Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 56–68

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 56–68

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ $M^\theta/G/1/m$ З ПОРОГОВИМ ПЕРЕМИКАННЯМ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ

УДК 519.21

К. Ю. ЖЕРНОВИЙ

Анотація. Розглянуто систему $M^\theta/G/1/m$ з двошвидкісним обслуговуванням. Перемикання режимів обслуговування здійснюється в момент початку обслуговування чергового замовлення, якщо кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості і для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі і для стаціонарних характеристик.

Abstract. We consider the $M^\theta/G/1/m$ queue with two service modes. The server switches modes of service when the number of customers present at a service completion epoch is larger than h. Laplace transforms for distributions of the number of customers in the system on the busy period and for the busy time distribution function are found. Average duration of the busy time, and formulas for the stationary distribution of number of customers in the system and for the stationary characteristics are obtained.

Аннотация. Рассмотрена система $M^\theta/G/1/m$ с двухскоростным обслуживанием. Переключение режимов обслуживания осуществляется в момент начала обслуживания очередной заявки, если число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и для стационарных характеристик.

1. Вступ

Моделі систем обслуговування, в яких може застосовуватись різна інтенсивність обслуговування залежно від довжини черги, а замовлення можуть надходити групами, часто використовуються для вивчення телекомунікаційних процесів [1]. Дослідження систем типу $M/G/1$ та $M^\theta/G/1$ з двошвидкісним обслуговуванням у статтях [2]–[5] обмежувалось знаходженням стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі і розв'язанням задач оптимізації. Для відшукання стаціонарного розподілу кількості замовлень найчастіше використовують метод вкладених ланцюгів Маркова і за допомогою формули повної ймовірності одержують систему лінійних алгебраїчних рівнянь для стаціонарних імовірностей, яку розв'язують з використанням апарату твірних функцій [6, с. 57–60]. Знайдений за допомогою методу вкладених ланцюгів Маркова стаціонарний розподіл відповідає моментам завершення обслуговування замовлень і для системи з обмеженою чергою $M^\theta/G/1/m$, взагалі кажучи, не збігається зі стаціонарним розподілом для довільних моментів часу ($t \to \infty$).

Інший підхід, який дозволяє отримати ефективний алгоритм знаходження стаціонарного розподілу кількості замовлень і здійснити дослідження не лише стаціонарного, а й перехідного режиму функціонування системи $M^\theta/G/1/m$, грунтується

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25; Secondary 60K20.
Ключові слова і фрази. Система $M^\theta/G/1/m$ з двошвидкісним обслуговуванням, розподіл кількості замовлень, функція розподілу періоду зайнятості, метод потенціалу.

на методі потенціалу для неперервних знизу випадкових блукань, розробленому В. С. Королюком [7] і застосованому його учнями в модифікованому вигляді [8]–[11] до аналізу систем M/G/1 та $M^\theta/G/1$ як з обмеженою, так і з необмеженою чергою.

У статтях [12, 13] методом потенціалу досліджено системи типу $M^\theta/G/1/m$ та $M^\theta/G/1$ з пороговим блокуванням вхідного потоку та перемиканням режимів обслуговування (r порогів перемикання $h_1 < h_2 < \cdots < h_r$). Блокування потоку замовлень здійснюється під час обслуговування кожного чергового замовлення, для якого кількість замовлень у системі в момент початку його обслуговування, перевищує заданий пороговий рівень $h = h_1$. Для дослідження таких систем за рахунок блокування вхідного потоку під час застосування післяпорогових режимів обслуговування з розподілами часу обслуговування одного замовлення $F_1(t), \dots, F_r(t)$, відмінними від основного розподілу $F(t)$, вдалося застосувати метод потенціалу з використанням лише одного неперервного знизу випадкового блукання, що відповідає основному розподілу $F(t)$.

У даній праці ми розглянемо систему $M^\theta/G/1/m$ з двошвидкісним обслуговуванням, у якій блокування вхідного потоку здійснюється лише в той період часу, коли кількість замовлень у системі перевищує m. Для дослідження такої системи виникає необхідність застосування методу потенціалу з використанням двох неперервних знизу випадкових блукань, які відповідають основному та післяпороговому режимам обслуговування з розподілами часу обслуговування $F(t)$ та $\widetilde{F}(t)$ відповідно.

2. Опис моделі

Нехай задані послідовності незалежних і однаково розподілених випадкових величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(n \geq 1)$, де α_n — час між надходженням $(n-1)$–ої та n–ої групи замовлень, θ_n — кількість замовлень в n–ій групі, а β_n — час обслуговування n–го замовлення, причому $\mathsf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda' x}$, $\lambda' > 0$, $\mathsf{P}\{\theta_n = i\} = a'_i$, $i \geq 0$, $a'_0 < 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} a'_i = 1$. Якщо $\mathsf{P}\{\theta_n > 1\} = 0$, то замовлення в систему надходять по одному, якщо ж $a'_0 > 0$, то вхідний потік може проріджуватись.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, і обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m — максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0, m+1]$ замовлень, надходить група кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і введемо для $\xi(t)$ так званий пороговий рівень h, $h = 1, \dots, m-1$. Якщо t — момент початку обслуговування n–го замовлення і $\xi(t) \leq h$, то $\mathsf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$, $x \geq 0$, $F(0) = 0$. Якщо ж $\xi(t) > h$, то $\mathsf{P}\{\beta_n < x\} = \widetilde{F}(x)$, $x \geq 0$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Позначимо описану систему обслуговування через $M^\theta/G_1/1/m$ (індекс біля G визначає кількість післяпорогових режимів обслуговування). Випадковий процес, який протікає у системі $M^\theta/G_1/1/m$, належить до класу процесів перемикання [1].

3. Основні позначення і допоміжні результати

Позначимо через P_n умовну ймовірність за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \geq 0$ замовлень, і через E (P) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень.

Нам буде зручніше працювати з вхідним потоком, для якого

$$\mathsf{P}\{\theta_n = i\} = a_i, \qquad i \geq 1, \ \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

Такий потік отримаємо, поклавши $a_i = a_i'/(1-a_0')$ і перерахувавши інтенсивність потоку за формулою $\lambda = \lambda'(1-a_0')$, де λ' — інтенсивність заданого вхідного потоку, який може проріджуватись.

Введемо такі позначення: $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0;x)$; a_i^{k*} — k–кратна згортка послідовності a_i; ρ_k — стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі; $a(s,z) = s + \lambda\bigl(1-\alpha(z)\bigr)$. Нехай

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x), \qquad m_1 = \int_0^\infty x\, dF(x) < \infty, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x);$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty; \qquad \alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k; \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

$$\overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} q_k(s), \qquad \sum_{k=1}^{0} b_k = 0.$$

Для $\mathrm{Re}s \geq 0$ визначимо послідовності $p_i(s)$ $(i = -1, 0, 1, \dots)$ і $q_i(s)$ $(i = 0, 1, \dots)$ за допомогою співвідношень

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(a(s,z))}{z f(s)}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i(s) = \frac{1 - f(a(s,z))}{a(s,z)}, \tag{1}$$

тобто

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \frac{1}{f(s)} \int_0^\infty e^{-sx}\, \mathsf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF(x) \\ &= \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x); \\ q_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\, \mathsf{P}\{\eta(x) = i\} \overline{F}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \overline{F}(x)\, dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Функції $R_k(s)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, визначимо за допомогою рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) = \frac{z}{f\bigl(a(s,z)\bigr) - z}, \qquad |z| < \nu_-(s), \tag{3}$$

де $\nu_-(s)$ — єдиний корінь рівняння $f\bigl(a(s,z)\bigr) = z$ на проміжку $[0;1]$.

Згідно з [10] $p_i(s)$ можна інтерпретувати як розподіл стрибків деякого неперервного знизу випадкового блукання, яке залежить від параметра $s \geq 0$ і відповідає функції розподілу $F(x)$ основного режиму обслуговування.

Нехай

$$\rho = \lambda m_1 b_1, \qquad \nu_- = \lim_{s\to+0,\rho>1} \nu_-(s);$$

$$p_i = \lim_{s\to+0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s\to+0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s\to+0} q_i(s). \tag{4}$$

Тоді з рівностей (1)–(3) отримаємо:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i = \frac{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{z}; \qquad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}, \qquad |z| < \min\{1, \nu_-\};$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i = \frac{1 - f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}, \qquad q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \overline{F}(x)\, dx,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = m_1.$$

Аналогічно визначимо функції та сталі, які описують неперервне знизу випадкове блукання, що відповідає розподілу часу обслуговування $\widetilde{F}(x)$ післяпорогового режиму. Їх будемо позначати символом “хвилька”, наприклад,

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\widetilde{F}(x), \qquad \widetilde{m}_1 = \int_0^\infty x\, d\widetilde{F}(x) < \infty, \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{p}_i(s) = \frac{1}{\widetilde{f}(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, d\widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{q}_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \overline{\widetilde{F}}(x)\, dx; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{q}_k = \widetilde{m}_1$$

і так далі.

4. Розподіл кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості

Нехай

$$\tau = \inf\{t \ge 0 \colon \xi(t) = 0\}$$

позначає перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$, і

$$\varphi_n(t,k) = \mathsf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau > t\} \qquad (1 \le n, k \le m+1),$$

$$\Phi_n(s,k) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t,k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Очевидно, що $\varphi_0(t,k) = 0$. За допомогою формули повної ймовірності одержимо рівності

$$\begin{aligned} \varphi_n(t,k) = &\sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x) = j\} \varphi_{n+j-1}(t-x,k)\, dF(x) \\ &+ \int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\} \varphi_m(t-x,k)\, dF(x) \\ &+ \big(\mathsf{P}\{\eta(t) = k-n\} + I\{k = m+1\}\, \mathsf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\}\big)\, \overline{F}(t), \\ &1 \le n \le h; \end{aligned} \tag{5}$$

та

$$\varphi_n(t,k)=\sum_{j=0}^{m-n}\int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x)=j\}\varphi_{n+j-1}(t-x,k)\,d\widetilde{F}(x)$$
$$+\int_0^t \mathsf{P}\{\eta(x)\ge m+1-n\}\varphi_m(t-x,k)\,d\widetilde{F}(x)$$
$$+\left(\mathsf{P}\{\eta(t)=k-n\}+I\{k=m+1\}\,\mathsf{P}\{\eta(t)\ge m+2-n\}\right)\overline{\widetilde{F}}(t),$$
$$h+1\le n\le m.$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того, відбулась подія A чи ні.

Введемо позначення:

$$\widetilde{A}_n(s)=1+\big(1-\widetilde{f}(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s);\qquad C_n(s)=R_{h-n}(s)-f(s)\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)p_{h-n-i}(s);$$
$$f_n(s,k)=q_{k-n}(s)+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s);$$
$$\widetilde{f}_n(s,k)=\widetilde{q}_{k-n}(s)+I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n}(s).$$

Перейдемо в рівностях (5) до перетворень Лапласа. Враховуючи співвідношення (2) та аналогічні до (2) рівності для $\widetilde{p}_i(s)$ і $\widetilde{q}_i(s)$, одержимо систему рівнянь для визначення функцій $\Phi_n(s,k)$

$$\Phi_n(s,k)=f(s)\sum_{j=0}^{m-n}p_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,k)+f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,k)+f_n(s,k),\quad 1\le n\le h, \tag{6}$$

$$\Phi_n(s,k)=\widetilde{f}(s)\sum_{j=0}^{m-n}\widetilde{p}_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,k)+\widetilde{f}(s)\overline{\widetilde{p}}_{m-n}(s)\Phi_m(s,k)+\widetilde{f}_n(s,k),\quad h+1\le n\le m, \tag{7}$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(s,k)=0. \tag{8}$$

Розглянемо (7) як поки що окрему систему рівнянь відносно функцій $\Phi_n(s,k)$, $k=h,\dots,m$. Її розв'язки, використовуючи теорему 2 статті [10] про розв'язки рівняння на відрізку, та рівність

$$\widetilde{f}(s)\sum_{j=1}^{n}\widetilde{R}_j(s)\overline{\widetilde{p}}_{n-j}(s)=\widetilde{R}_n(s)-\big(1-\widetilde{f}(s)\big)\sum_{j=1}^{n}\widetilde{R}_j(s)-1,\qquad n\ge 1, \tag{9}$$

яка випливає зі співвідношення для функцій $\widetilde{R}_i(s)$, аналогічного до (3), можна записати у вигляді

$$\Phi_n(s,k)=\widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,k)-\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,k),\qquad h\le n\le m. \tag{10}$$

Систему рівнянь (6) запишемо так

$$\begin{gathered}\Phi_n(s,k) - f(s)\sum_{j=-1}^{h-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,k) \\ = f(s)\sum_{j=h-n}^{m-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,k) + f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,k) + f_n(s,k), \\ 1 \le n \le h.\end{gathered} \tag{11}$$

Знову використовуючи теорему 2 [10], з (11) отримаємо

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,k) &= R_{h-n}(s)\Phi_h(s,k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)\Bigg(f(s)\sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n-i}\Phi_j(s,k) \\ &\quad + f(s)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Phi_m(s,k) + f_{n+i}(s,k)\Bigg), \qquad 1 \le n \le h.\end{aligned} \tag{12}$$

Виразивши за допомогою (10) всі $\Phi_n(s,k)$ для $h \le n \le m-1$ і підставивши їх у (12), отримаємо співвідношення

$$\Phi_n(s,k) = \widetilde{D}_n(s)\Phi_m(s,k) - D_n(s,k), \qquad 1 \le n \le h-1, \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_n(s) &= C_n(s)\widetilde{A}_h(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)\Bigg(\sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-i}(s)\widetilde{A}_j(s) + \overline{p}_{m-n-i}(s)\Bigg); \\ D_n(s,k) &= C_n(s)\sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{h+i}(s,k) \\ &\quad - f(s)\sum_{u=1}^{h-n} R_u(s)\sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-u}(s)\sum_{i=1}^{m-j} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{j+i}(s,k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)f_{n+i}(s,k).\end{aligned} \tag{14}$$

Поклавши в (13) $n=0$, з граничної умови (8) одержимо

$$\Phi_m(s,k) = \frac{D_0(s,k)}{\widetilde{D}_0(s)}. \tag{15}$$

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 4.1. *Для довільних* $1 \le k \le m+1$ *і* $\operatorname{Re} s > 0$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}_n\{\xi(t)=k, \tau>t\}\,dt = \widetilde{D}_n(s)\Phi_m(s,k) - D_n(s,k), \qquad 1 \le n \le h-1;$$

$$\begin{gathered}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}_n\{\xi(t)=k, \tau>t\}\,dt = \widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,k) - \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,k), \\ h \le n \le m-1,\end{gathered}$$

де функція $\Phi_m(s,k)$ *визначена формулою* (15).

5. Період зайнятості та стаціонарний розподіл

Якщо система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень, то для всіх $1 \le k \le m+1$ за допомогою формули повної ймовірності отримаємо такі рівності:

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}\{\xi(t)=k,\tau>t\}\,dt=\sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,k)+\overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,k). \tag{16}$$

Враховуючи, що

$$\varphi_{m+1}(t,k)=\int_0^t \varphi_m(t-x,k)\,d\widetilde{F}(x)+I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{F}}(t);$$

$$\Phi_{m+1}(s,k)=\widetilde{f}(s)\Phi_m(s,k)+I\{k=m+1\}\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s},$$

і використовуючи співвідношення (10) та (13), можемо детально розписати праву частину (16)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & e^{-st}\,\mathsf{P}\{\xi(t)=k,\tau>t\}\,dt\\ &=\left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n\widetilde{D}_n(s)+\sum_{n=h}^{m} a_n\widetilde{A}_n(s)+\overline{a}_{m+1}\widetilde{f}(s)\right)\Phi_m(s,k)-\sum_{n=1}^{h-1} a_nD_n(s,k)\\ &\quad-\sum_{n=h}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,k)+\overline{a}_{m+1}I\{k=m+1\}\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}.\end{aligned} \tag{17}$$

Для отримання зображення для $\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}\{\tau>t\}\,dt$ необхідно перейти в рівності (17) до сумування по k від 1 до $m+1$.

Неважко переконатись, що

$$\sum_{k=1}^{m+1} f_n(s,k)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k(s)=\frac{1-f(s)}{s};\qquad \sum_{k=1}^{m+1}\widetilde{f}_n(s,k)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{q}_k(s)=\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}.$$

Позначивши $\sum_{k=1}^{m+1} D_n(s,k)$ через $D_n(s)$, з (14) отримаємо

$$\begin{aligned}D_n(s)=\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}&\left(C_n(s)\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i(s)-f(s)\sum_{u=1}^{h-n}R_u(s)\sum_{j=h+1}^{m-1}p_{j-n-u}(s)\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i(s)\right)\\ &+\frac{1-f(s)}{s}\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s).\end{aligned} \tag{18}$$

Отже, з (17) випливає таке твердження.

Теорема 5.1. *Перетворення Лапласа від функції розподілу періоду зайнятості системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *має вигляд*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathsf{P}\{\tau>t\}\,dt=&\left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n\widetilde{D}_n(s)+\sum_{n=h}^{m} a_n\widetilde{A}_n(s)+\overline{a}_{m+1}\widetilde{f}(s)\right)\frac{D_0(s)}{\widetilde{D}_0(s)}\\ &-\sum_{n=1}^{h-1} a_nD_n(s)-\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\left(\sum_{n=h}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)-\overline{a}_{m+1}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Виконаємо обчислення, необхідні для переходу в (19) до границі при $s \to +0$. Використовуватимемо послідовності $\{p_i\}$, $\{q_i\}$, $\{R_i\}$, визначені в (4), та послідовності $\{\widetilde{p}_i\}$, $\{\widetilde{q}_i\}$, $\{\widetilde{R}_i\}$, визначені співвідношеннями

$$\widetilde{p}_i = \lim_{s\to+0} \widetilde{p}_i(s), \qquad \widetilde{R}_i = \lim_{s\to+0} \widetilde{R}_i(s), \qquad \widetilde{q}_i = \lim_{s\to+0} \widetilde{q}_i(s).$$

Враховуючи, що

$$f(0) = \widetilde{f}(0) = 1; \qquad \lim_{s\to+0} \frac{1-f(s)}{s} = m_1; \qquad \lim_{s\to+0} \frac{1-\widetilde{f}(s)}{s} = \widetilde{m}_1;$$

$$\widetilde{A}_n(0) = 1; \qquad C_n(0) = R_{h-n} - \sum_{i=1}^{h-n} R_i p_{h-n-i} = p_{-1} R_{h+1-n}; \qquad R_n - \sum_{i=1}^{n} R_i \overline{p}_{n-i} = 1,$$

з (14) і (18) одержимо

$$\widetilde{D}_n(0) = C_n(0) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \biggl(\sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-i} + \overline{p}_{m-n-i} \biggr) = R_{h-n} - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{h-n-i} = 1;$$

$$D_n = D_n(0) = \widetilde{m}_1 \biggl(C_n(0) \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{u=1}^{h-n} R_u \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-u} \sum_{i=1}^{m-j} \widetilde{R}_i \biggr) + m_1 \sum_{i=1}^{h-n} R_i.$$

Після переходу в рівності (19) до границі при $s \to +0$ отримаємо формулу для середньої тривалості періоду зайнятості.

Теорема 5.2. *Середня тривалість періоду зайнятості системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *визначається у вигляді*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\tau &= D_0 - \sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n - \widetilde{m}_1 \biggl(\sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i - \overline{a}_{m+1} \biggr) \\
&= m_1 \biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \biggr) \\
&\quad + \widetilde{m}_1 \biggl(p_{-1} R(h) \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{j=h+1}^{m-1} r_j(h) \sum_{i=1}^{m-j} \widetilde{R}_i - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1} \biggr),
\end{aligned} \tag{20}$$

де

$$R(h) = R_{h+1} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n R_{h+1-n}; \qquad r_j(h) = \sum_{u=1}^{h} R_u p_{j-u} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{u=1}^{h-n} R_u p_{j-n-u}.$$

Внаслідок обмеженості черги і того, що вхідний потік груп замовлень є пуассонівським, стаціонарний розподіл кількості замовлень для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ існує за умови, що математичні сподівання випадкових величин θ_n, β_n і $\widetilde{\beta}_n$ скінченні, тобто $b_1 < \infty$, $m_1 < \infty$, $\widetilde{m}_1 < \infty$.

Перейдемо до виведення формул для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі. Позначимо через τ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\tau_0 = 0$, послідовні моменти часу звільнення системи від замовлень. Зрозуміло, що $\tau_1 = \tau$.

Нехай ξ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\xi_0 = 0$, — послідовні інтервали простою системи після моментів τ_i до часу прибуття чергової групи замовлень. Очевидно, що ξ_i — показниково розподілені випадкові величини з параметром λ, і моменти $\xi_i + \tau_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, утворюють процес відновлення. Позначимо через $H(x)$ функцію відновлення, яка відповідає цьому процесу, тобто

$$H(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\Phi^{*i}(x),$$

де $\Phi(x)=\mathsf{P}\{\tau+\xi_1<x\}$, $\Phi^{*k}(x)$ — k–кратна згортка функції розподілу $\Phi(x)$. Для $0<k\le m+1$ виконуються рівності

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=k\}=\mathsf{P}\{\xi(t)=k,\tau\ge t\}+\int_0^t\mathsf{P}\{\xi(t-u)=k\}\,d\Phi(u),$$
$$\mathsf{P}\{\xi(t)=0\}=\mathsf{P}\{\tau<t,\tau+\xi_1\ge t\}+\int_0^t\mathsf{P}\{\xi(t-u)=0\}\,d\Phi(u).$$

Отже,

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=k\}=\int_0^t\mathsf{P}\{\xi(t-u)=k,\tau\ge t-u\}\,dH(u),\qquad k=1,\dots,m+1;$$
$$\mathsf{P}\{\xi(t)=0\}=\int_0^t\mathsf{P}\{\tau<t-u,\tau+\xi_1\ge t-u\}\,dH(u).$$

Користуючись вузловою теоремою відновлення [14, с. 46], знаходимо границі

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\xi(t)=k\}=\frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau}\int_0^\infty\mathsf{P}\{\xi(u)=k,\tau\ge u\}\,du,\qquad k=1,\dots,m+1;$$
$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\xi(t)=0\}=\frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau}\int_0^\infty\mathsf{P}\{\tau<u,\tau+\xi_1\ge u\}\,du.$$

Оскільки $\mathsf{P}\{\tau<u,\tau+\xi_1\ge u\}=\mathsf{P}\{\tau+\xi_1\ge u\}-\mathsf{P}\{\tau\ge u\}$, то

$$\int_0^\infty\mathsf{P}\{\tau<u,\tau+\xi_1\ge u\}\,du=\frac{1}{\lambda}.\tag{21}$$

Перейшовши у рівності (17) до границі при $s\to+0$, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned}\int_0^\infty&\mathsf{P}\{\xi(t)=k,\tau>t\}\,dt\\&=p_{-1}R_{h+1}\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{h+i}(k)-\sum_{u=1}^{h}R_u\sum_{j=h+1}^{m-1}p_{j-u}\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{j+i}(k)+\sum_{i=1}^{h}R_if_i(k)\\&\quad-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\Bigg(p_{-1}R_{h+1-n}\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{h+i}(k)\\&\qquad-\sum_{u=1}^{h-n}R_u\sum_{j=h+1}^{m-1}p_{j-n-u}\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{j+i}(k)+\sum_{i=1}^{h-n}R_if_{n+i}(k)\Bigg)\\&\quad-\sum_{n=h}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{n+i}(k)+I\{k=m+1\}\widetilde{m}_1\overline{a}_{m+1},\end{aligned}\tag{22}$$

де $f_n(k)=q_{k-n}+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}$; $\widetilde{f}_n(k)=\widetilde{q}_{k-n}+I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n}$.

З (21)–(23) після нескладних перетворень отримуємо таке твердження.

Теорема 5.3. *Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *визначається за формулами*

$$\rho_0=\frac{1}{1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau};\qquad\rho_k=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathsf{E}\tau}\left(\sum_{i=1}^{k}R_iq_{k-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}R_iq_{k-n-i}\right)\tag{23}$$

для $k = 1, \dots, h$,

$$\rho_k = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathsf{E}\tau}\Biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} + p_{-1}R(h)\sum_{i=1}^{k-h}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h-i} - \sum_{j=h+1}^{k-1} r_j(h)\sum_{i=1}^{k-j}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i} - \sum_{n=h}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i}\Biggr)$$

для $k = h+1, \dots, m$ *та*

$$\rho_{m+1} = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathsf{E}\tau}\Biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} + p_{-1}R(h)\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i\overline{\overline{q}}_{m+1-h-i} - \sum_{j=h+1}^{m-1} r_j(h)\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i\overline{\overline{q}}_{m+1-j-i} - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\overline{\overline{q}}_{m+1-n-i} + \widetilde{m}_1\overline{a}_{m+1}\Biggr).$$

6. Визначення стаціонарних характеристик

Для системи з обмеженою чергою та груповим надходженням замовлень деякі замовлення, які прибувають у момент часу, коли вхідний потік не блокується, можуть бути втрачені (якщо сумарна кількість замовлень перевищує число $m+1$). Тому, якщо $a_1 < 1$, то для нашої системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ формула

$$\mathsf{P}_{\mathrm{sv}} = 1 - \rho_{m+1}$$

для обчислення ймовірності обслуговування невірна.

Формулу для P_{sv} отримаємо як границю при $t \to \infty$ відношення кількості обслужених замовлень до кількості всіх, що надійшли за час t. Середня кількість замовлень, які прибули на вхід системи за час t, дорівнює $\lambda b_1 t$, а середня кількість обслужених за той самий час становить $(1-\rho_0)t/M_1$, де M_1 — середній час обслуговування одного замовлення, який можна визначити за формулою

$$\frac{1}{M_1} = \frac{\mathsf{E}\,\omega}{m_1\,\mathsf{E}\,\tau} + \frac{\mathsf{E}\widetilde{\omega}}{\widetilde{m}_1\,\mathsf{E}\,\tau}.$$

Тут $\mathsf{E}\,\omega$ и $\mathsf{E}\,\widetilde{\omega}$ — середні тривалості частин періоду зайнятості, які відповідають основному і післяпороговому режимам обслуговування відповідно. Використовуючи співвідношення (20) для $\mathsf{E}\,\tau$, отримаємо таку формулу для ймовірності обслуговування

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{\mathrm{sv}} &= \frac{\widetilde{m}_1\,\mathsf{E}\,\omega + m_1\mathsf{E}\widetilde{\omega}}{b_1 m_1\widetilde{m}_1\bigl(1+\lambda\mathsf{E}\tau\bigr)} \\ &= \frac{1}{b_1\bigl(1+\lambda\,\mathsf{E}\,\tau\bigr)} \\ &\quad\times\Biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i - \sum_{n=1}^{h-1} a_n\sum_{i=1}^{h-n} R_i + p_{-1}R(h)\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i \\ &\qquad - \sum_{j=h+1}^{m-1} r_j(h)\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1}\Biggr).\end{aligned} \tag{24}$$

Стаціонарні характеристики черги — середню довжину черги $\mathsf{E}Q$ і середній час очікування $\mathsf{E}\,w$ знаходимо за формулами

$$\mathsf{E}\,Q = \sum_{k=1}^{m} k\rho_{k+1}; \qquad \mathsf{E}\,w = \frac{\mathsf{E}Q}{\lambda b_1 \mathsf{P}_{\mathrm{sv}}}. \tag{25}$$

Співвідношення для $\mathsf{E}\,w$ випливає з формули Літтла для систем обслуговування з втратами замовлень.

Середню кількість замовлень у системі в стаціонарному режимі визначаємо за допомогою рівності

$$\mathsf{E}\,S = \mathsf{E}\,Q + 1 - \rho_0.$$

7. Приклад обчислення стаціонарного розподілу та характеристик системи

Побудуємо алгоритми для обчислення R_i, q_i та $\widetilde{R}_i$, $\widetilde{q}_i$ $(i \geq 1)$. Зауважимо, що ці алгоритми не залежать від параметрів m і h, тому для їх реалізації досить володіти інформацією про вхідний потік і розподіл часу обслуговування (функції $F(x)$ та $\widetilde{F}(x)$).

З означень R_i, q_i та $\widetilde{R}_i$, $\widetilde{q}_i$ випливають такі рекурентні співвідношення для $k \geq 1$:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}, \quad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}}; \qquad \widetilde{R}_1 = \frac{1}{\widetilde{p}_{-1}}, \quad \widetilde{R}_{k+1} = \frac{\widetilde{R}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \widetilde{p}_i \widetilde{R}_{k-i}}{\widetilde{p}_{-1}};$$

$$q_0 = \frac{1 - f(\lambda)}{\lambda}, \quad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda}; \quad \widetilde{q}_0 = \frac{1 - \widetilde{f}(\lambda)}{\lambda}, \quad \widetilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \widetilde{q}_{k-i} - \frac{\widetilde{p}_{k-1}}{\lambda},$$

де

$$p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x); \tag{26}$$

$$\widetilde{p}_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, d\widetilde{F}(x), \qquad i = -1, 0, 1, \ldots. \tag{27}$$

Припустимо, що замовлення можуть надходити лише по одному або по двоє і потік може проріджуватись $(a_0' + a_1' + a_2' = 1)$, а час обслуговування основного і післяпорогового режимів розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметрами μ та $\widetilde{\mu}$ відповідно $(F(x) = 1 - (1 + \mu x)e^{-\mu x}$, $\widetilde{F}(x) = 1 - (1 + \widetilde{\mu} x)e^{-\widetilde{\mu} x}$, $x \geq 0)$. Середні значення часу обслуговування становлять $m_1 = 2/\mu$ та $\widetilde{m}_1 = 2/\widetilde{\mu}$ відповідно.

Розглянемо приклад з такими числовими даними: $a_0' = 0.1$; $a_1' = 0.675$; $a_2' = 0.225$; $m = 5$; $h = 2$; $\lambda' = 20/9$; $\mu = 3$; $\widetilde{\mu} = 6$. Тоді $a_1 = 0.75$; $a_2 = 0.25$; $\lambda = 2$; $m_1 = 2/3$; $\widetilde{m}_1 = 1/3$; $b_1 = 1.25$.

За формулами (27) отримуємо

$$\begin{gathered} p_{-1} = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}; \qquad p_0 = \frac{2a_1\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}; \qquad p_1 = \frac{3a_1^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4} + \frac{2a_2\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}; \\ p_2 = \frac{4a_1^3\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5} + \frac{6a_1a_2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}; \qquad p_3 = \frac{5a_1^4\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6} + \frac{12a_1^2a_2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5} + \frac{3a_2^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}; \\ p_4 = \frac{6a_1^5\mu^2\lambda^5}{(\lambda+\mu)^7} + \frac{20a_1^3a_2\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6} + \frac{12a_1a_2^2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5}. \end{gathered} \tag{28}$$

Формули для $\widetilde{p}_i$ одержимо з (28), замінивши μ на $\widetilde{\mu}$.

Середня тривалість періоду зайнятості $\mathsf{E}\,\tau$, знайдена за формулою (20), становить 8.64295.

У стрічці "ρ_k" таблиці 1 записані ймовірності ρ_k, обчислені за формулами (24). У цій же таблиці для порівняння наведені значення відповідних імовірностей, отриманих за допомогою системи комп'ютерного моделювання GPSS World [15, 16] для значення часу $t = 500\,000$. Значення стаціонарних характеристик системи, знайдені за формулами (25) і (26), а також за допомогою GPSS World, наведені у таблиці 2.

Таблиця 1. Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі ($h = 2$)

Кількість замовлень (k)	0	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.0547	0.0972	0.1789	0.1876	0.1857	0.1690	0.1269
ρ_k (GPSS World, $t = 5 \cdot 10^5$)	0.0548	0.0968	0.1788	0.1879	0.1858	0.1688	0.1277

Таблиця 2. Стаціонарні характеристики системи ($h = 2$)

Характеристика	P_{sv}	$\mathsf{E}Q$	$\mathsf{E}\,w$
Аналітичне значення	0.8393	2.4216	1.1541
Значення згідно з GPSS World ($t = 5 \cdot 10^5$)	0.839	2.422	1.155

8. Задача оптимального вибору порога h

Розглянемо вартісний критерій якості функціонування системи обслуговування $M^\theta/G_1/1/m$ у вигляді середнього прибутку за одиницю часу

$$Pr(h) = c_+ \lambda b_1 \mathsf{P}_{\mathrm{sv}} - c_{\mathrm{sv}} T(h) - \widetilde{c}_{\mathrm{sv}} \widetilde{T}(h) - c_0 \rho_0, \tag{29}$$

де c_+ — ціна, встановлена за обслуговування одного замовлення; c_{sv} і $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}}$ — вартості одиниці часу використання основного і післяпорогового режимів обслуговування відповідно; $T(h) = \lambda\rho_0\,\mathsf{E}\,\omega$ і $\widetilde{T}(h) = \lambda\rho_0\,\mathsf{E}\,\widetilde{\omega}$ — середній відносний час використання кожного з цих режимів відповідно; c_0 — витрати за одиницю часу простою системи.

Зафіксувавши параметр m, будемо шукати таке значення порога перемикання режимів h, яке максимізує середній прибуток $Pr(h)$.

Таблиця 3. Стаціонарні характеристики системи при різних значеннях h

h	P_{sv}	$T(h)$	$\widetilde{T}(h)$	ρ_0
1	0.8759	0.3508	0.5545	0.0947
2	0.8393	0.4917	0.4536	0.0547
3	0.7880	0.6174	0.3480	0.0346
4	0.7093	0.7718	0.2052	0.0230

Обчислимо значення критерію (29) при різних значеннях h, використовуючи дані прикладу, розглянутого у п. 7. У таблиці 3 наведено значення стаціонарних характеристик, які використовуються для обчислення $Pr(h)$, а у таблиці 4 — обчислені за формулою (29) значення середнього прибутку $Pr(h)$ при різних значеннях h і $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}}$ для таких значень вартісних коефіцієнтів: $c_+ = 8$, $c_{\mathrm{sv}} = 10$, $c_0 = 5$.

Таблиця 4. Значення середнього прибутку при різних значеннях h і $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}}$

h	$Pr(h)$ ($\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 18$)	$Pr(h)$ ($\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 20$)	$Pr(h)$ ($\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 22$)
1	**3.5555**	2.4465	1.3375
2	3.4307	**2.5235**	1.6163
3	3.1490	2.4530	1.7570
4	2.6594	2.2490	**1.8386**

Отже, найбільший прибуток у випадку, коли $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 18$, буде отримано при $h = 1$; у випадку, коли $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 20$, — при $h = 2$; а у випадку, коли $\widetilde{c}_{\mathrm{sv}} = 22$, — при $h = 4$.

9. Висновки

Особливістю системи рівнянь (6)–(8) для функцій $\Phi_n(s,k)$ є наявність коефіцієнтів $p_j(s)$ і $\widetilde{p}_j(s)$, які відповідають двом неперервним знизу випадковим блуканням, використання яких зумовлене двошвидкісним обслуговуванням у системі $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$. Розв'язання системи рівнянь (6)–(8) дало змогу застосувати метод потенціалу В. С. Королюка для дослідження не лише стаціонарного, а й перехідного режиму функціонування системи з двошвидкісним обслуговуванням. Результати аналітичного моделювання перевірені за допомогою імітаційної моделі. Розглянуто приклад розв'язання задачі оптимального вибору порога перемикання режимів обслуговування.

Література

1. V. Anisimov, *Switching Processes in Queueing Models*, John Wiley and Sons, London, 2008.
2. Ю. И. Рыжиков, *О задаче двухскоростного обслуживания*, Проблемы передачи информации **14** (1978), №2, 105–112.
3. S. Nishimura and Y. Jiang, *An M/G/1 vacation model with two service modes*, Probability in the Engineering and Informational Sciences **9** (1995), №3, 355–374.
4. A. N. Dudin, *Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two operation modes*, Probability in the Engineering and Informational Sciences **11** (1997), №2, 255–265.
5. R. D. Nobel and H. C. Tijms, *Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two service modes*, European Journ. of Operational Research **113** (1999), №3, 610–619.
6. А. Н. Дудин, Г. А. Медведев, Ю. В. Меленец, *Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания*, "Электронная книга БГУ", Минск, 2003.
7. В. С. Королюк, *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов*, "Наукова думка", Киев, 1975.
8. М. Хусанов, *Анализ распределения максимальной длины очереди в системе массового обслуживания методом потенциала*, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук (1977), №4, 29–33.
9. В. С. Королюк, Н. С. Братийчук, Б. Пирджанов, *Граничные задачи для случайных блужданий*, "Ылым", Ашхабад, 1987.
10. M. Bratiychuk and B. Borowska, *Explicit formulae and convergence rate for the system $M^\alpha/G/1/N$ as $N \to \infty$*, Stochastic Models **18** (2002), №1, 71–84.
11. А. М. Братійчук, *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою*, Автореферат кандидатської дисертації, КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, 2008.
12. К. Ю. Жерновый, *Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок*, Информационные процессы **10** (2010), №2, 159–180.
13. К. Ю. Жерновый, *Стационарные характеристики системы $M^\theta/G/1/m$ с пороговой стратегией функционирования*, Информационные процессы **11** (2011), №2, 179–195.
14. Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, *Теория массового обслуживания*, "Высшая школа", Москва, 1982.
15. В. Д. Боев, *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World*, "БХВ-Петербург", Санкт-Петербург, 2004.
16. Ю. В. Жерновий, *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування*, Видавн. центр ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, 2007.

Кафедра вищої математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000, Україна

Адреса електронної пошти: k_zhernovyi@yahoo.com

Надійшла 16/05/2011