $\{\hat{Y_n} = (\hat{X_n}, \hat{X^n})\}$, таких що:

(1) $\hat{X}_n =^d X_n$, $\hat{X}^n =^d X$;

(2) процеси $\hat{Y}_n$, $\hat{X}_n$, $\hat{X}^n$ мають марковську властивість в точках виду

$$\frac{iK(\gamma, T)}{n}, \qquad i \in \mathbb{N}$$

відносно фільтрації $\{\hat{F}_t^{\,n} = \sigma(\hat{Y}_n(s)), s \le t\}$;

(3) $$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{i\le\frac{Tn}{K(\gamma,T)}} \rho\left(\hat{X}_n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right), \hat{X}^n\left(\frac{iK(\gamma,T)}{n}\right)\right) > \gamma\right) < \gamma.$$

В [2] доведено, що випадкові ламані здійснюють марковську апроксимацію вінерівського процесу, при цьому, за винятком тривіального випадку стандартного нормального розподілу величин $\{\xi_n, n \ge 1\}$, при покращенні точності апроксимації ($\gamma \to 0+$) марковська властивість пари обов'язково погіршується ($K(\gamma, T) \to \infty$ для довільного $T > 0$).

Означення 1, відповідно до обговорення вище, дійсно дає змогу доводити граничні теореми для деяких видів істотно розривних функціоналів. У роботі [3] для функціоналів виду

$$\phi_n^{s,t}(X_n) = \sum_{k: s\le\frac{k}{n}<t} F_n\left(X_n\left(\frac{k}{n}\right), \dots, X_n\left(\frac{k+L-1}{n}\right)\right), \qquad 0 \le s < t, \tag{1}$$

$F_n(\cdot)$ — невід'ємні, а L — фіксоване ціле число, доведено наступну граничну теорему, для якої марковська апроксимація є однією з ключових умов.

Теорема 1. *Нехай виконано наступні умови.*

(1) *послідовність X_n здійснює марковську апроксимацію процесу X.*

(2) *$F_n(\cdot)$ — невід'ємні, обмежені та рівномірно прямують до нуля при $n \to \infty$.*

(3) *Існує W-функціонал $\phi(X)$ від граничного процесу, такий, що характеристики функціоналів ϕ_n рівномірно збігаються до характеристики $\phi(X)$ (див. розд. 6 [4].)*

(4) *Характеристика функціоналу $\phi(X)$ є рівномірно неперервною.*

Тоді ϕ_n збігається за розподілом до $\phi(X)$.

Крім класичної ЦГТ, в роботах [3], [5] питання наявності марковської апроксимації розглядалось і для деяких нелінійних узагальнень. Нехай Z_n — розв'язок наступної різницевої апроксимації СДР:

$$Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) = Z_n\left(\frac{k}{n}\right) + a\left(Z_n\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n} + b\left(Z_n\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot\Delta X_n(\frac{k}{n}),$$

$Z_n(0) = z$, де

$$\Delta X_n\left(\frac{k}{n}\right) = X_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - X_n\left(\frac{k}{n}\right)$$

— приріст траєкторії випадкової ламаної, а Z — розв'язок дифузійного СДР виду

$$dZ(t) = a(Z(t))\,dt + b(Z(t))\,dX(t), \qquad Z(0) = z,$$

де $X(t)$ — вінерів процес. За відповідних умов у [3, 5] доведено, що послідовність процесів $Z_n(t)$ здійснює марковську апроксимацію процесу $Z(t)$. Отже, властивість марковської апроксимації є певною мірою нечутливою "збурень" початкової системи. Це, зокрема, відрізняє марковську апроксимацію від інших результатів, що мають місце в ситуації ЦГТ, таких як класична теорема Скорохода про вкладення [6].

В даній роботі ми досліджуємо виконання властивості марковської апроксимації в ситуації загальної ЦГТ в схемі серій. Ми розглядатимемо схему серій

$$\{\xi_{kn}, 1 \le k \le n, n \ge 0\},$$

яка задовольняє умови теореми Гнєденка [7]. За теоремою Скорохода, при цьому має місце збіжність в $\mathbb{D}[0;1]$ процесу X_n, побудованого за схемою серій, до процесу Леві без дифузійної компоненти. Ми доведемо, що в цій ситуації X_n здійснює марковську апроксимацію процесу X, і навіть більше: має місце сильна марковська апроксимація в сенсі наступного означення.

Означення 2. Послідовність процесів X_n здійснює сильну марковську апроксимацію процесу X, якщо умови означення марковської апроксимації виконуються при $K(\gamma, T) = 1$.

Також ми доведемо, що аналогічний результат має місце для певних нелінійних узагальнень описаної вище схеми. А саме, розглянемо процес, що задається СДР виду

$$Z(t) = Z_0 + \int_0^t a(Z(s))\,ds + \int_0^t b(Z(s-))\,dX(s),$$

де $X(t)$ — процес Леві, що розглядався вище. Нехай Z_n, $n \ge 1$, — послідовність східчастих процесів, заданих в точках $\frac{k}{n}$, $1 \le k \le n$ різницевою схемою, побудованою за приростами процесу X_n. За природного припущення на коефіцієнти (умова Ліпшиця) буде доведено сильну марковську апроксимацію процесу Z послідовністю процесів Z_n.

2. Сильна марковська апроксимація процесу Леві

Розглядатимемо нульову схему серій $\{\xi_{kn}, 1 \le k \le n, n \ge 1\}$, де ξ_{kn}, $1 \le k \le n$ — о.р.в.в. з функцією розподілу F_n, $n \ge 1$ і процес Леві виду

$$X(t) = \int_0^t \int_{|u| \le 1} u[\nu(du, ds) - \Pi(du)] + \int_0^t \int_{|u|>1} u\,\nu(du, ds).$$

Нехай Π — його міра Леві, означимо наступні величини:

$$\Pi_n(dx) = n\,F_n(dx) \tag{2}$$

при $x > 0$ покладемо

$$\Pi_n^+(x) = n[1 - F_n(x)], \qquad \Pi_n^-(-x) = nF_n(-x) \tag{3}$$

Розглянемо таку функцію:

$$\tau(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\beta_n = \mathbf{E}(\tau(\xi_{kn})), \qquad b_n = n\beta_n, \qquad B_n = n\beta_n^2.$$

Наступні умови є варіантом умов теореми Гнеденко і взяті з XVII, §7 [8] .

(**H**): нехай в усіх точках неперервності $x > 0$ міри Π

$$\Pi_n^+(x) \to \Pi^+(x), \tag{4}$$

нехай в усіх точках неперервності $-x$, $x > 0$ міри Π

$$\Pi_n^-(-x) \to \Pi^-(-x) \tag{5}$$

і для деякого $s > 0$ (точки $\{-s, s\}$ є точками неперевності Π)

$$\int_{-s}^{s} x^2\, \Pi_n(dx) - B_n \to \int_{-s}^{s} x^2\, \Pi(dx). \tag{6}$$

Основним результатом даного розділу є наступна теорема.

Теорема 2. *За умов (**H**) і (**C**), процес*

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{kn} - tb_n, \qquad n \geq 1,\ t \in [0;1]$$

здійснює сильну марковську апроксимацію процесу $X(t)$.

Будуватимемо необхідні для марковської апроксимації процеси як суми незалежних приростів на інтервалах довжини $\frac{1}{n}$ так, щоб їх різниця задовольняла наведену оцінку. Розглянемо наступні допоміжні конструкції.
Для деякого фіксованого $R > 1$, яке є точкою неперервності міри Π, розглянемо процес

$$X^1(t) = \int_0^t \int_{|u| \leq 1} u\, \tilde{\nu}(du, ds) + \int_0^t \int_{1 < |u| \leq R} u\, \nu(du, ds), \qquad t \in [0;1],$$

і незалежні однаково розподілені випадкові величини

$$\xi_{kn}^1 = \begin{cases} \xi_{kn}, & |\xi_{kn}| \leq R, \\ 0, & |\xi_{kn}| > R, \end{cases} \qquad 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1.$$

Позначимо $X_n^1(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{kn}^1 - tb_n^1$, $t \in [0;1]$, де сталі визначаються аналогічно попереднім. Оцінимо величину “загрублення” при даній конструкції.

Лема 1. *Для довільного $\gamma > 0$:*

(1)

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} \left| X\left(\frac{k}{n}\right) - X^1\left(\frac{k}{n}\right) \right| > \gamma \right) < 1 - \exp(-\Pi(|x| > R));$$

(2)

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} \left| X_n\left(\frac{k}{n}\right) - X_n^1\left(\frac{k}{n}\right) \right| > \gamma \right) < 1 - \exp(-\Pi(|x| > R)) + \delta_n,$$

де

$$\delta_n = (1 - \mathsf{P}(|\xi_{kn}| > R))^n - \exp(-\Pi(|x| > R)).$$

Зауваження 1. За виконання умови (**H**):

$$\delta_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Доведення. Доведемо 1. Для цього зауважимо, що, якщо відбувається подія

$$\left\{ \sup_{1 \leq k \leq n} \left| X\left(\frac{k}{n}\right) - X^1\left(\frac{k}{n}\right) \right| > \gamma \right\},$$

то відбувається і подія $\{\int_0^1 \int_{|x|>R} |u|\,\nu(du,ds) \neq 0\}$, отже маємо наступну нерівність:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|X\left(\frac{k}{n}\right)-X^1\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)\le \mathsf{P}\left(\int_0^1\int_{|x|>R}|u|\,\nu(du,ds)\neq 0\right)$$
$$\le 1-\exp(-\Pi(|x|>R)).$$

Доведемо 2. З явного вигляду процесів X_n та X_n^1 маємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|X_n\left(\frac{k}{n}\right)-X_n^1\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)\le 1-\mathsf{P}(\xi_{kn}\mathbf{1}_{|\xi_{kn}|<\gamma}, k=1,2,\dots,n)$$
$$=1-(1-\mathsf{P}(\xi_{kn}\mathbf{1}_{|\xi_{kn}|>\gamma}))^n\le 1-(1-\mathsf{P}(|\xi_{kn}|>R))^n$$
$$=1-\exp(-\Pi(|x|>R))+\delta_n.\quad\square$$

Для деякого фіксованого $\varepsilon<1$, яке є точкою неперервності міри Π, розглянемо процес

$$X^2(t)=\int_0^t\int_{\varepsilon\le|u|\le 1}u\,\tilde\nu(du,ds)+\int_0^t\int_{1<|u|\le R}u\,\nu(du,ds)$$
$$=\int_0^t\int_{\varepsilon\le|u|\le R}u\,\nu(du,ds)-t\int_{\varepsilon\le|u|\le 1}u\,\Pi(du),\qquad t\in[0;1],$$

і незалежні однаково розподілені випадкові величини

$$\xi_{kn}^2=\begin{cases}0, & |\xi_{kn}^1|<\varepsilon,\\ \xi_{kn}^1, & |\xi_{kn}^1|\ge\varepsilon,\end{cases}\qquad 1\le k\le n,\ n\ge 1.$$

Оцінимо величину “загрублення” на цьому кроці.

Лема 2. *Для довільного* $\gamma>0$*:*

(1) $\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|X\left(\frac{k}{n}\right)-X^1\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)<\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,\Pi(dx)}{\gamma^2}$*;*

(2) $\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|X_n^1\left(\frac{k}{n}\right)-X_n^2\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)<\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,\Pi(dx)+\Delta_n(\varepsilon)}{\gamma^2}$, *де*

$$\Delta_n(\varepsilon)=\int_{|u|<\varepsilon}x^2\,\Pi_n(dx)-n\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x\,F_n(dx)\right)^2-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,\Pi(dx).$$

Зауваження 2. Оскільки $\{\xi_{kn}\}$ це нульова схема серій і виконується умова (**H**) то

$$\Delta_n\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Доведення. Наведемо лише доведення другої нерівності - ідея доведення першої аналогічна. Різниці $X_n^1(k/n)-X_n^2(k/n)$, $1\le k\le n$ центровані і незалежні у сукупності. Дійсно, з явного вигляду процесів:

$$\mathsf{E}\left[X_n^1\left(\frac{k}{n}\right)-X_n^2\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\mathsf{E}\left[\sum_{j=1}^k\left((\xi_{jn}^1-\xi_{jn}^2)-\left(\beta_n^1-\beta_n^2\right)\right)\right]=0.$$

Крім того $X_n^1(1)-X_n^2(1)=\sum_{k=1}^n[X_n^1(k/n)-X_n^2(k/n)]$. Розглянемо другий момент:

$$\mathsf{E}\left|X_n^1(1)-X_n^2(1)\right|^2=n\,\mathbf{D}\,\xi_{kn}\mathbf{1}_{|\xi_{kn}|<\varepsilon}=\int_{|u|<\varepsilon}x^2\,\Pi_n(dx)-n\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x\,F_n(dx)\right)^2$$
$$=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,\Pi(dx)+\Delta_n(\varepsilon).$$

Застосувавши нерівність Колмогорова (т.1 розд. IV §2 [9]), маємо заявлену нерівність. □

Розглянемо процес

$$\tilde{X}^2(t) = \int_0^t \int_{\varepsilon \le |u| \le R} u\, \nu(du, ds), \qquad t \in [0; 1]$$

Його міра Леві Π^2 є скінченою за побудовою (як звуження міри Π на множину $A_{\varepsilon,R} \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \varepsilon \le |x| \le R\}$). Отже процес $\tilde{X}^2$ є складеним пуассоновим процесом з інтенсивністю стрибка

$$\lambda = \Pi(A_{\varepsilon,R})$$

і розподілом стрибка

$$\Xi_{\varepsilon,R}(A) = \frac{\Pi^2(A \cap A_{\varepsilon,R})}{\Pi^2(A_{\varepsilon,R})}, \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Тоді приріст процесу $\tilde{X}^2$ на відрізку довжини $\frac{1}{n}$ можна подати у виді:

$$\zeta_1^2 = X^2\left(\frac{1}{n}\right) = \mathbf{1}_{\beta=1}\theta + \mathbf{1}_{\beta=2}\kappa_n,$$

де θ має розподіл $\Xi_{\varepsilon,R}$, а β має розподіл

$$\mathsf{P}(\beta = 0) = \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \mathsf{P}(\beta = 1) = \frac{\lambda}{n}\exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \mathsf{P}(\beta = 2) = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Випадкова величина κ_n має розподіл складеного процесу Пуассона X^2 за умови, що на відрізку довжини $\frac{1}{n}$ сталось два або більше стрибків.

Зауваження 3. Має місце наступна оцінка:

$$\mathsf{E}\,|\kappa_n|^2 \le \sum_{k\ge 2} \frac{\frac{1}{k!}(kR)^2 \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda_{\varepsilon,R}}{n}\right\} \cdot \left(\frac{\lambda_{\varepsilon,R}}{n}\right)^k}{1 - \exp\left\{-\frac{\lambda_{\varepsilon,R}}{n}\right\} - \frac{\lambda_{\varepsilon,R}}{n} \cdot \exp\left\{-\frac{\lambda_{\varepsilon,R}}{n}\right\}} \to C, \qquad n \to \infty,$$

де C — це деяка стала.

З іншого боку, прирости процесу $\tilde{X}_n^2 = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{kn}^2$ на відрізку довжини $\frac{1}{n}$ можна подати у виді

$$\zeta_{1n}^2 = X_n^2\left(\frac{1}{n}\right) = \mathbf{1}_{\alpha=1}\theta_n,$$

де θ_n має розподіл

$$\Xi_{\varepsilon,R,n}(A) = \frac{F_n^2(A \cap A_{\varepsilon,R})}{F_n^2(A_{\varepsilon,R})}, \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

а α має розподіл

$$\mathsf{P}(\alpha = 0) = 1 - F_n^2(A_{\varepsilon,R}), \qquad \mathsf{P}(\alpha = 1) = F_n^2(A_{\varepsilon,R}).$$

Оскільки ε та R в побудові обирались точками неперервності міри Π, то з (**H**) випливає, що

$$\Xi_{\varepsilon,R,n} \Rightarrow \Xi_{\varepsilon,R}, \qquad n \to \infty.$$

Тоді, за принципом одного ймовірнісного простору [10], існує $(\Omega_1, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ і величини $(\hat{\theta}_n, \hat{\theta})$ на ньому, такі, що:

$$|\hat{\theta}_n - \hat{\theta}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty,$$

причому $\hat{\theta}_n$ має розподіл $\Xi_{\varepsilon,R,n}$, а $\hat{\theta}$ має розподіл $\Xi_{\varepsilon,R}$.

Зауваження 4. Відмітимо, що $|\hat\theta_n| \le R$, $|\hat\theta| \le R$, за побудовою, тому із збіжності за ймовірністю маємо:

$$\mathsf{E}\,|\hat\theta - \hat\theta_n|^p \to 0, \qquad n \to \infty, \ \forall\, p \ge 1.$$

Можна побудувати на одному ймовірнісному просторі пару $(\hat\alpha; \hat\beta)$ так, щоб

$$p_{0,0} = \mathsf{P}(\hat\alpha = 0, \hat\beta = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \bar o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

$$p_{1,1} = \mathsf{P}(\hat\alpha = 1, \hat\beta = 1) = \frac{\lambda}{n} + \bar o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

$$p_{i,j} = \bar o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty, \ i \ne j.$$

Отже розглянемо на одному ймовірнісному просторі набір $(\hat\theta, \hat\theta_n, \hat\alpha, \hat\beta, \hat\kappa_n)$, де $\hat\kappa_n$ незалежне від пар $(\hat\alpha; \hat\beta)$, $(\hat\theta, \hat\theta_n)$ і означимо за ним випадкові величини $\hat\zeta_1^2$, $\hat\zeta_{1n}^2$ аналогічно ζ_1^2, ζ_{1n}^2. За побудовою

$$\hat\zeta_1^2 =^d \zeta_1^2, \qquad \hat\zeta_{1n}^2 =^d \zeta_{1n}^2.$$

Покладемо

$$\hat\eta_1^2 = \hat\zeta_1^2 - \frac{1}{n}\int_{\varepsilon \le |u| \le 1} u\,\Pi(du),$$

$$\hat\eta_{1n}^2 = \hat\zeta_{1n}^2 - \beta_n^2.$$

Твердження 1. *Для пари величин* $(\hat\eta_1^2, \hat\eta_{1n}^2)$ *виконується*

$$\mathsf{E}\left|\hat\eta_1^2 - \hat\eta_{1n}^2\right|^2 = \bar o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Доведення. Для доведення розглянемо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|\hat\eta_1^2 - \hat\eta_{1n}^2\right|^2 &\le 2\,\mathsf{E}\left|\mathbf{1}_{\hat\beta=1}\hat\theta + \mathbf{1}_{\hat\beta=2}\hat\kappa_n - \mathbf{1}_{\hat\alpha=1}\hat\theta_n\right|^2 + 2\,\mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\int_{\varepsilon \le |u| \le 1} u\,\Pi(du) - \beta_n^2\right|^2 \\
&= 2\left(\mathsf{E}\big|\hat\theta_n\big|^2 p_{0,1} + \mathsf{E}\,|\hat\kappa_n|^2\, p_{0,2} + \mathsf{E}\big|\hat\theta\big|^2 p_{1,0} + \mathsf{E}\big|\hat\theta - \hat\theta_n\big|^2 p_{1,1} + \mathsf{E}\big|\hat\theta_n - \hat\kappa_n\big|^2 p_{1,2}\right) \\
&\quad + 2\,\mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\int_{\varepsilon \le |u| \le 1} u\,\Pi(du) - \beta_n^2\right|^2.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що останній доданок є $\bar o(1/n)$. Кожна з величин $\mathsf{E}\,|\hat\theta_n|$, $\mathsf{E}\,|\hat\theta|^2$ обмежена сталою R^2, а величина $\mathsf{E}\,|\hat\kappa_n|^2$ обмежена відповідно до зауваження 3. Врахувавши також Зауваження4 і явний вигляд

$$p_{1,1} = \frac{1}{n}\Pi^2(A_{\varepsilon,R}) + \bar o\left(\frac{1}{n}\right),$$

матимемо заявлене. □

Твердження 2. *На одному ймовірнісному просторі* $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ *існують випадкові величини*

$$\eta_{1n}, \qquad \eta_{1n}^1, \qquad \eta_{1n}^2 \qquad \eta_1^2, \qquad \eta_1^1, \qquad \eta_1,$$

та процес $X(t)$, $t \in [0; 1/n]$ *такі, що*

(1) $(\eta_{1n}, \eta_{1n}^1, \eta_{1n}^1)$ *розподілена як* $(\xi_{1n}, \xi_{1n}^1, \xi_{1n}^2)$,
(2) $(\eta_1, \eta_1^1, \eta_1^2)$ *розподілена як* $X(1/n), X^1(1/n), X^2(1/n))$,
(3) (η_{1n}^2, η_1^2) *розподілена як* $(\hat\eta_{1n}^2, \hat\eta_1^2)$,
(4) *процес* $X(t)$ *однаково розподілений з вихідним процесом Леві, і* $X(1/n) = \eta_1$.

Доведення. Доведення спирається на наступний результат (див., наприклад, [11, розд. 11 §8])

Лема 3. *Нехай μ, ν розподіли на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, $\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ відповідно, де $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ — повні сепарабельні простори. Причому*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}): \quad \mu(\mathbb{X}, A) = \nu(A, \mathbb{Z}).$$

Тоді на деякому ймовірнісному просторі можна побудувати ξ, η, ζ, так, щоб спільний розподіл ξ та η дорівнював μ, а спільний розподіл η та ζ дорівнював ν.

Покладемо $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{Z} = \mathbb{R}$. Розглянемо на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ і $\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ пари $(\hat{\eta}^2_{1n}, \hat{\eta}^2_1)$ і $(X^2(1/n), X^1(1/n))$ відповідно. Розподіли цих пар відомі (див. вище). Застосувавши Лему 3, отримаємо на одному ймовірнісному просторі η^2_{1n}, η^2_1, η^1_1 з заявленими властивостями. Далі позначимо

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \qquad \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Z} = \mathbb{R}.$$

Застосувавши Лему 3 до $(\eta^2_{1n}, \eta^2_1, \eta^1_1)$ та $(X^1(1/n), X^2(1/n))$ отримаємо на одному ймовірнісному просторі η^2_{1n}, η^2_1, η^1_1, η_1. Повторюючи подібні міркування матимемо заявлене. □

Перейдемо до доведення основної теореми. Опишемо побудову шуканої послідовності двокомпонентних процесів. Ми маємо на одному ймовірнісному просторі Ω^* випадкові величини η_{1n}, η^1_{1n}, η^2_{1n}, η^2_1, η^1_1, η_1, та процес $X(t)$, $t \in [0; 1/n]$, а отже ми побудували на одному ймовірнісному просторі прирости вихідних процесів. Позначимо $\Omega := (\Omega^*)^n$, $\omega = (\omega_{1n}, \omega_{2n}, \dots, \omega_{nn})$. На ньому означимо послідовність $\{\hat{\eta}_{kn}(\omega), 1 \le k \le n\}$ таким чином

$$\hat{\eta}_{kn}(\omega) = \eta_{1n}(\omega_{kn}).$$

За побудовою:

$$\hat{\eta}_{kn} \stackrel{d}{=} \xi_{kn}.$$

Для величин $\hat{\eta}_{kn}$ визначимо сталі β_{kn}, b_n, B_n як вказано вище. Означимо процес $\hat{X}_n(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} \hat{\eta}_{kn} - tb_n$, $t \in [0; 1]$. За побудовою:

$$\hat{X}_n(t) \stackrel{d}{=} X_n(t).$$

Означимо процес

$$\begin{aligned} \hat{X}^n(t, \omega) = X\left(\frac{1}{n}, \omega_{1n}\right) + X\left(\frac{1}{n}, \omega_{2n}\right) + \dots \\ + X\left(\frac{1}{n}, \omega_{([nt])n}\right) + X\left(t - \frac{[nt]}{n}, \omega_{([nt]+1)n}\right), \qquad t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Для $\hat{X}_n$ виконується

$$\hat{X}^n(t) \stackrel{d}{=} X(t),$$

де $X(t)$, $t \in [0; 1]$ — початковий процес Леві. Таким чином послідовність двокомпонентних процесів $\{\hat{Y}_n := (\hat{X}^n, \hat{X}_n)\}$ задовольняє умову першого пункту означення марковської апроксимації. Марковська властивість побудованих процесів доводиться за стандартною схемою (див. [12, §10]).

Аналогічно до $\hat{X}_n(t)$, $t \in [0; 1]$, побудуємо на просторі Ω процеси $\hat{X}^1_n(t)$, $\hat{X}^2_n(t)$, $t \in [0; 1]$. Процеси $\hat{X}^{1,n}(t)$, $\hat{X}^{2,n}(t)$, $t \in [0; 1]$ вводяться так, як X^1 та X^2 для процесу X.

Лема 4. *Для довільного $\gamma > 0$*

$$\limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{1 \le k \le n} \left|\hat{X}^2_n\left(\frac{k}{n}\right) - \hat{X}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right| > \gamma\right) = 0.$$

Доведення. Розглянемо

$$\left|\hat{X}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)-\hat{X}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le\left|\bar{X}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)-\bar{X}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ +\left|k\int_{1<|u|<R}x\,F_n(dx)-\frac{k}{n}\int_{1<|u|<R}x\,\Pi(dx)\right|,$$

де

$$\bar{X}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)-\bar{X}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)=\hat{X}_n^2-k\int_{1<|u|<R}u\,F_n(du)-\left(\hat{X}^{2,n}-\frac{k}{n}\int_{1<|u|<R}u\,\Pi(du)\right), \\ 1\le k\le n.$$

При цьому послідовність $\{\bar{X}_n^2(k/n)-\bar{X}^{2,n}(k/n), 1\le k\le n\}$ є мартингалом відносно фільтрації $\{\hat{F}_{k/n}^n=\sigma((\hat{X}_n^2(s),\hat{X}^{2,n}(s)), s\le k/n)\}$, і задовольняє максимальній нерівності для мартингалів. А саме

$$\forall\gamma>0\colon\quad \mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le qn}\left|\bar{X}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)-\bar{X}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)<\frac{\mathsf{E}\,|\bar{X}_n^2(1)-\bar{X}^{2,n}(1)|^2}{\gamma^2}.$$

Враховуючи твердження 1 і умову **H** маємо, що:

$$\mathsf{E}\,|\bar{X}_n^2(1)-\bar{X}^{2,n}(1)|^2 \\ \le 2\left(n\,\mathsf{E}\,|\hat{\eta}_1^2-\hat{\eta}_{1n}^2|^2+\left|k\int_{1<|u|<R}u\,F_n(du)-\frac{k}{n}\int_{1<|u|<R}u\,\Pi(du)\right|^2\right)\to 0, \\ n\to\infty,$$

отже маємо заявлене. □

Твердження 3. *Для довільного $\gamma>0$ маємо*

$$\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{X}_n\left(\frac{k}{n}\right)-\hat{X}^n\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)<\gamma.$$

Доведення. Зауважимо, що з властивостей міри Π випливає, що

$$1-\exp(-\Pi(|x|>R))\to 0,\qquad R\to\infty,$$
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,\Pi(dx)\to 0,\qquad \varepsilon\to\infty.$$

Для побудованих процесів справедливі доведені вище оцінки. Отже зафіксувавши $\gamma>0$, довільне, оберемо $R>1$ і $\varepsilon>0$ так, щоб це були точки неперервності міри Π і виконувалось заявлене. □

Отже ми перевірили третій пункт означення марковської апрксмації. При цьому, твердження 2 та 3 цього означення виконуються з $K(\gamma,T)=1$. Таким чином ми довели сильну марковську апроксимацію процесу Леві $X(t)$ процесом $X_n(t)$.

3. Різницеві наближення СДР з шумом Леві

Розглянемо марковський процес, що задається СДР вигляду

$$Z(t)=Z_0+\int_0^t a(Z(s))\,ds+\int_0^t b(Z(s-))\,dX(s), \tag{7}$$

де $X(t)$ — процес Леві, що розглядався вище, Z_0 — фінітна і $\mathcal{F}_0$ — вимірна випадкова величина. Та послідовність процесів Z_n, $n \geq 1$, заданих в точках $\frac{k}{n}$, $1 \leq k \leq n$ різницевим співвідношенням

$$Z_n\left(\frac{k}{n}\right) = Z_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + a\left(Z_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{n} + b\left(Z_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \cdot \Delta_{kn}, \qquad (8)$$

де $\Delta_{kn} = X_n(k/n) - X_n((k-1)/n) = \xi_{kn} - \beta_n$, і визначену в усіх інших точках лінійним чином:

$$Z_n(t) = Z_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + (nt - k + 1)\left[Z_n\left(\frac{k}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right], \qquad t \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right).$$

Стандартною умовою існування і єдиності розв'язку є (див., наприклад, [13, V §3]):

($\mathbf{L}$) глобальна умова Ліпшиця

$$\exists L > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |b(x) - b(y)| \leq L|x - y|, \; |a(x) - a(y)| \leq L|x - y|.$$

Теорема 3. *За виконання умов (*$\mathbf{H}$*), (*$\mathbf{C}$*) та (*$\mathbf{L}$*), послідовність* Z_n, $n \geq 1$ *здійснює сильну марковську апроксимацію процесу* Z.

Доведення. Розглянемо побудовану вище пару процесів $(\hat{X}_n, \hat{X}^n)$. Побудуємо процес $\hat{Z}_n$, як функціонал, що заданий рівністю (8) від процесу $\hat{X}_n$ замість X_n відповідно. Процес $\hat{Z}^n$ задамо за допомогою СДР (7), де, в якості шуму візьмемо процес $\hat{X}^n$. За побудовою, пара $(\hat{Z}_n, \hat{Z}^n)$ задовольняє умову 1 означення марковської апроксимації. Марковська властивість перевіряється за тою ж схемою, що і для попередньої пари процесів. Оцінка відстані, що фігурує у третьому пункті означення марковської апроксимації, отримується за допомогою конструкції, описаної в 2. Процеси $\hat{Z}_n^1$, $\hat{Z}^{1,n}$, $\hat{Z}_n^2$, $\hat{Z}^{2,n}$ будуються по відповідним процесам у конструкції для $\hat{X}_n$ та $\hat{X}^n$. Оцінка першого "загрублення" така сама як в 1. Наведемо оцінки для другого "загрублення".

Лема 5. *Для довільного* $\gamma > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n}\left|\hat{Z}_n^1\left(\frac{k}{n}\right) - \hat{Z}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)\right| > \gamma\right) < \frac{\sigma_n(\varepsilon) C(n, \varepsilon, R)}{\gamma^2},$$

де $C(n, \varepsilon, R)$ *прямує до деякої сталої при* $n \to \infty$ *і залишається обмеженим при* $\varepsilon \to 0$, *а*

$$\sigma_n(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2 \,\Pi(du) + \Delta_n(\varepsilon)\right],$$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n}\left|\hat{Z}^{1,n}\left(\frac{k}{n}\right) - \hat{Z}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right| > \gamma\right) \leq \frac{\sigma(\varepsilon)}{\gamma^2} B_1 e^{B(\varepsilon, R)},$$

де B_1 *— стала, що обмежує моменти процесів, а* $B_{\varepsilon,R}$ *— стала, яка залишається обмеженою при* $\varepsilon \to 0$, *і фіксованому* R,

$$\sigma(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2 \,\Pi(du).$$

Доведення. Наведемо схему доведення першої оцінки. Введемо деякі позначення.

$$\Delta_{k,n}^Z = \hat{Z}_n^1\left(\frac{k}{n}\right) - \hat{Z}_n^2\left(\frac{k}{n}\right), \qquad \Delta_{k,n}^a = a\left(\hat{Z}_n^1\left(\frac{k}{n}\right)\right) - a\left(\hat{Z}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

$$\Delta_{k,n}^b = b\left(\hat{Z}_n^1\left(\frac{k}{n}\right)\right) - b\left(\hat{Z}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)\right), \qquad \Delta_{k,n}^\xi = (\hat{\xi}_{kn}^1 - \hat{\xi}_{kn}^2) - (\beta_n^1 - \beta_n^2),$$

$$\bar{\beta}_n = \int_{1 \leq |u| \leq R} u \, F_n(du), \qquad \tilde{\beta}_n^i = \mathsf{E}\,\hat{\xi}_{kn}^i = \beta_n^i + \bar{\beta}_n, \qquad i = 1, 2.$$

За нерівністю Чебишева маємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}|\Delta^Z_{k,n}|>\gamma\right)\le\frac{1}{\gamma^2}\,\mathsf{E}\left(\sup_{1\le k\le n}|\Delta^Z_{k,n}|\right)^2.$$

Використовуючи явний вигляд відповідних процесів, маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma^2}\,\mathsf{E}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\Delta^Z_{k,n}\right|\right)^2\\
&\le\frac{3}{\gamma^2}\Bigg(\mathsf{E}\left(\sup_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta^a_{i-1,n}\right|\cdot\frac{1}{n}\right)^2+\mathsf{E}\left(\sup_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta^b_{i-1,n}\right|\cdot\bar\beta_n\right)^2\\
&\qquad+\mathsf{E}\Bigg(\sup_{1\le k\le n}\Bigg|\sum_{i=1}^{k}\Bigg\{b\left(\hat Z^1_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\cdot\left[\hat\xi^1_{kn}-\tilde\beta^1_n\right]\\
&\qquad\qquad-b\left(\hat Z^2_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\cdot\left[\hat\xi^2_{kn}-\tilde\beta^2_n\right]\Bigg\}\Bigg|\Bigg)^2\Bigg)\\
&=:\frac{3}{\gamma^2}(S_1+S_2+S_3).
\end{aligned}$$

Таким чином ми відокремили мартингальну частину і для оцінки третього доданку зможемо скористатися максимальною мартингальною нерівністю. Для оцінювання перших двох доданків доведемо наступну нерівність. Для процесів $\hat Z^1_n$ і $\hat Z^2_n$, для $1\le k\le n$ виконується:

$$\mathsf{E}\left|\hat Z^1_n\left(\frac{k}{n}\right)-\hat Z^2_n\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2\le 3B^2\sigma_n(\varepsilon)\frac{\left(1+\frac{1}{n}L^2C_{\varepsilon,R}+r_{n,\varepsilon,R}\right)^k-1}{L^2C_{\varepsilon,R}+nr_{n,\varepsilon,R}},$$

де

$$C_{\varepsilon,R}=\int_{\varepsilon\le|u|\le R}u^2\,\Pi(du),\qquad r_{n,\varepsilon,R}=\frac{L^2}{n^2}-2\beta^2_n\bar\beta_n=\bar o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Використовуючи явний вигляд процесів $\hat Z^1_n$ і $\hat Z^2_n$ маємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|\Delta^Z_{k,n}\right|^2\le 4\Bigg[&\mathsf{E}\left|\Delta^Z_{k-1,n}\right|^2+\frac{L^2}{n^2}\,\mathsf{E}\left|\Delta^Z_{k-1,n}\right|^2+L^2(\bar\beta_n)\,\mathsf{E}\left|\Delta^Z_{k-1,n}\right|^2\\
&+\mathsf{E}\left|b\left(\hat Z^1_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\left[\hat\xi^1_{kn}-\tilde\beta^1_n\right]-b\left(\hat Z^2_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\left[\hat\xi^2_{kn}-\tilde\beta^2_n\right]\right|^2\Bigg]
\end{aligned}\tag{9}$$

Позначимо останній доданок через M, додавши і віднявши в ньому вираз

$$b\left(\hat Z^1_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\left[\hat\xi^2_{kn}-\tilde\beta^2_n\right]$$

матимемо

$$\begin{aligned}
M=\mathsf{E}\left|b\left(\hat Z^1_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right|^2|\Delta^\xi_{k,n}|^2+\mathbf{D}\,\hat\xi^2_{kn}\,\mathsf{E}\left|\Delta^b_{k-1,n}\right|^2\\
+2\,\mathsf{E}\,b\left(\hat Z^1_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\Delta^\xi_{k,n}\cdot\hat\xi^2_{kn}\Delta^b_{k-1,n}.
\end{aligned}$$

Взявши в останньому доданку умовне м.с. відносно

$$\mathfrak{F}^Z_{k-1,n}=\sigma\left\{\left(\hat Z^1_n\left(\frac{l}{n}\right),\hat Z^2_n\left(\frac{l}{n}\right)\right),1\le l\le k-1\right\},$$

отримаємо

$$2\,\mathsf{E}\,\mathsf{E}\left[b\left(\hat{Z}_n^1\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\Delta_{k,n}^{\xi}\cdot\hat{\xi}_{kn}^2\Delta_{k-1,n}^b\;\Big|\;\mathfrak{F}_{k-1,n}^Z\right]=0.$$

Отже права частина нерівності (9) оцінюється наступним чином:

$$4\Bigg[\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^Z\big|^2+\frac{L^2}{n^2}\,\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^Z\big|^2+L^2(\bar\beta_n)^2\,\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^Z\big|^2+\frac{B^2\sigma_n(\varepsilon)}{n}+L^2\,\mathbf{D}\,\hat{\xi}_{kn}^2\,\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^b\big|^2\Bigg]$$

$$=4\left[\left(1+L^2(\bar\beta_n)^2+L^2\,\mathbf{D}\,\hat{\xi}_{kn}^2+\frac{L^2}{n^2}\right)\cdot\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^b\big|^2+\frac{B^2\sigma_n(\varepsilon)}{n}\right],$$

при цьому

$$(\bar\beta_n)^2+\mathbf{D}\,\hat{\xi}_{kn}^2=(\bar\beta_n)^2+\mathsf{E}(\xi_{kn}^2)^2-(\beta_n)^2-(\bar\beta_n)^2-2\beta_n\bar\beta_n=\frac{1}{n}C_{\varepsilon,R}-2\beta_n\bar\beta_n.$$

Тоді

$$\mathsf{E}\big|\Delta_{k,n}^Z\big|^2\le 3\left[\left(1+\frac{1}{n}C_{\varepsilon,R}+r_{n,\varepsilon,R}\right)\mathsf{E}\big|\Delta_{k-1,n}^Z\big|^2+\frac{B^2\sigma_n(\varepsilon)}{n}\right].$$

Ітеруючи останню нерівність маємо заявлене. На основі отриманої нерівності доводиться перша нерівність Леми. Використовуючи аналогічні міркування та Лему Гронуолла (див., наприклад, [12, частина I §5]). замість доведеної нерівності отримаємо другу оцінку. □

Аналогічно до Леми 4 справедливий наступний результат.

Лема 6. *Для довільного* $\gamma>0$

$$\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\sup_{1\le k\le n}\left|\hat{Z}_n^2\left(\frac{k}{n}\right)-\hat{Z}^{2,n}\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\gamma\right)=0.$$

Отже, з урахуванням доведених вище оцінок, вибором ε та R в попередній конструкції отримаємо виконання третього пункту означення марковської апроксимації. Як і раніше, пункти 2 та 3 цього означення виконуються з $K(\gamma,T)=1$. Таким чином ми довели сильну марковську апроксимацію процесу Леві $Z(t)$ процесом $Z_n(t)$. □

4. Висновки

В ситуації коли $\{\xi_{kn},1\le k\le n,n\ge 1\}$ — нульова схема серій, що задовольняє умови теореми Гнєденко, $X_n(t)=\sum_{k=1}^{[nt]}\xi_{kn}-tb_n$, $n\ge 1$, $t\in[0;1]$, доведено сильну марковську апроксимацію процесу Леві. Також, доведено, що послідовність різницевих наближень здійснює сильну марковську апроксимацію розв'язку СДР з шумом Леві. Такі результати дозволяють примінити міркування, описані в роботі [3] для отримання граничних теорем для істотно розривних функціоналів від процесів Леві та розв'язків СДР із шумом Леві.

Література

1. M. Donsker, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951), 1–10.
2. A. M. Kulik, *Markov approximation of stable processes by random walks*, Theory of Stochastic Processes **12(28)** (2006), no. 1–2, 87–93.
3. Y. N. Kartashov and A. M. Kulik, *Weak convergence of additive functionals of a sequence of markov chains*, Theory of Stochastic Processes **15(31)** (2009), no. 1, 15–32.
4. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, "Физматгиз", Москва, 1963.
5. О. М. Кулик, *Різницева апроксимація локальних часів багатовимірних дифузій*, Теорія ймовір. та матем. статист. **78** (2008), 86–102.

6. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, КГУ, Киев, 1961.
7. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, "Гостехиздат", Москва, 1949.
8. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, "Мир", Москва, 1984.
9. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Издание третье, т. 1., МЦНМО, Москва, 2004.
10. А. В. Скороход, *Предельные теоремы для случайных процессов*, Теория вероятн. и применен. **1** (1956), 289–319.
11. R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, New York, 2004.
12. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, "Наукова думка", Київ, 1968.
13. P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Second edition, Springer, 2004.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: tanya.kosenkova@gmail.com

Надійшла 21/06/2011