Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 11–27

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 11–27

СТОХАСТИЧНЕ КЕРУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЗАМІНИ ЧАСУ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ З ШУМОМ ЛЕВІ

УДК 519.21

С. В. БОДНАРЧУК І О. М. КУЛИК

Анотація. Запропоновано новий метод стохастичного керування процесами з шумом Леві за допомогою перетворень заміни часу. З використанням цього методу доведено виконання інтегральної умови мінорізації та отримано явні оцінки швидкості збіжності в ергодичній теоремі для процесу Маркова, заданого стохастичним рівнянням з шумом Леві.

Abstract. We propose a new method of a stochastic control of stochastic processes with Lévy noise, based on the time-change transformations. Using this method, for a Markov process defined by a stochastic equation with Levy noise, we prove that the minorization condition holds true in the integral form and obtain explicit estimates for the convergence rate in the ergodic theorem.

Аннотация. Предложен новый метод стохастического управления процессами с шумом Леви посредством преобразований замены времени. С использованием этого метода доказано выполнение интегрального условия миноризации и получены явные оценки сходимости в эргодической теореме для процесса Маркова, заданного стохастическим уравнением с шумом Леви.

1. Вступ

В роботі досліджується рівняння виду

$$X(x,t) = x + \int_0^t a(X(x,s))\,ds + Z(t), \qquad x \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

в якому Z — процес Леві зі значеннями в $\mathbb{R}^m$. В роботі [1] був наведений набір умов, достатніх для *експоненційної ергодичності* розв'язку такого рівняння, тобто експоненційної збіжності одновимірних розподілів цього розв'язку до його (єдиного) інваріантного розподілу в метриці повної варіації, див. теорему 4.1 далі; при цьому розв'язок рівняння (1) природним чином інтерпретується як процес Маркова з простором станів $\mathbb{R}^m$. З точки зору подальших застосувань у прикладних задачах статистики, моделювання, і т.п., важливим є питання про значення сталих C_1, C_2 в експоненційній оцінці швидкості збіжності до інваріантного розподілу (34). Підхід роботи [1] дає можливість отримувати якісні теореми *існування* відповідної оцінки, але практично не дає змоги аналізувати значення відповідних сталих. Тому в даній роботі ми пропонуємо альтернативний підхід, який дає можливість такого аналізу. Крім того, цей підхід, на наше сподівання, у подальшому дасть можливість узагальнення результатів про експоненційну ергодичність для процесів з нескінченновимірними просторами станів, зокрема — розв'язків стохастичних рівнянь в частинних похідних з шумом Леві.

Підхід, що пропонується, базується на новому типі стохастичного керування процессами з шумом Леві — керування, що здійснюється перетвореннями заміни часу. Основний результат даної статті — теорема 2.1 — дає нижню оцінку на спільну частину розподілів двох розв'язків рівняння (1) з різними початковими значеннями.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H07; Secondary 60G51.

Ключові слова і фрази. Процес Леві, стохастичне рівняння, стохастичне керування, перетворення заміни часу.

Цей результат наведено в розділі 2. Доведення цього результату наведено в розділі 3 разом з описом конструкції стохастичного керування, що здійснюється перетвореннями заміни часу, яка є ключовою для цього доведення. Застосування основного результату до оцінок експоненційної ергодичності наведено в розділі 4, приклад такого застосування наведено в розділі 5.

2. Позначення та формулювання основного результату

Всюди далі $Z(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, — процес Леві зі значеннями в $\mathbb{R}^m$ без дифузійної складової, тобто

$$Z(t) = Z(0) + bt + \int_0^t \int_{|u|>1} u\,\nu(ds,du) + \int_0^t \int_{|u|\le 1} u\,\tilde{\nu}(ds,du), \tag{2}$$

де $b \in \mathbb{R}^m$, ν — пуассонова випадкова точкова міра на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$ з мірою інтенсивності $dt \times \Pi(du)$ (Π — міра Леві міри ν), $\tilde{\nu}(ds,du) = \nu(ds,du) - ds\,\Pi(du)$ — відповідна компенсована міра. Далі використовуватимемо такі позначення: $|\cdot|$ — модуль числа або евклідова норма вектора; $B_r(x) = \{y\colon |y-x| \le r\}$ — замкнена куля радіуса r з центром x; $\|\cdot\|$ — матрична норма, тобто $\|C\| = \sup_{l\in\mathbb{S}^m} |Cl|$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток; $\mathbb{S}^m = \{l \in \mathbb{R}^m\colon |l| = 1\}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^m$;

$$V_\sigma(l) = \{v \in \mathbb{R}^m\colon |(v,l)| \ge \sigma|v|\}, \qquad l \in \mathbb{S}^m,\ \sigma \in (0,1)$$

— двосторонній конус в $\mathbb{R}^m$ з віссю l та кутовим коефіцієнтом σ.

Розглядаємо СДР виду (1), вважаючи, що $a \in C^2$ та перша та друга похідні a обмежені. Покладемо

$$A_1 = \sup_x \|\nabla a(x)\|,$$

$$\nabla^2 a(x) \otimes h = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\nabla a(x+\varepsilon h) - \nabla a(x)), \qquad A_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^m, l\in\mathbb{S}^m} \left\|\nabla^2 a(x)\otimes l\right\|.$$

Позначимо $\mu_{x,t}$ розподіл в.в. $X(x,t)$. Також для довільних мір μ, κ на $\mathbb{R}^m$ позначатимемо $\mu \wedge \kappa$ їх спільну частину:

$$\mu \wedge \kappa = \int_{\mathbb{R}^m} \min\left(\frac{d\mu}{d\lambda}, \frac{d\kappa}{d\lambda}\right) d\lambda, \tag{3}$$

де λ — довільна міра, відносно якої μ, κ абсолютно неперервні, наприклад, $\lambda = \mu + \kappa$.

Для фіксованої множини Γ з $\Pi(\Gamma) < \infty$ поділяємо

$$\mathbb{R}^m = \Gamma \cup \Gamma^c. \tag{4}$$

Покладемо для даних $t, \varepsilon, \theta, \rho, \varrho, R_0, R > 0$, $\gamma, \delta, \sigma \in (0,1)$

$$\mathsf{C} = (\varepsilon\varrho A_1 + 2\varepsilon R + 4\theta) A_1 e^{tA_1} + m\varepsilon A_1^2 e^{2tA_1}\left(\varrho(\varepsilon+\varrho) + \frac{tA_2\varrho^2}{2}\right),$$

$$\Pi_1 = \inf_{x\in\mathbb{R}^m} \Pi\big(u \in \Gamma\colon |a(x+u) - a(x)| > \rho, |u| \le \varrho\big),$$

$$\Pi_2 = \inf_{x\in\mathbb{R}^m, l\in\mathbb{S}^m} \Pi\big(u \in \Gamma\colon |a(x+u) - a(x)| > \rho, |u| \le \varrho, a(x+u) - a(x) \in V_\sigma(l)\big),$$

$$\mathsf{P}_1 = \left(1 - \exp\left(-\varepsilon\left[\frac{t}{m\varepsilon}\right]\Pi_1 e^{-\varepsilon\Pi(\Gamma)}\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du)\right)\right)\right)$$
$$\times\left(1 - \exp\left(-\varepsilon\left[\frac{t}{m\varepsilon}\right]\Pi_2 e^{-\varepsilon\Pi(\Gamma)}\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du)\right)\right)\right)^{m-1},$$

де $[z] = \max\{n \in \mathbb{Z}\colon n \le z\}$ — ціла частина числа z,

$$\mathsf{P}_2 = \sup_{|x|\le R_0} \mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}|X(x,r)| > R - \frac{m\varepsilon}{2}A_1\varrho e^{tA_1}\right).$$

Теорема 2.1. *Нехай дані* $t, \varepsilon, \varkappa, \theta, \rho, \varrho, R > 0$, $\gamma, \delta, \sigma \in (0,1)$ *задовольняють*

$$\sqrt{m}\mathsf{C} \le \gamma\rho\sigma^{m-1}e^{-2(m+1)tA_1}\left(e^{4tA_1} - \sigma^2\right)^{1/2}, \tag{5}$$

$$\varkappa e^{tA_1} \le \frac{1}{2}\varepsilon(1-\delta)(1-\gamma)\rho\sigma^{m-1}e^{-2(m+1)tA_1}\left(e^{4tA_1} - \sigma^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Тоді для довільного x *з* $|x| \le R_0$ *та довільного* $y \in B_\varkappa(x)$

$$\mu_{x,t} \wedge \mu_{y,t} \ge \delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2m} (\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2). \tag{7}$$

Зауваження 2.1. Функція a задовольняє умову лінійного росту:

$$|a(x)| \le A_0 + A_1|x|, \qquad A_0 = |a(0)|.$$

Тому для P_2 можна було б навести оцінку зверху за допомогою леми Гронуола. Ми цього не робимо, щоб не переобтяжувати основний результат об'ємними та суто технічними викладками. Приклад застосування теореми, який, зокрема, містить явну оцінку для P_2, наведений в розділі 5.

Зауваження 2.2. Зміст умов (5) та (6) стане більш зрозумілим після того, як ми в розділі 3.1 пояснимо метод, завдяки якому отримується наведена далі основна оцінка (18), яка у подальшому приводить до (7). Фактично, умови (5) та (6) забезпечують виконання наведених далі припущень (15) та (16).

Зауваження 2.3. Ясно, що твердження теореми є змістовним лише в тому випадку, коли виконуються умови (5), (6) та

$$\mathsf{P}_1 > \mathsf{P}_2. \tag{8}$$

Неважко зрозуміти, що за припущення про те, що для деяких $\Gamma, \rho, \varrho, \sigma$

$$\Pi_1 > 0, \qquad \Pi_2 > 0, \tag{9}$$

можна підібрати інші параметри так, щоб умови (5), (6) та (8) виконувались. Дійсно, без обмеження загальності можна вважати, що множина Γ^c обмежена, а отже

$$\int_{\Gamma^c} |u|^2\, \Pi(du) < \infty.$$

Покладемо, наприклад, $\theta = \varepsilon^{1/3}$. Тоді

$$\mathsf{P}_1 \to \mathsf{P}_{1,0} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{m}\Pi_k\right)\right) > 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

З іншого боку, $\mathsf{P}_2 \to 0$, $R \to \infty$. Тому, вибравши R великим, можна отримати $\mathsf{P}_{1,0} > \mathsf{P}_2$. Тоді вибором (малого) ε можна досягти нерівностей (5) та (8). Після цього підбором $\varkappa$, δ забезпечується нерівність (6).

3. Доведення теореми 2.1

3.1. **Побудова стохастичного керування та основна оцінка.** Нехай $t > 0$ фіксоване, $I_1, \dots, I_m \subset (0,t)$ — деякі попарно неперетинні інтервали. Позначаємо τ_j — час першого стрибка, що відбувся на проміжку I_j, величина якого належить множині Γ, і відповідно p_j — величина цього стрибка. Якщо $\nu(I_j \times \Gamma) = 0$, то величини τ_j та p_j не визначені.

Покладемо $\mathbf{I} = \prod_{j=1}^m I_j$,

$$\Omega_{\mathbf{I}} = \bigcap_{j=1}^m \{\nu(I_j \times \Gamma) = 1\}, \qquad P_{\mathbf{I}} = \mathsf{P}(\cdot \mid \Omega_{\mathbf{I}}).$$

На множині $\Omega_{\mathbf{I}}$ розв'язок $X(x,t)$ рівняння (2) є вимірною функцією змінних

$$x, \qquad \boldsymbol{\tau} = \{\tau_j\}_{j=1}^m, \qquad \mathbf{p} = \{p_j\}_{j=1}^m, \qquad \nu_{\mathbf{I}} = \nu\big|_{[0,t]\times\mathbb{R}^m\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m I_j\right)\times\Gamma}.$$

Зауважимо, що $\nu_{\mathbf{I}}$ приймає значення у просторі *конфігурацій* (тобто локально скінченних множин) $\mathfrak{C}$ на $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, який можна інтерпретувати як повний сепарабельний метричний простір, див. [2]. Відзначимо, що відносно $P_{\mathbf{I}}$ елементи $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{p}$, $\nu_{\mathbf{I}}$ незалежні у сукупності, причому $\boldsymbol{\tau}$ рівномірно розподілене на $\mathbf{I}$, а компоненти вектора $\mathbf{p}$ — н.о.р.в.в. з розподілом

$$\Pi_\Gamma = \frac{\Pi(\cdot\cap\Gamma)}{\Pi(\Gamma)}.$$

Далі позначатимемо

$$X(x,t) = F\left(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right), \tag{10}$$

де F — вимірна функція зі значеннями в $\mathbb{R}^m$. Позначимо $\hat{\mathbf{I}} = \prod_{j=1}^m \hat{I}_j$, $\hat{I}_j$ — інтервал з тією ж серединою, що й I_j та з довжиною $\delta|I_j|$. Наша мета полягає в тому, щоб для деякого $\delta \in (0,1)$ та деякої множини $\Upsilon_{\mathbf{I}} \subset (\mathbb{R}^m)^m \times \mathfrak{C}$ побудувати функцію

$$K\colon B_\varkappa(x) \times \hat{\mathbf{I}} \times \Upsilon_{\mathbf{I}} \to \mathbf{I}$$

таку, що

$$\begin{gathered} F(y,t,K(y,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}),\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}) = F(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}), \\ y \in B_\varkappa(x), \qquad \boldsymbol{\tau} \in \hat{\mathbf{I}}, \qquad (\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}) \in \Upsilon_{\mathbf{I}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Неформально кажучи, відображення K задає перетворення набору моментів стрибків $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_j\}_{j=1}^m$, яке перетворює значення в момент t розв'язку рівняння (1) з початковим значенням y у таке ж значення для розв'язку з даним початковим значенням x. При цьому змінюються лише часова змінна $\boldsymbol{\tau}$, а $\mathbf{p}$, $\nu_{\mathbf{I}}$ відіграють роль параметрів. Саме функція K й задає згадуване у вступі стохастичне керування за допомогою перетворення заміну часу. Відзначимо, що таке керування визначатиметься на власній підмножині

$$\{\boldsymbol{\tau} \in \hat{\mathbf{I}}\} \cap \Xi_{\mathbf{I}}$$

ймовірнісного простору Ω, тут

$$\Xi_{\mathbf{I}} = \Omega_{\mathbf{I}} \cap \{(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}) \in \Upsilon_{\mathbf{I}}\}.$$

Ототожнюючи $\omega \in \Omega$ з конфігурацією пуассонової випадкової міри ν, природно інтерпретувати точки з $\{\boldsymbol{\tau} \in \hat{\mathbf{I}}\}\cap\Xi_{\mathbf{I}}$ як ті конфігурації, що є придатними для успішного стохастичного керування за допомогою перетворення заміни часу.

Побудова керування K здійснюється на основі відомостей про диференціальні властивості розв'язку $X(x,t)$ рівняння (1). З тверджень 4.1 та 4.2 статті [2] випливає, що як функція змінної $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{I}$ цей розв'язок для довільних x, $\mathbf{p}$ та майже всіх реалізацій випадкової точкової міри $\nu_{\mathbf{I}}$ має похідну Соболєва

$$\nabla_{\boldsymbol{\tau}} X(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}X(x,t),\ldots,\frac{\partial}{\partial\tau_m}X(x,t)\right).$$

При цьому

$$\frac{\partial}{\partial\tau_j}X(x,t) = \mathcal{E}_{\tau_j}^t \Delta(X(x,\tau_j-),p_j), \qquad j=1,\ldots,m, \tag{12}$$

де

$$\Delta(x,p) = a(x+p) - a(x),$$

а *стохастична експонента* $\{\mathcal{E}_s^v, 0 \le s \le r\}$ — це матричнозначний процес, заданий сім'єю рівнянь

$$\mathcal{E}_s^r = I_{\mathbb{R}^m} + \int_s^r \nabla a(X(x,v))\mathcal{E}_s^v\,dv, \qquad r \in [s,\infty). \tag{13}$$

Зауважимо, що $\nabla_x X(x,t) = \mathcal{E}_0^t$, звідки випливає оцінка

$$\|\nabla_x X(x,t)\| \le e^{tA_1}.$$

Нехай $\varepsilon = \min_j |I_j|$. Аналогічно до (10), позначимо

$$\nabla_{\boldsymbol{\tau}} X(x,t) = G\left(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right). \tag{14}$$

Припустимо, для даних x, t та деякого $\gamma \in (0,1)$ нам вдалось вказати множину $\Upsilon_{\mathbf{I}}$ та вимірну функцію H змінних $\mathbf{p}$, $\nu_{\mathbf{I}}$, що приймає значення в $\mathbb{R}^{m\times m}$, так, щоб

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{I}} \|G\left(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right) - H\left(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)\| \le \gamma \left\|\left[H\left(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)\right]^{-1}\right\|^{-1}. \tag{15}$$

Тоді за теоремою про неявну функцію (див. теорему В.1) для довільних $\varkappa$, δ, для яких виконується співвідношення

$$\varkappa e^{tA_1}\left\|[H(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})]^{-1}\right\| \le \frac{1}{2}\varepsilon(1-\delta)(1-\gamma) \tag{16}$$

існує функція K, що задовольняє (11). Більше того, функція K задається цим співвідношенням однозначно.

Подальші міркування базуються на формулі заміни змінних для ліпшицевих відображень (див. [3, розділ 3]) і властивостях неявної функції (див. Додаток В). Згідно останніх, при фіксованих y, $\mathbf{p}$, $\nu_{\mathbf{I}}$ відображення $K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}} = K(y,\cdot,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$ є ліпшицевим та ін'єктивним. Тоді за формулою заміни змінних образ звуження міри Лебега на $\hat{\mathbf{I}}$ при такому відображенні має щільність

$$\left[\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}\left(K^{-1}_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right)\right]^{-1}\mathbb{1}_{z\in K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(\hat{\mathbf{I}})}.$$

Тому (див. твердження 1 леми А.2) спільна частина умовного розподілу

$$F(y,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$$

та умовного розподілу $F(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$ за умови $(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$ не менша, ніж

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{j=1}^m |I_j|\right)^{-1}\int_{K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(\hat{\mathbf{I}})}\left(\left|\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}\left(K^{-1}_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right)\right|^{-1}\wedge 1\right)dz\\
&\qquad\ge\left(\prod_{j=1}^m |I_j|\right)^{-1}\left(\inf_{z\in\mathbf{I}}\left|\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right|^{-1}\wedge 1\right)\lambda^m\left(K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(\hat{\mathbf{I}})\right).
\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\int_{K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(\hat{\mathbf{I}})}\left|\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}\left(K^{-1}_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right)\right|^{-1}dz = \prod_{j=1}^m|\hat{I}_j| = \delta^m\prod_{j=1}^m|I_j|,$$

тому спільна частина умовного розподілу $F(y,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$ та умовного розподілу

$$F(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})$$

не менша, ніж

$$\delta^m\frac{\inf_{z\in\hat{\mathbf{I}}}\left|\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right|}{1\vee\sup_{z\in\hat{\mathbf{I}}}\left|\det\nabla K_{y,\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}}(z)\right|}.$$

Враховуючи оцінку (45), звідси отримуємо, що ця спільна частина не менша, ніж $\delta^m((1-\gamma)/(1+\gamma))^{2m}$. Нехай $\Xi\subset\Xi_{\mathbf{I}}$ — подія виду

$$\Xi = \Omega_{\mathbf{I}}\cap\{(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}})\in\Upsilon\}, \tag{17}$$

де $\Upsilon \subset \Upsilon_{\mathbf{I}}$ — вимірна підмножина. Позначимо $\mu_{x,t,\Xi}$ розподіл звуження $X(x,t)$ на множину Ξ. Тоді з наведених вище оцінок та твердження 3 леми A.2 випливає наша основна оцінка

$$\mu_{x,t,\Xi} \wedge \mu_{y,t,\Xi} \ge \delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2m} \mathsf{P}(\Xi). \tag{18}$$

3.2. **Множина $\Upsilon_{\mathbf{I}}$ та оцінки градієнта.** Міркування попереднього розділу істотним чином використовували припущення (15). В цьому розділі ми будуємо множину $\Upsilon_{\mathbf{I}}$ та забезпечуємо виконання цього припущення.

Введемо допоміжні позначення. Нехай $\hat{\tau}_j$ — середина інтервалу I_j, $j = 1, \ldots, m$, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \{\hat{\tau}_j\}_{j=1}^m$. Покладемо на множині $\Omega_{\mathbf{I}}$

$$\hat{X}(x,r) = F\left(x, r, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right), \qquad H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}) = G\left(x, t, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right),$$

див. (10) та (14). Іншими словами, $\hat{X}$ — розв'язок рівняння (1), в якому моменти стрибків $\tau_1, \ldots, \tau_m$ процесу Z замінені на $\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_m$ (величини стрибків при цьому зберігаються). Позначимо також $\hat{\mathcal{E}}_s^r$ розв'язок рівняння (13), в якому X замінено на $\hat{X}$. Тоді рядки матриці $H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})$ задаються правою частиною формули (12) з заміною τ_j, X та $\mathcal{E}$ на $\hat{\tau}_j$, $\hat{X}$ та $\hat{\mathcal{E}}$, відповідно.

Для того, щоб забезпечити (15), ми накладаємо дві групи обмежень. Перша з них дає змогу контролювати норму матриці, оберненої до $H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})$. Виберемо вимірні функції

$$\ell_j \colon (\mathbb{R}^m)^j \to \mathbb{S}^m, \qquad j = 1, \ldots, m-1,$$

так, щоб для довільних $j \le m-1$, $x_1, \ldots, x_j \in \mathbb{R}^m$:

$$\ell_j(x_1, \ldots x_j) \perp \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_j).$$

Позначимо

$$\begin{aligned} l_j &= l_j(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}) \\ &= c_j \Big([\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}]^{-1} \Big)^* \ell_{j-1} \Big([\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_1}]^{-1} \Delta(\hat{X}(x, \hat{\tau}_1 -), \ldots, [\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_{j-1}}]^{-1} \Delta(\hat{X}(x, \hat{\tau}_{j-1} -) \Big), \end{aligned} \tag{19}$$

$j = 2, \ldots, m$, де величини $c_j = c_j(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}) > 0$ вибрані так, щоб $l_j \in \mathbb{S}^m$. Вимагатимемо, щоб на множині $\Upsilon_{\mathbf{I}}$ для даних $\rho > 0$, $\sigma \in (0,1)$ виконувалась умова

$$\begin{aligned} |\Delta(\hat{X}(x, \hat{\tau}_j -), p_j)| &\ge \rho, \qquad j = 1, \ldots, m, \\ \Delta(\hat{X}(x, \hat{\tau}_j -), p_j) &\in V_\sigma(l_j), \qquad j = 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{20}$$

Лема 3.1. *Нехай виконується умова* (20).

Тоді

$$\left\| [H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})]^{-1} \right\| \le \frac{e^{2(m+1)tA_1}}{\rho \sigma^m} \left(\frac{e^{4tA_1}}{\sigma^2} - 1 \right)^{-1/2}.$$

Доведення. З формули для $H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})$ маємо зображення

$$H(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}) = \hat{\mathcal{E}}_0^t Q(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}),$$

де рядки матриці $Q(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})$ мають вид

$$Q_j = \left[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}\right]^{-1} \Delta\big(\hat{X}(x, \hat{\tau}_j -)\big), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Відомо, що $\|[\hat{\mathcal{E}}_0^t]^{-1}\| \le e^{tA_1}$, тому для доведення шуканого твердження достатньо довести оцінку

$$\left\| [Q(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}})]^{-1} \right\| \le \frac{e^{(2m+1)tA_1}}{\rho \sigma^m} \left(\frac{e^{4tA_1}}{\sigma^2} - 1 \right)^{-1/2}. \tag{21}$$

Виберемо відповідним чином ортонормований базис $\{e_j\}$ в $\mathbb{R}^m$: покладемо e_1 колінеарним $[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}]^{-1}\Delta(\hat{X}(x,\hat{\tau}_j-))$, а e_j, $j\geq 2$ — рівним

$$\ell_{j-1}\left([\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_1}]^{-1}\Delta\big(\hat{X}(x,\hat{\tau}_1-)\big),\dots,[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_{j-1}}]^{-1}\Delta\big(\hat{X}(x,\hat{\tau}_{j-1}-)\big)\right).$$

Тоді в цьому базисі матриця $Q\left(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)$ є нижньо-трикутною, що дозволяє оцінити ітеративним чином норму її оберненої матриці. Так, можемо записати в блочній формі

$$Q\left(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)=:C_m=\begin{pmatrix}C_{m-1} & 0\\ v_m & b_m\end{pmatrix},$$

де C_{m-1} — звуження C_m на підпростір, породжений $e_1,\dots,e_{m-1}$, v_m — проекція на цей підпростір m-го рядка Q_m матриці C_m, $b_m=(Q_m,e_m)$. Тоді

$$C_m^{-1}=\begin{pmatrix}C_{m-1}^{-1} & 0\\ -b_m^{-1}C_{m-1}^{-1}v_m & b_m^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\|C_m^{-1}\|^2\leq\|C_{m-1}^{-1}\|^2+\|C_{m-1}^{-1}\|^2(|v_m|/b_m)^2+(1/b_m^2).$$

Аналогічним чином записуються оцінки для звужень C_j матриці C_m на підпростори, породжені $e_1,\dots,e_j$:

$$\left\|C_j^{-1}\right\|^2\leq\left\|C_{j-1}^{-1}\right\|^2+\left\|C_{j-1}^{-1}\right\|^2(|v_j|/b_j)^2+\left(1/b_j^2\right),\qquad j\geq 2.$$

Нарешті, для $j=1$ маємо

$$\left\|C_1^{-1}\right\|^2=\left(1/b_1^2\right).$$

За побудовою,

$$|b_1|=\left|[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_1}]^{-1}\Delta_1\right|\geq e^{-tA_1}|\Delta_1|\geq e^{-tA_1}\rho,$$

тут ми позначили $\Delta_j=\Delta(\hat{X}(x,\hat{\tau}_j-),p_j)$ та використали перше з припущень в (20). Аналогічним чином, для $j=2,\dots,m$ маємо

$$\left|[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}]^{-1}\Delta_j\right|\geq e^{-tA_1}\rho.$$

Крім того, друге припущення в (20) дає співвідношення

$$|b_j|=\left|\left([\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}]^{-1}\Delta_j,e_j\right)\right|=c_j^{-1}|(\Delta_j,l_j)|\geq\frac{\sigma}{c_j}|\Delta_j|\geq\sigma e^{-tA_1}|\Delta_j|,$$

тут ми використали те, що, очевидно, $c_j\leq e^{tA_1}$. Звідси отримуємо

$$|b_j|\geq\sigma e^{-tA_1}\rho,\qquad |v_j|^2=\left|[\hat{\mathcal{E}}_0^{\hat{\tau}_j}]^{-1}\Delta_j\right|^2-|b_j|^2\leq e^{2tA_1}|\Delta_j|^2-\sigma^2e^{-2tA_1}|\Delta_j|^2,$$

$$(|v_j|/b_j)^2\leq e^{4tA_1}\sigma^{-2}-1,$$

звідки

$$\left\|C_j^{-1}\right\|^2\leq e^{4tA_1}\sigma^{-2}\left\|C_{j-1}^{-1}\right\|^2+e^{2tA_1}\sigma^{-2}\rho^{-2}.$$

За індукцією це дає оцінку

$$\left\|C_j^{-1}\right\|^2\leq\frac{e^{2tA_1}}{\rho^2\sigma^2}\left[1+\dots+\frac{e^{4tA_1(j-1)}}{\sigma^{2(j-1)}}\right]\leq\frac{e^{(4j+2)tA_1}}{\rho^2\sigma^{2j}}\left(\frac{e^{4tA_1}}{\sigma^2}-1\right)^{-1},\qquad j=1,\dots,m,$$

яка при $j=m$ дає (21). □

Тепер накладемо ще одну групу обмежень, які дадуть змогу контролювати відхилення

$$\|G\left(x,t,\boldsymbol{\tau},\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)-H\left(\mathbf{p},\nu_{\mathbf{I}}\right)\|.$$

Розбиття (4) породжує розбиття процесу Леві (1) на незалежні складові $Z=Z_1+Z_2$,

$$Z_2(t)=\int_0^t\int_{\Gamma^c}u\,\tilde{\nu}(ds,du).$$

Для даного $\theta > 0$ вимагатимемо виконання умови

$$\sup_{s\in I_j} |Z_2(s) - Z_2(\hat{\tau}_j)| \le \theta, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{22}$$

Крім того, для даних $\varrho > 0$, $R > 1$ вимагатимемо

$$|p_j| \le \varrho, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{23}$$

$$\sup_{r\le t} |\hat{X}(x, r)| \le R. \tag{24}$$

Нагадаємо також, що $\varepsilon = \min_j |I_j|$.

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови* (22), (23), (24). *Тоді*

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{I}} \|G\left(x, t, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right) - H\left(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right)\| \le \sqrt{m}\mathsf{C},$$

означення сталої C *див. у розділі 2.*

Доведення. Рядки матриці $G\left(x, t, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right)$ мають вид

$$\mathcal{E}^t_{\tau_j}\Delta(X(x, \tau_j-), p_j), \qquad j = 1, \dots, m,$$

а рядки матриці $H\left(\mathbf{p}, \nu_{\mathbf{I}}\right)$ — аналогічний вид з заміною τ, X, $\mathcal{E}$ на $\hat{\tau}$, $\hat{X}$, $\hat{\mathcal{E}}$. Тому достатньо довести, що нерівності

$$\left|\mathcal{E}^t_{\tau_j}\Delta(X(x, \tau_j-), p_j) - \hat{\mathcal{E}}^t_{\hat{\tau}_j}\Delta\left(\hat{X}(x, \hat{\tau}_j-), p_j\right)\right| \le \mathsf{C}, \qquad j = 1, \dots, m \tag{25}$$

виконуються для довільних значень $(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbf{I}$. Маємо наступні оцінки.

1) $\|\mathcal{E}^t_s\| \le e^{tA_1}$, $s \le t$.
2) $|\Delta(x, p)| = |a(x + p) - a(x)| \le A_1\varrho$; тут використано (23).
3) $\|\mathcal{E}^t_s - \mathcal{E}^t_{s'}\| \le |s - s'|A_1e^{tA_1}$, $s, s' \le t$.
4) За додаткової умови

$$\sup_{r\le t} |X(x, r)| \le R' \tag{26}$$

має місце нерівність

$$\begin{aligned} |X(x, s) - X(x, s')| &= \left|\int_{s\wedge s'}^{s\vee s'} a(X(x, r))\,dr + Z(s) - Z(s')\right| \\ &\le R'\varepsilon + 2\theta, \qquad s, s' \in I_j; \end{aligned}$$

тут використано (22).

5)

$$|\Delta(x, p) - \Delta(x', p)| \le |a(x + p) - a(x' + p)| - |a(x) - a(x')| \le 2A_1|x - x'|.$$

З 1)–5) випливає, що за додаткового припущення (26) має місце оцінка

$$\left|\mathcal{E}^t_{\tau_j}\Delta(X(x, \tau_j-), p_j) - \mathcal{E}^t_{\hat{\tau}_j}\Delta(X(x, \hat{\tau}_j-), p_j)\right| \le A_1e^{tA_1}\left(\varrho A_1\varepsilon + 2R'\varepsilon + 4\theta\right). \tag{27}$$

Аналогічно до (12) маємо для довільного r

$$\frac{\partial}{\partial\tau_j}X(x, r) = \mathcal{E}^r_{\tau_j}\Delta\left(X(x, \tau_j-), p_j\right)\mathbb{1}_{r\ge\tau_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

звідки з урахуванням оцінок 1) та 2)

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau_j}X(x, r)\right| \le A_1\varrho e^{tA_1}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

а отже

$$|X(x, r) - \hat{X}(x, r)| \le \frac{1}{2}A_1\varrho e^{tA_1}\sum_{j=1}^m |I_j|, \tag{28}$$

тут ми використали, що $|\tau_j - \hat\tau_j| \le |I_j|/2$. Зауважимо, що завдяки (28) та (24) припущення (26) виконується з

$$R' = R + \frac{m\varepsilon}{2} A_1 \varrho e^{tA_1},$$

звідки випливає

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{E}^t_{\tau_j}\Delta(X(x,\tau_j-),p_j) - \mathcal{E}^t_{\hat\tau_j}\Delta(X(x,\hat\tau_j-),p_j)\right| \\ &\qquad \le A_1 e^{tA_1}\left(A_1\varrho\varepsilon + 2R\varepsilon + m\varepsilon^2 A_1 \varrho e^{tA_1} + 4\theta\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Нарешті, цілком аналогічно до міркувань з доведення тверджень 4.1 та 4.2 статті [2] можна показати, що стохастична експонента $\mathcal{E}^r_s$ як функція змінних τ_j, $j = 1,\dots,m$, має похідні Соболєва на $\mathbf{I}$, причому похідна $\mathcal{G}^r_{s,j} = (\partial/\partial\tau_j)\mathcal{E}^r_s$ є розв'язком рівняння

$$\mathcal{G}^r_{s,j} = \int_s^r \left(\nabla^2 a(X(x,v)) \otimes \left[\mathcal{E}^v_{\tau_j}\Delta(X(x,\tau_j-),p_j)\right]\right)\mathcal{E}^v_s \mathbb{1}_{v\ge\tau_j}\,dv + \int_s^r \nabla a(X(x,v))\mathcal{G}^v_{s,j}\,dv,$$

$r \in [s,\infty)$. Звідси отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial\tau_j}\mathcal{E}^r_s = \int_s^r \mathcal{E}^r_v\left(\nabla^2 a(X(x,v)) \otimes \left[\mathcal{E}^v_{\tau_j}\Delta(X(x,\tau_j-),p_j)\right]\right)\mathcal{E}^v_s \mathbb{1}_{v\ge\tau_j}\,dv, \tag{30}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau_j}\mathcal{E}^r_s\right| \le tA_1A_2\varrho e^{2tA_1}, \quad j = 1,\dots,m,$$

а отже

$$\left|\mathcal{E}^t_r - \hat{\mathcal{E}}^t_r\right| \le \frac{1}{2} tA_1A_2\varrho e^{2tA_1}\sum_{j=1}^m |I_j|. \tag{31}$$

Застосувавши (28), (31) з $r = \hat\tau_j$ та оцінки 1), 2), 5) отримуємо

$$\left|\mathcal{E}^t_{\hat\tau_j}\Delta(X(x,\hat\tau_j-),p_j) - \hat{\mathcal{E}}^t_{\hat\tau_j}\Delta(\hat X(x,\hat\tau_j-),p_j)\right| \le m\varepsilon A_1^2 e^{2tA_1}\left(\varrho^2 + \frac{tA_2\varrho^2}{2}\right).$$

Остання нерівність та (29) дають (25). □

3.3. **Завершення доведення.**

Покладемо $n = [t/(m\varepsilon)]$,

$$I^{(k)} = ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon), \qquad k = 1,\dots,nm.$$

Аналогічно до позначень з розділу 3.1, покладемо $\tau^{(k)}$ — час першого стрибка, що відбувся на проміжку $I^{(k)}$, величина якого належить множині Γ, і відповідно $p^{(k)}$ — величина цього стрибка, $\hat\tau^{(k)}$ — середина відрізку $I^{(k)}$. Визначимо ітеративним чином моменти зупинки υ_j, $j = 1,\dots,m$. Покладемо υ_1 рівним найменшому з тих значень $k \le mn$, для яких мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned} &\left\{\nu\big(I^{(k)}\times\Gamma\big) = 1\right\}, \qquad \left|\Delta\left(X\big(x,\hat\tau^{(k)}-\big),p^{(k)}\right)\right| \ge \rho, \\ &\sup_{s\in I^{(k)}}\left|Z_2(s) - Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\right| \le \theta, \qquad \left|p^{(k)}\right| \le \varrho. \end{aligned} \tag{32}$$

Якщо такого значення k не існує, то покладаємо $\upsilon_1 = +\infty$. Для $j = 2,\dots,m$ позначимо $\hat X$ розв'язок рівняння (1), в якому моменти стрибків $\tau^{(\upsilon_1)},\dots,\tau^{(\upsilon_{j-1})}$ процесу Z замінені на $\hat\tau^{(\upsilon_1)},\dots,\hat\tau^{(\upsilon_{j-1})}$. Визначимо $l^{(x)}_j$ рівністю (19), в якій $\hat\tau_1,\dots,\hat\tau_{j-1}$ замінені на $\hat\tau^{(\upsilon_1)},\dots,\hat\tau^{(\upsilon_{j-1})}$, а $\hat\tau_j$ — на $\hat\tau^{(k)}$. Тоді покладемо υ_j рівним найменшому з тих значень $k \le mn$, $k > \upsilon_{j-1}$ для яких мають місце співвідношення (32) та

$$\Delta\left(\hat X\big(x,\hat\tau^{(k)}\big)-\right),\ p^{(k)} \in V_\sigma\big(l^{(k)}_j\big).$$

Знову, якщо такого значення k не існує, то покладаємо $\upsilon_1 = +\infty$.

Множину

$$\{\upsilon_m < +\infty\}$$

розіб'ємо на неперетинні частини

$$\{\upsilon_1 = k_1, \dots, \upsilon_m = k_m\} =: \Omega_{k_1,\dots,k_m}, \qquad 1 \le k_1 < \dots < k_m \le mn.$$

Для даних $1 \le k_1 < \dots < k_m \le mn$ покладемо

$$I_1 = I^{(k_1)}, \dots, I_m = I^{(k_m)},$$

$$\Xi_{k_1,\dots,k_m} = \Omega_{k_1,\dots,k_m} \cap \left\{ \sup_{r \le t} |\hat{X}(x,r)| \le R \right\},$$

тут $\hat{X}$ — розв'язок рівняння (1), в якому моменти стрибків $\tau^{(\upsilon_1)}, \dots, \tau^{(\upsilon_m)}$ процесу Z замінені на $\hat{\tau}^{(\upsilon_1)}, \dots, \hat{\tau}^{(\upsilon_m)}$. Ясно, що за побудовою

$$\Xi_{k_1,\dots,k_m} \subset \Xi_{\mathbf{I}}, \qquad \mathbf{I} = \prod_{j=1}^{m} I_j,$$

і множина $\Xi_{k_1,\dots,k_m}$ має вид (17). Тоді за оцінкою (18) для довільного $y \in B_{\varkappa}(x)$

$$\mu_{x,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}} \wedge \mu_{y,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}} \ge \delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^{2m} \mathsf{P}(\Xi_{k_1,\dots,k_m}).$$

Зауважимо, що $\Xi_{k_1,\dots,k_m}$ неперетинні, тому

$$\mu_{x,t} \ge \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_j \le mn} \mu_{x,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}}, \qquad \mu_{y,t} \ge \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_j \le mn} \mu_{y,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}}.$$

Крім того

$$\mu_{x,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}}(\mathbb{R}^m) = \mu_{y,t,\Xi_{k_1,\dots,k_m}}(\mathbb{R}^m) = \mathsf{P}(\Xi_{k_1,\dots,k_m}).$$

Тому можна застосувати твердження 2 леми А.2, звідки отримуємо

$$\mu_{x,t} \wedge \mu_{y,t} \ge \delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^{2m} \mathsf{P} \left(\bigcup_{1 \le k_1 < \dots < k_j \le mn} \Xi_{k_1,\dots,k_m} \right).$$

З оцінки (28) випливає, що

$$\Omega_{k_1,\dots,k_m} \cap \left\{ \sup_{r \le t} |X(x,r)| \le R - \frac{m\varepsilon}{2} A_1 \varrho e^{tA_1} \right\} \subset \Xi_{k_1,\dots,k_m}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P} \left(\bigcup_{1 \le k_1 < \dots < k_j \le n} \Xi_{k_1,\dots,k_m} \right) \\
&\qquad \ge \mathsf{P} \left(\{\upsilon_m < +\infty\} \cap \left\{ \sup_{r \le t} |X(x,r)| \le R - \frac{m\varepsilon}{2} A_1 \varrho e^{tA_1} \right\} \right) \\
&\qquad \ge \mathsf{P}(\upsilon_m < +\infty) - \mathsf{P} \left(\sup_{r \le t} |X(x,r)| > R - \frac{m\varepsilon}{2} A_1 \varrho e^{tA_1} \right),
\end{aligned}$$

і доведення теореми закінчує наступна лема.

Лема 3.3.

$$\mathsf{P}(\upsilon_m < +\infty) \ge \mathsf{P}_1.$$

Доведення. Ясно, що

$$\mathsf{P}(\upsilon_m < +\infty) \ge \mathsf{P}(\upsilon_1 \le n, \dots, (m-1)n < \upsilon_m \le mn).$$

Ймовірність події $\mathsf{P}(\upsilon_1 > n)$ легко оцінюється. Дійсно, ця подія є перетином n подій, k-та з яких полягає в тому що не виконується одна з умов (32). Позначимо $\mathcal{F}^\varepsilon_k = \sigma(Z_s, s \le k\varepsilon)$. Умовна ймовірність за умови $\mathcal{F}^\varepsilon_{k-1}$ того, що виконується *кожна* з умов (32), не менша, ніж

$$\Big(\varepsilon\Pi(\Gamma)e^{-\varepsilon\Pi(\Gamma)}\Big)\,\mathsf{P}\left(\sup_{s\in I^{(k)}}|Z_2(s)-Z_2(\hat\tau^{(k)})|\le\theta\right) \times\left(\frac{\inf_x \Pi\big(u\in\Gamma\colon |a(x+u)-a(x)|>\rho, |u|\le\varrho\big)}{\Pi(\Gamma)}\right).$$

Це випливає з того, що процес $Z_2^{(k)} := \{Z_2(s)-Z_2((k-1)\varepsilon), s\ge(k-1)\varepsilon\}$ є незалежним з $\mathcal{F}^\varepsilon_{k-1}$, величина $\nu^{(k)} = \nu\big(I^{(k)}\times\Gamma\big)$ незалежна з $\mathcal{F}^\varepsilon_{k-1}\vee\sigma\big(Z_2^{(k)}\big)$, а величина $p^{(k)}$ незалежна з $\mathcal{F}^\varepsilon_{k-1}\vee\sigma\big(Z_2^{(k)},\nu^{(k)}\big)$; до того ж, $\nu^{(k)}$ має розподіл Пуассона з параметром $\varepsilon\Pi(\Gamma)$, значення $X\big(x,\hat\tau^{(k)}-\big)$ є вимірним відносно $\mathcal{F}^\varepsilon_{k-1}\vee\sigma\big(Z_2^{(k)}\big)$, і $p^{(k)}$ має розподіл $\Pi(\cdot\cap\Gamma)/(\Pi(\Gamma))$.

Ясно, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}&\left(\sup_{s\in I^{(k)}}\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|\le\theta\right)\\ &\ge 1-\mathsf{P}\left(\sup_{s\in((k-1)\varepsilon,\tau^{(k)})}\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|>\theta\right)\\ &\quad-\mathsf{P}\left(\sup_{s\in(\tau^{(k)},k\varepsilon)}\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|>\theta\right).\end{aligned}$$

Використавши максимальну нерівність Дуба для субмартингала

$$\big(\tau^{(k)},k\varepsilon\big)\ni s\mapsto\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|^2,$$

отримуємо, що

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\in(\tau^{(k)},k\varepsilon)}\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|>\theta\right)\le\frac{1}{\theta^2}\,\mathsf{E}\Big|Z_2(k\varepsilon)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|^2=\frac{\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du).$$

З іншого боку, нерівність $\sup_{s\in((k-1)\varepsilon,\tau^{(k)})}\big|Z_2(s)-Z_2(\hat\tau^{(k)})\big|>\theta$ тягне за собою нерівність

$$\sup_{s\in((k-1)\varepsilon,\tau^{(k)})}|Z_2(s)-Z_2((k-1)\varepsilon)|>\frac{\theta}{2}.$$

Застосувавши ще раз нерівність Дуба, отримуємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\in\big((k-1)\varepsilon,\tau^{(k)}\big)}\Big|Z_2(s)-Z_2\big(\hat\tau^{(k)}\big)\Big|>\theta\right)\le\frac{2\varepsilon}{\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du).$$

З наведених оцінок та нерівності $1-z\le e^{-z}$, $z\ge0$ випливає, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\upsilon_1>n)&\le\left[1-\varepsilon\Pi_1e^{-\varepsilon\Pi(\Gamma)}\left(1-\frac{5\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du)\right)\right]^n\\ &\le\exp\left(-\varepsilon n\Pi_1e^{-\varepsilon\Pi(\Gamma)}\left(1-\frac{5\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c}|u|^2\,\Pi(du)\right)\right).\end{aligned}$$

Аналогічним чином, для довільного $j = 2, \dots, m$

$$\mathsf{P}\left(\upsilon_j > jn, \upsilon_{j-1} \le (j-1)n \;\Big|\; \mathcal{F}^{\varepsilon}_{(j-1)n}\right)$$
$$\le \exp\left(-\varepsilon n \Pi_j e^{-\varepsilon \Pi(\Gamma)}\left(1 - \frac{5\varepsilon}{2\theta^2}\int_{\Gamma^c} |u|^2\,\Pi(du)\right)\right)\mathbb{1}_{\upsilon_{j-1}\le (j-1)n}.$$

Перемноживши ці нерівності та врахувавши, що $n = [t/(m\varepsilon)]$, отримуємо шукану нерівність. □

4. Експоненційна ергодичність для процесів з шумом Леві

Позначимо $\mathcal{Q}$ множину тих $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$, для яких функція

$$x \mapsto \int_{|u|>1} f(x+u)\,\Pi(du)$$

локально обмежена, та покладемо для $f \in \mathcal{Q}$

$$\mathcal{A}f(x) = (\nabla f(x), a(x) + b) + \int_{\mathbb{R}^m}\left[f(x+u) - f(x) - (\nabla f(x), u)\mathbb{1}_{|u|\le 1}\right]\Pi(du),$$
$$x \in \mathbb{R}^m.$$

Наступна теорема доведена в [1] (теорема 1.1). Для даної ймовірнісної міри μ на $\mathbb{R}^m$ покладемо

$$\mu_s(dy) = \int_{\mathbb{R}^m} P_s(x, dy)\,\mu(dx), \qquad s > 0.$$

Теорема 4.1. *Нехай виконуються такі умови.*

1. *Для довільного $R > 0$ існує $T = T(R)$ таке, що*
$$\delta(T, R) := \inf_{|x|,|y|\le R}\left(\mu_{x,T} \wedge \mu_{y,T}\right) > 0.$$
2. *Існує функція $\varphi \in \mathcal{Q}$ та сталі $\alpha, \beta > 0$ такі, що*
$$\mathcal{A}\varphi \le -\alpha\varphi + \beta, \tag{33}$$
причому $\varphi(x) \to +\infty$, $|x| \to \infty$.

Тоді процес X має єдиний інваріантний розподіл π. Більше того, існують додатні сталі C_1, C_2 такі, що для довільної ймовірнісної міри μ

$$\|\mu_s - \pi\|_{var} \le \left(1 + \int_{\mathbb{R}^m}\varphi\,d\mu\right)e^{\mathsf{C}_1 - \mathsf{C}_2 s}, \qquad s \in \mathbb{R}^+. \tag{34}$$

В доведенні теореми 1.1 [1] вказані явні формули для сталих e^{C_1}, C_2 в термінах функції φ та величини $\delta(T, R)$. Наша мета полягає в тому, щоб навести подібні формули у виді, придатному до перевірки в термінах міри Леві Π процесу Z в рівнянні (1) та коефіцієнту a цього рівняння. Умова Ляпунова (33) в таких термінах перевіряється легко, див. розділ 4.1 [1] та посилання там. Безпосередньо з теореми 2.1, марковської властивості процесу X та леми Добрушина (див. Додаток A) випливає наступна оцінка для $\delta(T, R)$ для певних T, R (доведення аналогічне до доведення леми 3.2 [1]), тому ми його не наводимо).

Лема 4.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та для даних $t_1, R_1 > 0$*

$$\chi := \inf_{|x|\le R_1, |y|\le R_1}\ \sup_{\xi\sim X(x,t_1), \eta\sim X(y,t_1)} \mathsf{P}(|\xi - \eta| < \varkappa, |\xi| \le R_0) > 0. \tag{35}$$

Тоді

$$\delta(t + t_1, R_1) \ge \chi\delta^m\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2m}\left(\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2\right).$$

Зауваження 4.1. Достатньою для виконання нерівності (35) є, наприклад, умова **S** роботи [1], яку можна ефективно перевіряти в термінах процесу Z та коефіцієнту a рівняння (1), див. розділ 4.3 [1]. Інші можливості перевірки нерівності (35) можуть виникати завдяки додатковим припущенням щодо рівняння, див. розділ 5 де (35) забезпечується завдяки умові дисипативності (38).

Підставивши оцінку з попередньої леми в явні формули для сталих C_1, C_2 з доведення теореми 1.1 [1], остаточно отримуємо наступний результат.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та умова 2 теореми 4.1. Нехай також для даних $c \in (0,1)$, $t_1, R_1 > 0$ мають місце співвідношення* (35) *та*

$$\varphi(x)+\varphi(y) \ge \max\left(\frac{2\beta}{c\alpha}, 1\right), \qquad \max(|x|,|y|) \ge R_1. \tag{36}$$

Позначимо

$$T = t+t_1, \qquad \varsigma = \chi\delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2m} (\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2),$$

$$Q = \frac{1}{\ln(1/\varsigma)}\left(\frac{(1-c)\alpha}{2}T + \ln\left(1+\frac{4\beta}{\alpha} + 4\sup_{|x|\le R_1}\varphi(x)\right)\right).$$

Тоді має місце нерівність (34) *з*

$$\mathsf{C}_1 = \frac{(1-c)\alpha T}{2} + \max\left(\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), 0\right) + \ln\left(\frac{4}{1-(1-\varsigma)^{1/2}}\right), \qquad \mathsf{C}_2 = \frac{(1-c)\alpha}{4\max(Q,1)}.$$

5. Приклад

Нехай в рівнянні (1) процес $Z(t)$ має вигляд

$$Z(t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} u\,\tilde\nu(ds,du)$$

з мірою Леві Π такою, що задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\,\Pi(du) < +\infty. \tag{37}$$

Нехай функція a задовольняє таку *умову дисипативності*: $a(0)=0$ та існує така стала $A_3 > 0$, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}^2$ виконується нерівність

$$(x-y, a(x)-a(y)) \le -A_3|x-y|^2. \tag{38}$$

Покажемо, що за умов (37) та (38) розв'язок рівняння (1) задовольняє умовам теореми 4.2 та знайдемо явні значення констант α та β і нижню оцінку для ς.

Для функції $f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, маємо

$$\mathcal{A}f(x) = 2(x, a(x)) + \int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\Pi(du).$$

З умови (38) отримуємо

$$\mathcal{A}f(x) \le -2A_3|x|^2 + \int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\Pi(du),$$

тобто (33) виконується з $\alpha = 2A_3$, $\beta = \int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\Pi(du)$.

Знайдемо оцінки для величин P_2 та χ. Позначимо $q_1 = R - \frac{1}{2}m\varepsilon A_1 \varrho e^{tA_1}$. Маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_2 &= \sup_{|x|\le R_0} \mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}|X(x,r)| > q_1\right)\\ &\le \sup_{|x|\le R_0}\left[\mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}|Z(t)| > \frac{q_1}{2}\right) + \mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}\left|x + \int_0^r a(X(x,s))\,ds\right| > \frac{q_1}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

За припущенням, Z — мартингал, а отже $|Z|$ — субмартингал. За максимальною нерівністю Дуба маємо

$$\mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}|Z(t)|>\frac{q_1}{2}\right)\le\frac{4}{q_1^2}\,\mathsf{E}\,|Z(t)|^2=\frac{4t}{q_1^2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\Pi(du)=\frac{4\beta t}{q_1^2}.$$

Розглянемо функцію $g(r)=\int_0^r|a(X(x,s))|\,ds$, $r\le t$. Функція a задовольняє умову лінійного росту:

$$|a(x)|\le A_1|x|.$$

Тому

$$\begin{aligned}g(r)&\le A_1\int_0^r|X(x,s)|\,ds=A_1\int_0^r\left|x+\int_0^s a(X(x,u))\,du+Z(s)\right|\,ds\\&\le A_1\int_0^r(|x|+g(s))\,ds+A_1\int_0^t|Z(s)|\,ds.\end{aligned}$$

З леми Гронуола випливає, що

$$g(r)\le\left[A_1|x|r+A_1\int_0^t|Z(s)|\,ds\right]e^{rA_1}.$$

Тоді

$$\sup_{r\le t}g(r)\le\left[|x|t+\int_0^t|Z(s)|\,ds\right]A_1e^{tA_1}.$$

Вважаємо, що $|x|\le R_0$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{P}&\left(\sup_{r\le t}\left|x+\int_0^r a(X(x,s))\,ds\right|>\frac{q_1}{2}\right)\le\mathsf{P}\left(\sup_{r\le t}g(r)>\frac{q_1}{2}-|x|\right)\\&\le\mathsf{P}\left(\int_0^t|Z(s)|\,ds>\frac{1}{A_1}\left(\frac{q_1}{2}-R_0\right)e^{-tA_1}-R_0t\right)\le\frac{1}{q_2^2}\,\mathsf{E}\left(\int_0^t|Z(s)|\,ds\right)^2\\&\le\frac{t}{q_2^2}\int_0^t\mathsf{E}\,|Z(s)|^2\,ds=\frac{\beta t^3}{2q_2^2},\end{aligned}$$

де

$$q_2=\frac{1}{A_1}\left(\frac{q_1}{2}-R_0\right)e^{-tA_1}-R_0t.$$

Отже

$$\mathsf{P}_2\le\beta t\left(\frac{4}{q_1^2}+\frac{t^2}{2q_2^2}\right).\tag{39}$$

Маємо

$$\begin{aligned}\chi&=\inf_{|x|\le R_1,|y|\le R_1}\ \sup_{\xi\sim X(x,t_1),\eta\sim X(y,t_1)}\mathsf{P}(|\xi-\eta|<\varkappa,|\xi|\le R_0)\\&\ge\inf_{|x|\le R_1,|y|\le R_1}\ \sup_{\xi\sim X(x,t_1),\eta\sim X(y,t_1)}[1-\mathsf{P}(|\xi-\eta|\ge\varkappa)-\mathsf{P}(|\xi|>R_0)]\\&\ge\inf_{|x|\le R_1,|y|\le R_1}[1-\mathsf{P}(|X(x,t_1)-X(y,t_1)|\ge\varkappa)-\mathsf{P}(|X(x,t_1)|>R_0)]\\&\ge1-\sup_{|x|\le R_1,|y|\le R_1}\mathsf{P}(|X(x,t_1)-X(y,t_1)|\ge\varkappa)-\sup_{|x|\le R_1}\mathsf{P}(|X(x,t_1)|>R_0).\end{aligned}$$

З умови (38) випливає, що величина $\psi_{x,y}(t_1)=|X(x,t_1)-X(y,t_1)|^2$ задовольняє умову

$$\psi_{x,y}(t_1)\le\psi_{x,y}(0)e^{-2t_1A_3}=|x-y|^2e^{-2t_1A_3}.$$

Тому

$$\mathsf{P}(|X(x,t_1)-X(y,t_1)|\ge\varkappa)\le\mathsf{P}\left(|x-y|e^{-A_3t_1}\ge\varkappa\right)=\mathbb{1}_{|x-y|e^{-t_1A_3}\ge\varkappa}.$$

За нерівністю Чебишева та лемою 3.3 [1] маємо

$$\sup_{|x|\le R_1} \mathsf{P}(|X(x,t_1)| > R_0) \le \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + R_1^2 e^{-t_1\alpha}\right).$$

Звідси маємо нижню оцінку для χ:

$$\chi \ge \mathbb{1}_{2R_1 e^{-t_1 A_3} < \varkappa} - \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + R_1^2 e^{-t_1\alpha}\right). \tag{40}$$

Отже, оцінка для ς виглядає наступним чином

$$\varsigma \ge \left(\mathbb{1}_{2R_1 e^{-t_1 A_3} < \varkappa} - \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + R_1^2 e^{-t_1\alpha}\right)\right)\delta^m \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2m}\left(\mathsf{P}_1 - \beta t\left(\frac{4}{q_1^2} + \frac{t^2}{2q_2^2}\right)\right).$$

Проілюструємо наведені вище загальні обчислення, знайшовши значення сталих C_1 та C_2 для конкретно заданих функції a, міри Леві Π та сталих, що фігурують в умовах (5), (6) теореми 2.1, умові (33) теореми 4.1 та умові (36) теореми 4.2. Нехай $a(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}^2$, тоді $A_0 = A_2 = 0$, $A_1 = A_3 = 1$. Нехай міра Леві Π зосереджена на кільці $\Gamma = \{u \in \mathbb{R}^2 | 1 < |u| \le 2\}$ і $\Pi(\Gamma) = \Pi_1 = 5$, тоді можна покласти $\rho = 1$, $\varrho = 2$. Вважаємо також, що $\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\,\Pi(du) = 10$, і для $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ має місце $\Pi_2 = 1$.

За наведеними вище формулами, маємо $\alpha = 2$, $\beta = 10$. Оскільки $\Pi(\Gamma^c) = 0$, маємо $\theta = 0$. Виберемо такі R_1 та c, щоб виконувалась умова (36): $R_1 = 5$, $c = 1/2$. Покладемо $t = 1$, $R_0 = 4$ (зауважимо, що для того, щоб права частина нерівності (40) була додатною при великих t_1, потрібно, щоб $R_0^2 > \beta/\alpha = 5$). Виберемо R таким чином, щоб $\mathsf{P}_{1,0} > \mathsf{P}_2$: $R = 60$. Покладемо $\delta = \gamma = 1/2$. Тоді спочатку обираємо величину ε, яка задовольняє умову (5), а потім величину $\varkappa$, яка задовольняє умову (6): $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varkappa = 5\cdot 10^{-9}$. Нарешті, підбираємо t_1 таким чином, щоб права частина нерівності (40) була додатною: $t_1 = 22$. Тоді сталі C_1 та C_2 дорівнюють

$$\mathsf{C}_1 = 22.97918651, \qquad \mathsf{C}_2 = 0.11936229.$$

Додаток А. Спільна частина мір

Фундаментальну властивість спільної частини мір (3) встановлює наступне твердження, яке часто називають лемою Добрушина, див. [4].

Лема А.1. *Нехай μ, κ — ймовірнісні міри на повному сепарабельному метричному просторі $\mathbb{X}$. Тоді*

$$\mu \wedge \kappa = \max_{\xi\sim\mu,\eta\sim\kappa} \mathsf{P}(\xi = \eta).$$

Іншими словами, для довільних випадкових елементів ξ та η зі значеннями в $\mathbb{X}$ з розподілами μ та κ відповідно

$$\mathsf{P}(\xi = \eta) \le \mu \wedge \kappa, \tag{41}$$

і (на деякому ймовірнісному просторі) існують елементи ξ та η, для яких (41) перетворюється на рівність.

Мають місце наступні твердження.

Лема А.2. *1. Нехай μ, κ — скінченні міри на повному сепарабельному метричному просторі $\mathbb{X}$, причому $\mu(\mathbb{X}) = \kappa(\mathbb{X})$. Нехай $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ — вимірне відображення. Тоді*

$$\left(\mu \circ F^{-1}\right) \wedge \left(\kappa \circ F^{-1}\right) \ge \mu \wedge \kappa.$$

2. Нехай μ_k, κ_k, $k = 1,\dots,n$ — скінченні міри, зосереджені на $\mathbb{X}_k$, $k = 1,\dots,n$, відповідно, причому $\mu_k(\mathbb{X}) = \kappa_k(\mathbb{X})$. Тоді

$$\left(\sum_k \mu_k\right) \wedge \left(\sum_k \kappa_k\right) \ge \sum_k \mu_k \wedge \kappa_k.$$

3. Нехай

$$\mu = \int_{\Theta} \mu_\theta(\cdot)\, \pi(d\theta), \qquad \kappa = \int_{\Theta} \kappa_\theta(\cdot)\, \pi(d\theta),$$

де π *— скінченна міра на деякому вимірному просторі* Θ*, а* $\mu_\theta(A)$*,* $\kappa_\theta(A)$ *є вимірними функціями за змінною* θ *і ймовірнісними мірами за змінною* A*.*

Тоді

$$\mu \wedge \kappa \geq \int_{\Theta} (\mu_\theta \wedge \kappa_\theta)\, \pi(d\theta).$$

Твердження 1,2 прямо випливають з леми Добрушина. Доведення твердження 3 також можна провести з використанням леми Добрушина, але при цьому виникає додатковий технічний момент: для сімей мір $\{\mu_\theta\}$, $\{\kappa_\theta\}$ потрібно мати сім'ю пар $(\xi_\theta, \kappa_\theta)$, кожна з яких давала б рівність в нерівності для $\mu_\theta \wedge \kappa_\theta$, аналогічній (41), і яка крім того була б вимірною по θ. Наявність такої сім'ї гарантує "лема про три випадкові величини" [5].

Додаток B. Теорема про неявну функцію

Нехай U — відкрита область в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Позначимо $U_x = \{z | (x, z) \in U\}$, ∇_k — похідна по k-ій змінній.

Теорема B.1. *Нехай неперервна функція* $F : U \to \mathbb{R}^m$ *задовольняє умовам:*

1) Існує похідна Соболєва $\nabla_z F(x, z) = \left(\frac{\partial}{\partial_{z_1}} F(x, z), \dots, \frac{\partial}{\partial_{z_m}} F(x, z)\right)$ *в області* U*.*

2) Існують такі константа $\gamma \in (0, 1)$ *та невироджена матриця* H*, що для всіх* x *та майже скрізь по* z*,* $(x, z) \in U$*, виконується нерівність*

$$\|\nabla_z F(x, z) - H\| \leq \gamma \|H^{-1}\|^{-1}. \tag{42}$$

3) Існує похідна $\nabla_x F(x, z)$ *в звичайному сенсі, причому* $\|\nabla_x F(x, z)\| \leq D$ *для всіх* $(x, z) \in U$*.*

Нехай константи $\varkappa > 0$ *та* $r > 0$ *задовольняють умові*

4) $D\|H^{-1}\|\varkappa \leq (1 - \gamma) r$*.*

Нехай $V_r = \{z \mid \overline{B}_r(z) \subset U_x\}$*. Тоді існує така єдина функція* $K \colon B_\varkappa(x) \times V_r \to \mathbb{R}^m$*, що для всіх* $y \in B_\varkappa(x)$*,* $z \in V_r$ *виконується рівність*

$$F(y, K(y, z)) = F(x, z). \tag{43}$$

Властивості функції K:

1) Для всіх $y \in B_\varkappa(x)$, $z \in V_r$ існує похідна Соболєва $\nabla_z K(y, z)$, причому

$$\nabla_z K(y, z) = [\nabla_2 F(y, K(y, z))]^{-1} \nabla_z F(x, z). \tag{44}$$

2) Для довільного $y \in B_\varkappa(x)$ функція $K(y, z)$ — ліпшицева по змінній z.

3) Для $y \in B_\varkappa(x)$, $z \in V_r$ справедлива наступна двостороння оцінка

$$\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^m \leq |\det \nabla_z K(y, z)| \leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^m. \tag{45}$$

Доведення теореми B.1 аналогічне доведенню теореми 2.2.7 в [6]. Властивість 1 випливає з доведення теореми B.1, властивість 2 з обмеженості похідної (44). Оцінка (45) є наслідком (42), (44) та очевидної нерівності $|\det A| \leq \|A\|^m$, де A — матриця розміру $m \times m$ (в доведенні останньої нерівності використовується зведення матриці A до її жорданової нормальної форми та властивості спектрального радіусу матриць (див. напр. теорему 6.1.3 в [7])).

Література

1. A. M. Kulik, *Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise*, Stochastic Processes and Appl. **119** (2009), no. 2, 602–632.
2. A. M. Kulik, *Absolute continuity and convergence in variation for distributions of functionals of Poisson point measure*, J. Theor. Probab. **24** (2011), no. 1, 1–38.
3. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, "Наука", Москва, 1987.
4. Р. Л. Добрушин, *Задание системы случайных величин при помощи условных распределений*, Теор. вероятн. применен. **15** (1970), no. 3, 469–497.
5. A. Yu. Veretennikov, *Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition*, Theory of Stochastic Processes **8**(**24**) (2002), no. 3–4, 383–391.
6. Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, "Мир", Москва, 1977.
7. П. Ланкастер, *Теория матриц*, "Наука", Москва, 1973.

НТУУ "КПІ", пр. Перемоги 37, 03056, Київ, Україна; КНУ ім. Т. Г. Шевченка, вул. Глушкова 6, 03127, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: sem_bodn@ukr.net

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська 3, 01601, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: kulik@imath.kiev.ua

Надійшла 05/12/2011